This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

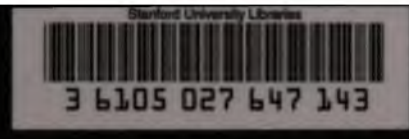
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


Stanford University Libraries
3 6105 027 647 143

RIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · ST
NFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UI
ERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LI
D UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVER
TY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRA
S · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANF
RIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · ST
NFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UI
ERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LI
D UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVER
TY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRA
S · STANFORD ARIES STAN

UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFO
UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVER
LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRAR
UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFO
UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVER
UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Liège, Membre de la Société royale des Sciences de Liège, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis!
PH. BRETON

TOME DIXIÈME
ANNÉE 1890.

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
49, RUE DES CHAMPS, 49

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & FILS
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
55, QUAI DES AUGUSTINS, 55

IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1890

ABRÉVIATIONS.

B. B. Bulletins de l'Académie royale de Belgique.

C. R. Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

N. A. M. Nouvelles Annales de Mathématiques (depuis 1842).

N. C. M. Nouvelle Correspondance Mathématique (1874-1880).

J. M. E. (ou J. M. S.). Journal de Mathématiques élémentaires (ou Journal de Mathématiques spéciales), fondé en 1877 par BOURGET, continué par G. DE LONGCHAMPS et L. LÉVY.

Crelle, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par CRELLE en 1826, continué d'abord par BORCHARDT, puis par KRONECKER et WEIERSTRASS, enfin par KRONECKER (en allemand surtout).

Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par LIOUVILLE en 1836, continué d'abord par RESAL, puis par JORDAN.

(2), III, 327-333 signifie : Deuxième série, tome troisième, pages 327 à 333.

STANFORD LIBRARY
OCT 21 1960

510.5
M466
v.10-11

MATHESIS

SUR QUELQUES QUESTIONS DE SIGNES EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE;

par M. Ed. Lucas, professeur de mathématiques spéciales, au Lycée St-Louis.

La plupart des Traités de Géométrie analytique ne résolvent pas d'une manière précise, les questions où il entre des signes; aucun auteur, je pense, n'a distingué jusqu'à présent par un procédé analytique les deux modes différents de croisement de deux droites quelconques de l'espace. La présente note a pour but de combler cette lacune. Nous ne nous occuperons, pour plus de simplicité, que des coordonnées rectangulaires; mais les considérations suivantes s'appliquent tout aussi bien aux coordonnées obliques dans le plan ou dans l'espace.

Désignons par

$$X_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i$$

le premier membre de l'équation d'un plan; par Q le déterminant des coefficients de X_1, X_2, X_3, X_4, et par A_i, B_i, C_i, D_i les mineurs du premier ordre de ce déterminant correspondant à a_i, b_i, c_i, d_i.

Pour que ces quatre plans X_1, X_2, X_3, X_4 forment un tétraèdre, il faut et il suffit que le produit $D_1D_2D_3D_4Q$ ne soit pas nul, et l'on sait qu'un plan quelconque est représenté par une équation linéaire et homogène.

L'identité

$$D_1X_1 + D_2X_2 + D_3X_3 + D_4X_4 = Q$$

nous montre que les plans

$$D_1X_1 + D_2X_2 = 0, \quad D_3X_3 + D_4X_4 = 0,$$

sont parallèles; le premier passe par l'arête (1, 2) parallèlement à la droite (3, 4). Par suite, le plan conjugué harmonique

$$D_1X_1 = D_2X_2$$

passe par l'arête (1, 2) et par le milieu de l'arête opposée, et le barycentre du tétraèdre est déterminé par les équations

$$D_1X_1 = D_2X_2 = D_3X_3 = D_4X_4 = \frac{Q}{4}.$$

Les quatre plans divisent l'espace en quinze régions qu'il est facile de caractériser. Un point quelconque et le barycentre du tétraèdre sont d'un même côté ou de côtés différents de la première face suivant que le produit D_1QX_1 est positif ou négatif.

Plan bissecteur d'un angle intérieur au tétraèdre. Posons

$$l_i = +\sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2};$$

l'un des plans bissecteurs du dièdre (1, 2) a pour équation

$$\frac{X_1}{l_1} = \varepsilon \frac{X_2}{l_2},$$

avec $\varepsilon = \pm 1$; par conséquent, puisque l_1 et l_2 sont positifs, on obtiendra le plan bissecteur de l'angle intérieur en choisissant ε du signe de D_1D_2.

Plan bissecteur de l'angle aigu d'un dièdre. Posons

$$h_{12} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2;$$

cette expression égalée à zéro est la condition de perpendicularité des deux plans. L'expression $\frac{X_1X_2}{h_{12}}$ ne change pas quand on multiplie les coefficients par un nombre quelconque; elle ne change pas non plus dans la transformation des coordonnées rectangulaires. Pour s'en convaincre, et pour se convaincre de quelques autres résultats qui vont suivre, il suffit de faire une rotation d'axes autour de Oz, puisque l'on peut passer d'un système d'axes à un autre quelconque par trois rotations, comme dans les formules d'Euler. Si l'on prend pour plan des xy le plan bissecteur de l'angle aigu des deux plans, l'expression précédente devient

$$\frac{(z + mx)(z - mx)}{1 - m^2}$$

et l'on a $m < 1$; pour un point de l'axe des x, cette expression est négative. Par suite, un point est situé dans l'angle aigu ou dans l'angle obtus de deux plans, suivant que l'expression $\frac{X_1X_2}{h_{12}}$ est négative ou positive.

Le plan bissecteur de l'angle aigu de deux plans a donc pour équation

$$\frac{X_1}{l_1} = \varepsilon \frac{X_2}{l_2}$$

ε ayant le signe contraire de celui de l'expression précédente h_{12}.

En comparant l'équation du plan bissecteur de l'angle aigu avec celle de l'équation du plan bissecteur de l'intérieur, on trouve immédiatement la nature de l'angle dièdre du tétraèdre, et les signes des fonctions trigonométriques de cet angle sont nettement déterminés.

Croisement de deux droites de l'espace. Sans tenir compte de leurs directions, deux droites quelconques de l'espace prolongées indéfiniment, qui ne se coupent pas et ne sont pas perpendiculaires, peuvent affecter deux modes distincts de croisement, puisque l'ensemble formé par deux droites quelconques ne peut coïncider avec la figure symétrique par rapport à un point quelconque de l'espace, par exemple, par rapport au milieu de leur plus courte distance.

Considérons deux droites parallèles, et, dans la plus courte distance, un bonhomme ayant les pieds sur l'une d'elles, et la tête dans l'autre; faisons tourner de moins d'un angle droit dans le sens de gauche à droite en passant par devant, c'est-à-dire à la droite du bonhomme, la ligne qui passe par sa tête. Nous dirons que le croisement est *dextrorsum* (*).

Cela posé, soient

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0,$$

les équations d'une droite, et

$$X_3 = 0 \quad X_4 = 0$$

celles d'une seconde droite; posons

$$\begin{aligned} L_{12,34} = {} & (b_1c_2 - b_2c_1)(b_3c_4 - b_4c_3) \\ & + (c_1a_2 - c_2a_1)(c_3a_4 - c_4a_3) \\ & + (a_1b_2 - a_2b_1)(a_3b_4 - a_4b_3); \end{aligned}$$

cette expression égalée à zéro est la condition de perpendicularité, et $Q = 0$ est la condition de rencontre. Mais l'expression $\frac{L_{12,34}}{Q_{1234}}$ ne change pas, 1° quand on échange les indices 1 et 2, ou 3 et 4; 2° quand on change l'ordre des deux droites; 3° quand on multiplie les coefficients de l'équation de l'un des plans par un nombre quelconque; enfin 4° dans la transformation des coordonnées rectangulaires.

En particulier, soient les droites

$$z = 1, \quad y = mx, \quad \text{et} \quad z = -1, \quad y = -mx,$$

(*) Cette définition est indépendante de l'ordre des droites et s'applique aux deux droites, en renversant le bonhomme.

et $m < 1$; on trouve dans ce cas un résultat positif. Donc *le croisement de deux droites de l'espace est dextrorsum ou sinistrorsum suivant que le rapport* $\frac{L}{Q}$ *est positif ou négatif.*

Application aux quadriques. Soit

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

l'équation d'une quadrique,

$$s^3 - Is^2 + Js - \delta = 0$$

l'équation en s, en supposant toujours les coordonnées rectangulaires, et Δ le discriminant de l'équation (1) rendue homogène

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

On peut se proposer de rechercher les caractéristiques de position d'un point et d'une quadrique.

Il faut alors considérer le signe de f avec celui d'un invariant I ou δ d'ordre impair tandis que le genre et la variété des surfaces est donné par le signe des invariants d'ordre pair, ou du produit $I\delta$ des invariants d'ordre impair par rapport aux coefficients.

Pour reconnaître si un point est dans une région déterminée par la surface d'une quadrique à centre ou d'un cône, on prend le signe de $\delta f(x, y, z)$.

Pour reconnaître les relations de position d'un point et d'un paraboloïde, de deux plans sécants, ou parallèles, d'un cylindre parabolique, on prend le signe de $If(x, y, z)$.

Pour les cylindres à centre, on prendra le signe de $\Gamma f(x, y, z)$, en désignant par Γ la somme des mineurs de Δ par rapport aux coefficients des carrés des variables (*).

(*) On trouve une étude sur des questions analogues à celles qui sont traitées dans l'article de M. Lucas, dans le chapitre II (pp. 22-34) de l'Introduction du *Cours de Mécanique* de DUHAMEL (Paris, Mallet-Bachelier, 1862; troisième édition). Ce chapitre est intitulé : *Révision de quelques formules de Géométrie analytique* et l'auteur y traite, avec quelque prolixité, les deux questions suivantes : 1° Distinction du sens de la perpendiculaire à deux droites. 2° Distinction du sens de l'axe d'un mouvement de rotation. (P. M.)

ETUDE GÉOMÉTRIQUE SUR LA CISSOÏDE ET LA STROPHOÏDE;

par M. Cl. Servais, répétiteur à l'Université de Gand.

1. ***Génération simultanée des deux courbes.*** Soient les deux droites parallèles AA′ et OO′, la droite OA perpendiculaire à ces parallèles et un point F pris sur OA, tel que AF = OA.

Considérons un triangle MPQ dont deux côtés MP et PQ sont égaux à OA. Si ce triangle se déplace de telle façon que les deux sommets P et Q décrivent respectivement les droites OO′ et AA′, le côté PQ étant constamment parallèle à OA et le côté MQ perpendiculaire à QF, alors le sommet M décrit une strophoïde, et le milieu N de MQ, une cissoïde.

En effet, joignons OM, AM, AP, et du point O, abaissons sur AP la perpendiculaire OR. Le milieu N du côté MQ est sur AP, et on a PN = AR; donc N décrit une cissoïde.

Le trapèze OMPA est isoscèle; donc si μ est le point d'intersection des droites OP et AM, on a Mμ = Oμ et M décrit une strophoïde.

Autre mode de génération. — Dans le mouvement d'un rectangle ASMN *un sommet* A *reste fixe sur une circonférence dont le diamètre est* AO; *le sommet voisin* S *décrit la circonférence, le côté* MS *passe par le point* O *et la diagonale* NS *est perpendiculaire sur* OA; *alors les deux autres sommets* M *et* N *décrivent, respectivement, une cissoïde et une strophoïde.*

2. Prenons le milieu *n* de PM. On a

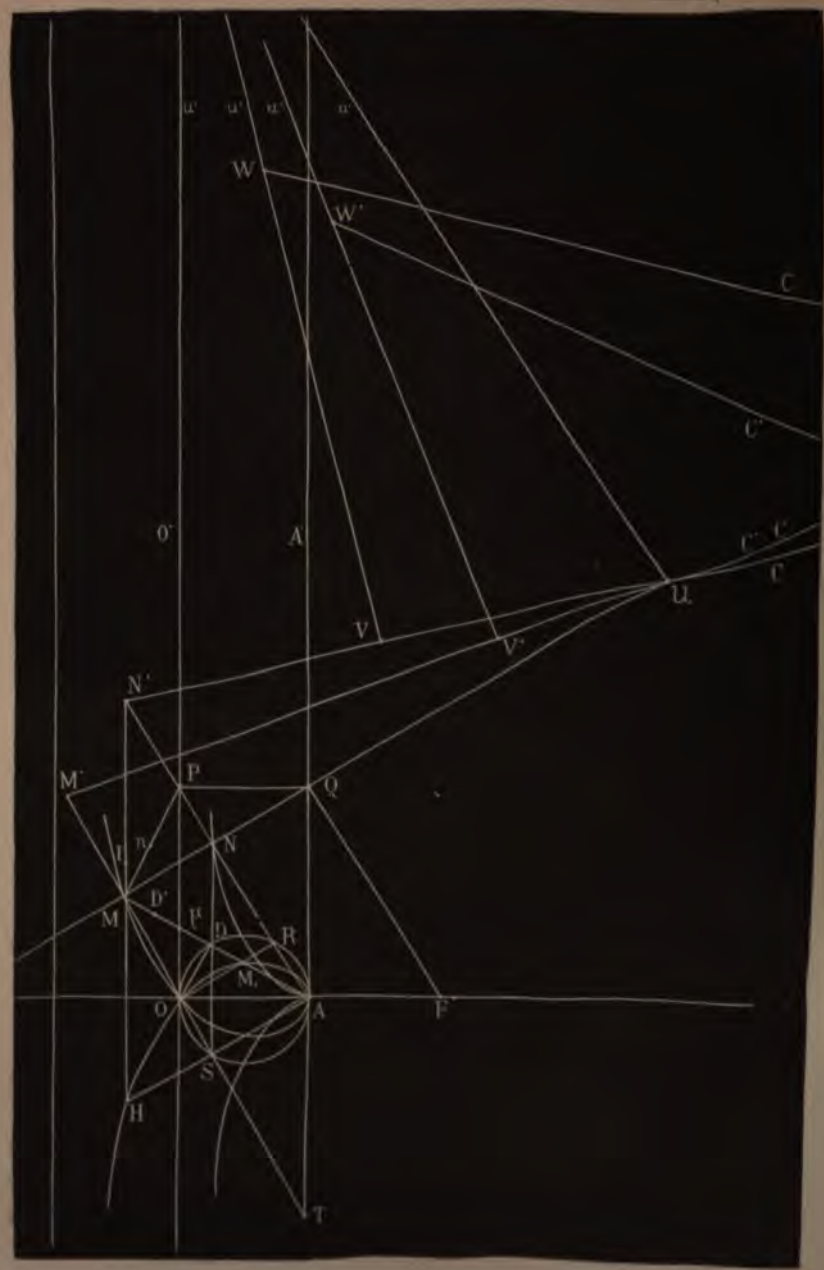
$$Nn = \tfrac{1}{2}\,PQ = \tfrac{1}{2}\,AO;$$

donc *n* décrit une cissoïde (*n*) dont le sommet est au milieu de AO. Nous retrouvons ainsi le mode de génération dû à Newton :

Un angle droit a le côté PM *de longueur constante; le point* P *se meut le long de la droite fixe* OO′, *tandis que le côté* AM *passe par un point fixe* A, *situé à une distance de* OO′ *égale à* MP; *un crayon placé au milieu de* PM *décrit la cissoïde.*

Nous voyons de plus qu'un crayon placé au sommet de l'angle droit décrit la strophoïde.

Conséquences. *Si le centre n d'un cercle égal au cercle générateur d'une cissoïde* (*n*) *se meut sur cette courbe, le lieu des points de contact* M *des tangentes à ce cercle, menées d'un point fixe* A *pris sur l'axe à une distance du sommet égale au rayon du cercle générateur, est une strophoïde.*


W
W'
C
C'
O'
A
V
V'
N'
M'
P
Q
N
M
A
F
S
H
T

Le lieu des points de rencontre de ce même cercle avec une droite menée du milieu O *de l'axe de la cissoïde* (*n*) *parallèlement à la droite qui joint le point de rebroussement au centre de ce cercle, est une strophoïde.*

3. Prolongeons MS jusqu'à sa rencontre avec AA′ en T; le triangle AMT étant isoscèle, la droite OM peut être considérée comme la tangente menée, par le point fixe O, à une parabole dont le foyer est A et l'axe AA′. Alors N est le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer sur la normale; donc

Le lieu des points de contact des tangentes que l'on peut mener d'un point fixe pris sur l'ordonnée focale à une suite de paraboles homofocales et de même axe, est une strophoïde. Le lieu des projections du foyer sur toutes les normales est une cissoïde.

4. La droite MN étant toujours perpendiculaire sur QF enveloppe une parabole dont le foyer est F et le sommet A; alors O est le pied de la directrice, donc

La podaire d'une parabole par rapport à son sommet est une cissoïde et, par rapport au pied de la directrice, une strophoïde.

5. *Si une parabole roule sur une parabole identique, le sommet décrit une cissoïde, et le pied de la directrice une strophoïde.*

En effet, la position primitive des points décrivants étant A et O, quand le point de contact des deux paraboles sera en U, ces points seront respectivement aux points N′ et M′ symétriques de A et O par rapport à la tangente NU; donc N′ décrit une cissoïde et M′ une strophoïde.

Ce mode de génération donne la construction des normales aux deux courbes.

Au milieu de OM′ ou de AN′ on élève une perpendiculaire qui sera une tangente à la parabole dont le foyer est F et le sommet A. Le point de contact U de cette tangente s'obtient très facilement et UN′, UM′ sont les normales aux deux courbes. On déduit de là ce théorème :

On considère une strophoïde et une cissoïde qui a pour cercle générateur un cercle ayant pour centre le point double de la strophoïde et pour diamètre, le demi-axe de cette courbe. Si, par les points doubles des deux courbes, on mène des rayons parallèles, les normales aux points d'intersection se coupent sur une parabole.

Ce mode de génération donne aussi une construction des centres de courbure des deux courbes. Nous nous appuierons sur ce qui suit : Si une courbe roule sur une autre identique, de façon que les points en contact

soient des points correspondants, le rayon de courbure de la courbe engendrée par un point lié invariablement à la roulante est donné par

$$\rho_1 = \frac{n^2}{n - \frac{\rho}{2}\sin u},$$

n étant la portion de la normale comprise entre le point générateur et le point de contact; u l'angle de cette normale avec la tangente commune; ρ le rayon de courbure au point de contact.

Cela étant, cherchons le rayon de courbure en un point N' d'une cissoïde. On a $N'u = n$. Si on mène la normale à la parabole, et qu'on la prolonge jusqu'à la directrice en u', on a $uu' = \frac{\rho}{2}$; V étant le pied de la perpendiculaire abaissée de u' sur $N'u$, on a $Vu = \frac{1}{2}\rho \sin u$ et $N'V = n - \frac{1}{2}\rho \sin u$.

Du point N' comme centre, avec $N'u$ comme rayon, décrivons un arc de cercle coupant Vu' au point W. La tangente au cercle en ce dernier point rencontre $N'u$ en C qui est le centre de courbure.

En remplaçant dans la construction $N'u$ par $M'u$, on aura le centre de courbure au point M' de la strophoïde.

6. Considérons la parabole tangente aux droites QP et QA respectivement en P et en A. Cette parabole aura pour foyer le point N et passera par le point B pris sur la normale au point A à une distance AB = 4 PQ. La directrice de cette parabole sera perpendiculaire au point Q sur la droite OQ. Donc

Si l'on a une infinité de paraboles normales à une droite et qui la coupent en deux points fixes A *et* B, *le foyer décrit une cissoïde; le symétrique, par rapport au foyer, du point de rencontre* Q *de la directrice avec la normale commune décrit une strophoïde; la directrice enveloppe une parabole, ainsi que la droite qui joint le foyer au point* Q.

7. Si par le sommet A de la strophoïde, on mène une sécante, les deux points d'intersection peuvent être considérés comme les sommets réels d'une hyperbole qui a le point A pour foyer et OO' pour asymptote. Le pied de la directrice correspondante au foyer A est le pied D de la perpendiculaire abaissée du point O sur AM; le pied de l'autre directrice s'obtient en prenant $\mu D' = \mu D$. Donc :

Si l'on considère toutes les hyperboles ayant un foyer commun et une

asymptote commune, le lieu des sommets est une strophoïde; le lieu du pied de la directrice correspondant au foyer donné est un cercle; le lieu du pied de l'autre directrice est une courbe que l'on obtient en prolongeant chacun des rayons vecteurs d'une cissoïde comptés à partir du sommet, d'une longueur égale au rayon correspondant de l'asymptote.

8. Menons la droite MN', elle sera perpendiculaire sur AO, et si l'on prend MH = MN', le point H est sur le cercle décrit du point O comme centre avec OA pour rayon, car MH = MA; donc OA = OH.

Ainsi se trouvent démontrés le 1° et le 3° de la question suivante (*Géométrie Analytique* de M. de Longchamps, n° 97) :

Soit M un point d'une strophoïde ayant pour sommet O et pour point double O'. Du point O' comme centre, avec OO' pour rayon, on décrit un cercle Δ. Si du point M on abaisse une perpendiculaire sur OO', cette droite rencontre Δ en deux points parmi lesquels on distinguera particulièrement le point H qui jouit de la propriété que MH = MO. 1° Reconnaître l'exactitude de cette proposition; 2° Démontrer que si la perpendiculaire à OM au point O et la tangente en H à Δ se coupent en T, TM est la tangente à la strophoïde; 3° Démontrer que si l'on prend MH' = MH, le lieu du point H' est une cissoïde; 4° Reconnaître que la tangente au point H' à la cissoïde passe, elle aussi, par le point T.

Pour la démonstration suivante du 2° et du 4°, le lecteur est prié de faire la figure. J'emploie les notations de l'énoncé.

Soient deux points infiniment voisins M et M_1 de la strophoïde; H et H_1 les points correspondants du cercle; H' et H'_1, ceux de la cissoïde. Les sécantes MM_1, HH_1, $H'H'_1$ se coupent en un même point K; il en sera donc de même des tangentes. On voit de plus que OK est la bissectrice extérieure de l'angle MOM_1, car $OM : OM_1 = MH : M_1H_1 = KM : KM_1$; donc, à la limite, OK est perpendiculaire sur OM.

9. Remarquons que les points A, O, M, P, Q, sont sur une même circonférence qui coupe MN' au point I. Dans cette circonférence, les deux cordes IM et PO étant parallèles, on a MP = IO, donc IO = OA et le lieu du point I est une circonférence. Donc *si l'on considère une strophoïde et si par le sommet de la courbe, son point double et un point* M *quelconque de la courbe, on fait passer une circonférence* Δ; *cette circonférence rencontre la parallèle menée par* M *à l'asymptote en un point* I *dont le lieu est une circonférence.* (*Géom. analyt.* de M. de Longchamps, N° 96).

10. Si l'on considère le triangle OAH, le point M est le point de

rencontre des hauteurs de ce triangle. Donc *si sur un cercle de centre* O *on prend un point fixe* A *et un point mobile* H, *le point de rencontre des hauteurs du triangle* OAH *décrit une strophoïde.*

11. Soient M et M_1 deux points de la strophoïde en ligne droite avec le sommet A. On a

$$AM.AM_1 = \overline{AO}^2;$$

donc la strophoïde est une anallagmatique, et les tangentes et les normales aux points M et M_1 se coupent en des points Y et Z sur la perpendiculaire élevée au milieu μ de MM' (Ces lignes ne sont pas tracées pour ne pas compliquer la figure). Le lieu du point Z est une parabole, car on a vu que le lieu du point Z se confond avec l'enveloppe de la droite YZ. Donc si W est le point de rencontre de YZ avec AO, l'on a

$$\mu Z = \mu W.$$

On a aussi

$$\overline{\mu M}^2 = \overline{\mu O}^2 = \mu Z.\mu Y = \mu W.\mu Y;$$

donc OY est perpendiculaire sur YZ et le lieu du point Y est une cissoïde; par conséquent : *Si l'on considère deux points d'une strophoïde en ligne droite avec le sommet, le point de rencontre des normales en ces points décrit une parabole et le point de rencontre des tangentes décrit une cissoïde.*

12. On a vu que la podaire d'une parabole par rapport à son sommet est une cissoïde; l'inverse de la cissoïde par rapport à son point de rebroussement sera donc la polaire réciproque de la parabole, c'est-à-dire une parabole ayant pour sommet le point A et pour axe focal AA'. Donc *l'inverse d'une cissoïde par rapport à son point de rebroussement est une parabole.* On voit de la même manière que : *L'inverse d'une strophoïde par rapport à son point double est une hyperbole équilatère dont l'axe réel est* AO *et dont l'un des sommets est le point* O.

Ces propriétés permettent de déterminer aisément la normale et le centre de courbure en un point de la cissoïde ou de la strophoïde, en s'appuyant sur les théorèmes suivants :

Les normales en deux points correspondants de deux courbes inverses sont également inclinées sur la droite qui les unit. Les centres de courbure en ces points sont en ligne droite avec le pôle d'inversion (*).

(*) Voir ROUCHÉ et COMBEROUSSE, *Géométrie*, p. 257 et N. A. M., 1866 (2), V, p. 404 (HABICH.) (C. S.). Nous publierons prochainement quelques renseignements bibliographiques sur la strophoïde (*Rédaction*).

VARIÉTÉS; BIBLIOGRAPHIE; CORRESPONDANCE.

La devise de Mathesis.

M. H. Brocard, notre zélé collaborateur, nous communique l'extrait suivant d'une lettre de M. Ph. Breton, qui expliquera à nos nouveaux abonnés l'origine de l'épigraphe un peu paradoxale de notre recueil.

« On peut ne pas s'effrayer outre mesure du titre de *Mathesis* adopté par les éditeurs de la suite de la *Nouvelle correspondance mathématique;* j'ai eu quelque temps entre les mains le *Livre des Principes*, de Newton, édition publiée à *Colonia Allobrogum* (Genève) par les *PP. François Jacquier* et *Thomas Le Seur*, *ex familiâ Minimorum Franciae*, *professores* Matheseos. Ces deux savants moines ont d'ailleurs enrichi leur édition génevoise des œuvres de Newton, d'une multitude de notes et commentaires, le tout en latin newtonien. .... Si jamais je parviens à rédiger et à publier un opuscule sous le titre d'« Éclaircissement sur la nature et l'objet de la Mathématique », j'ai pensé à y mettre en tête du chapitre sur la géométrie analytique, cette petite épigraphe imitée d'Horace :

« *Ut pictura Mathesis ... erit.*

« Il faut que la Mathèse devienne une peinture. »

Grenoble, 7 janvier 1881. Philippe Breton.

Extraction de la racine carrée par la méthode des deux moyennes.

La coincidenza dei due metodi d'approssimazione di Newton e Lagrange nelle radici quadrate irrazionali dei numeri integri per B. Carrara. Torino, Paravia, 1880 (30 p. in-8°).

Résumé. I. *Méthode de Newton.* Soient

$$N = a_0 b_0 = a_1 b_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 = \text{etc.}$$
$$a_1 = \tfrac{1}{2}(a_0 + b_0), \quad a_2 = \tfrac{1}{2}(a_1 + b_1), \quad a_3 = \tfrac{1}{2}(a_2 + b_2), \text{ etc.}$$

On démontre aisément que les *moyennes arithmétiques* a_1, a_2, a_3, etc., forment une série décroissante, et les moyennes *harmoniques* b_1, b_2, b_3, etc., une série croissante de valeurs de plus en plus approchées de $\sqrt{N}$ (on peut même prouver aisément qu'elles ont $\sqrt{N}$ pour limite).

II. *Méthode de Lagrange.* Si a est le plus grand entier contenu dans $\sqrt{N}$, on peut réduire $\sqrt{N}$ en une fraction continue périodique de la forme :

$$a + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{q_1} + \text{etc.}}}}}$$

III. Soit X_{kn} la réduite de cette fraction correspondant à l'avant-dernier quotient incomplet de k périodes. M. Carrara démontre la formule suivante :

$$X_{2kn} = \frac{1}{2}\left(X_{kn} + \frac{N}{X_{kn}}\right)$$

obtenue antérieurement par SERRET dans le cas où $k = 1$.

IV. Il résulte de là que, si l'on fait $X_{kn} = a_0$, on aura $X_{2kn} = a_1$, $X_{4kn} = a_2$, etc. La méthode de Newton appliquée à la réduite d'ordre n, donne donc immédiatement les réduites d'ordre $2n$, $4n$, etc., sans passer par les réduites intermédiaires.

V. L'erreur commise en appliquant la méthode de Newton de cette manière, sera évidemment moindre que $(1 : D^8)$, D étant le dénominateur de la réduite à laquelle on s'arrête.

La brochure de M. Carrara, outre ce qui précède, contient diverses remarques intéressantes sur la méthode de Lagrange, de nombreux exemples et, en particulier, le développement en fraction continue de $\sqrt{N}$ pour toutes les valeurs entières de N, de 2 à 78 (DEGEN a publié, en 1817, une table analogue jusque $N = 1000$).

REMARQUES. I. La méthode attribuée ici à Newton est très ancienne. D'après HEIBERG (*Bulletin de Darboux*, 1886, 2e partie, p. 7, note), on la trouve dans la *Logistique* du moine grec BARLAAM (commencement du 14e siècle). La valeur approchée $\frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ est d'ailleurs égale à $a_0 + \frac{1}{2}(b_0 - a_0) = a_0 + \frac{N - a_0^2}{2a_0}$ que donne la méthode habituelle d'extraction de la racine carrée, méthode connue dans l'Antiquité. CH. HENRY signale dans le *Bulletin de Darboux* (1879, 1re partie, pp. 515-520), plusieurs auteurs récents qui ont retrouvé le théorème de Serret. Il fait observer que la *méthode des deux moyennes*, comme il l'appelle, remonte probablement aux Anciens. ARCHIMÈDE semble l'avoir employée pour trouver la singulière valeur approchée $\frac{1351}{780}$ de $\sqrt{3}$. Si l'on pose, en effet, $a_0 b_0 = 3$, $a_0 = \frac{5}{3}$, on trouve

$$a_1 = \frac{26}{15}, \quad b_1 = \frac{45}{26}, \quad a_2 = \frac{1351}{780}.$$

II. On peut observer que les moyennes harmoniques b_1, b_2, b_3, etc., donnent des valeurs de $\sqrt{N}$ plus rapprochées que les moyennes arithmétiques correspondantes a_1, a_2, a_3, etc.; par suite, $\sqrt{N} = b_n$ avec une erreur moindre que $\frac{1}{2}(a_n - b_n)$.

III. Dans un cercle de centre O, de rayon $OA = OB$, si le diamètre AB est la somme des longueurs $AC = a_0$, $CB = b_0$, $\sqrt{N}$ est égal à CD, demi-corde perpendiculaire à AB en C; $a_1 = AO = BO = DO$, et $b_1 = DE$, projection de CD sur DO. Si, sur DO, on porte $DF = DC$, CF est la bissectrice de ECO; par suite, $EF = \sqrt{N} - b_1$ est inférieur à $FO = a_1 - \sqrt{N}$. (P. M.

Sur le développement, en fraction continue, de $\sqrt{N}$.

(Extrait d'une lettre de M. CATALAN à M. B. CARRARA)

Un petit voyage à Bruxelles, et des travaux personnels, qui me préoccupent fort, m'ont empêché, jusqu'à présent, de répondre à votre intéressante lettre du 5 de ce mois. Mais je n'ai cessé d'y penser.

Dans cette lettre, vous *plaidez* encore, me semble-t-il, pour la substitution de n à kn. Vous ne m'avez pas convaincu, probablement parce que je ne saisis pas votre idée. Mais, comme la seconde notation est fort claire, adoptons-la, si vous le voulez bien. Votre théorème, généralisation de celui de Serret, est alors exprimé par votre première formule(*) :

$$\frac{P_{2kn}}{Q_{2kn}} = \frac{1}{2}\left[\frac{P_{kn}}{Q_{kn}} + N\frac{Q_{kn}}{P_{kn}}\right]. \qquad (1)$$

Si l'on y fait $k = 1$, on trouve la formule de Serret (*Journal de Liouville*, tome XII, p. 519), sauf une différence de notation :

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \frac{1}{2}\left[\frac{P_n}{Q_n} + N\frac{Q_n}{P_n}\right]. \qquad (2)$$

Cela posé, *je viens de m'apercevoir* que votre formule (1) résulte, immédiatement, de la formule (2).

En effet, *dans toute fraction périodique*, on peut prendre deux périodes, trois périodes, etc.; et *considérer cet ensemble comme une période unique* (*Nouvelles Annales*, 1re série, tome VIII; *Mélanges Mathématiques*, etc.). Nous pouvons donc remplacer P_n par P_{kn}, Q_n par Q_{kn}, etc. C. Q. F. D.

REMARQUE. Si l'on fait

$$\frac{P_{nk}}{Q_{nk}} = X_k, \quad \frac{P_{2nk}}{Q_{2nk}} = X_{2k},$$

la formule (2) devient, tout de suite,

$$X_{2k} = \frac{X_k + \dfrac{N}{X_k}}{2},$$

conformément à ce que donne le développement de

$$\left[X_k^2 + \left(N - X_k^2\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

par la formule du binôme.

Cette remarque, due à Serret (paraît-il), n'a pas été clairement énoncée par lui; en lisant *méthode d'approximation de Newton*, on peut être tenté de croire qu'il s'agit de l'expression $h = -f(\alpha) : f'(\alpha)$.

Liége, le 18 novembre 1889.

(*) C'est la formule (1) donnée plus haut (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Question 636.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 280.)

Si A, B *sont des points fixes*, P, Q *des points variables de la droite* AB, *mais tels que* PQ *soit de grandeur constante, deux cercles décrits des centres* P, Q *et passant respectivement par* A, B *se rencontrent en un point* R, *dont le lieu est une conique.* (R. W. Genese.)

Solution par MM. de Bözóky, Keelhoff, Russo, Déprez, Bruyr, Denys et Klompers. Prenons pour axes AB et une perpendiculaire au milieu. Si $AB = 2a$, $PQ = 2b$, les équations des cercles variables sont

$$(x - \alpha - b)^2 + y^2 = (\alpha + b - a)^2, \quad (x - \alpha + b)^2 + y^2 = (\alpha - b + a)^2,$$

α étant l'abscisse variable du milieu de PQ. D'où, en soustrayant les deux équations pour faciliter l'élimination de α,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a(a-2b)} = 1.$$

Le lieu est donc une ellipse ou une hyperbole, suivant que a est supérieur ou inférieur à $2b$. Si $a = 2b$, les cercles variables se touchent constamment sur la droite AB.

Remarque. Si la droite PQ glisse sur une droite quelconque, le lieu des points de rencontre des deux cercles est encore une conique. La tangente commune enveloppe une courbe de la quatrième classe. (Déprez.)

Question 639.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 280.)

Les coniques issues de P, *osculant en un point* Q *une même ligne* L, *ont leurs centres sur une conique dont le centre est aux trois quarts de* PQ.

(E. Cesáro.)

Solution par M. Servais. La conique lieu des centres est tangente au point Q au cercle de courbure commun et passe par le milieu de PQ; il suffit donc de démontrer que PQ est un diamètre de cette conique. Les

---

(*) Nous avons oublié de mentionner antérieurement de bonnes solutions des questions 633 par M. Déprez, 656 par M. Verniory.

transformées birationnelles quadratiques de troisième espèce des coniques sont des droites passant par un point P', conjugué du point P par rapport à un cercle tangent au cercle osculateur au point Q et dont le rayon est égal au diamètre de ce cercle(*).

Par le point P', menons au cercle osculateur les tangentes P'H et P'G. Les droites QH, QG seront les asymptotes de la conique lieu des centres; car les transformées des droites P'H et P'G sont des paraboles dont les axes sont parallèles à QH et QG. Or, si par un point Q d'une conique, on mène des parallèles aux asymptotes, la corde interceptée dans un cercle tangent à la conique au point Q est parallèle à la corde de courbure; son pôle par rapport à ce cercle est situé sur le diamètre de la conique correspondant au point Q(**). Donc PQ est un diamètre.

Solution par M. KEELHOFF. Prenons P comme origine, PQ comme axe des x, et soit $PQ = \alpha$. L'équation générale des coniques passant par P et Q sera

$$x^2 + 2bxy + cy^2 + 2fy - \alpha x = 0. \tag{1}$$

Si on la dérive deux fois de suite et qu'on remplace ensuite x par α, y par 0, on trouve

$$\frac{\alpha}{2} + (b\alpha + f)\,y' = 0, \tag{2}$$

$$1 + 2by' + cy'^2 + (b\alpha + f)\,y'' = 0. \tag{3}$$

On exprime qu'il y a osculation avec la ligne donnée en remplaçant y' et y'' par leurs valeurs au point Q, déduites de l'équation de la ligne donnée L.

Les coordonnées du centre de la conique (1) vérifient les égalités

$$2x + 2by - \alpha = 0, \quad cy + bx + f = 0, \tag{4}$$

Éliminant b, c, f entre les équations(2), (3), (4), on obtient pour le lieu des centres des coniques osculatrices

$$y^2\left(1 - \frac{\alpha y''}{2y'}\right) - 2xyy' + x^2y'^2 + \frac{3}{2}\alpha y'\,(y - xy') + \frac{1}{2}\alpha^2 y'^2 = 0. \tag{5}$$

Ce lieu est une ellipse ou une hyperbole, selon que le rapport $(y'' : y')$ est négatif ou positif.

Il se compose de la tangente fixe au point Q, et d'une parallèle par le milieu de PQ, lorsque $y'' = 0$; la ligne fixe L a alors un point d'inflexion

---

(*) *Mathesis*, t. VIII, p. 29.

(**) N. A. M, 1868 (3), t. VII, p. 372.

en Q, et la conique osculatrice se compose de la tangente d'inflexion et d'une droite quelconque menée par P. Dans l'hypothèse de $y' = \infty$, le lieu (5) se compose de deux parallèles à OY, menées par Q et par le milieu de PQ.

Dans le cas général, on trouve aisément pour les coordonnées du centre de la conique (5) : $x = \frac{5}{4}\alpha$, $y = 0$; ce point est donc situé aux trois quarts de PQ.

Solution par MM. MEURICE. Si l'on considère sur la ligne fixe L deux point Q_1, Q_2, le lieu des centres des coniques K passant par les points P, Q, Q_1, Q_2 est d'après un théorème connu, une conique passant par les milieux des côtés et le points de concours des côtés opposés du quadrangle complet PQQ_1Q_2, et ayant pou centre le centre des moyennes distances des sommets. Faisant tendre les point Q_1, Q_2 vers Q, ce lieu des centres des coniques K devient une conique qui touche en Q, passe au milieu de PQ et a pour centre le point situé aux trois quart de PQ. Ce qui démontre le théorème de M. Césaro.

Si l'on prend pour axes la tangente et la normale menées en Q à la ligne fixe I l'équation générale des coniques qui osculent L en Q est $Ay^3 + Bxy + Cx^3 + y = 0$ C étant une constante. Il reste à exprimer que cette équation est verifiée par le coordonnées (p, q) de P, etc. (BROCARD, DÉPREZ, HACKEN).

×Question 653.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 172.)

Étant donné un triangle équilatéral ABC, ***si*** M, N, P ***sont les symétriques d'un point quelconque*** L ***par rapport aux trois côtés, démontrer que les droites*** AM, BN, CP ***se rencontrent en un même point.*** (E. HAIN.

Solution par MM. LAURENS, JEŘÁBEK. Soient A', B', C' les symétriques de A, B, C par rapport à BC, CA, AB. Les droites A'L, AM son symétriques par rapport à BC. Or, les symétriques des droites A'L, B'L C'L par rapport aux bissectrices A'A, B'B, C'C du triangle A'B'C' con courent en un même point L', et les droites AM, BN, CL sont respecti vement parallèles à A'L', B'L', C'L'; par conséquent, AM, BN, C passent par un même point L'', qui est, dans le triangle ABC, l'homo logue de L' considéré dans A'B'C'.

Solution par M. EMMERICH. Il est facile de voir que les trois triangle CMN, ANP, BPM sont isoscèles semblables; car $CL = CM = CN$, . et *angle* $NCM = 2ACB = 120°$, ... Donc en vertu d'un théorème d

M. Kiepert (Voir N. A. M., 1869, p. 42), les droites MA, NB, PC concourent en un même point L''.

Note historique. Le théorème de M. Kiepert est un cas particulier de la proposition suivante due à C. F. A. Jacobi (*De Triangulorum rectilineorum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis*, 1825) :

Dans un triangle quelconque ABC, *on mène les droites* BH *et* CH, CJ *et* AJ, AK *et* BK *telles que angle* JAC = KAB, *angle* KBA = HBC, *angle* HCB = JCA ; *les droites* AH, BJ, CK *concourent en un même point* D(*).

Solution par M. Decamps. Soit ABC un triangle quelconque, et soit A'B'C' le triangle qui a pour côtés les parallèles menées par A, B, C à BC, CA, AB. L étant un point quelconque du plan, et M', N', P' désignant les points de rencontre de A'L, B'L, C'L respectivement avec BC, CA, AB, les droites AM', BN', CP' concourent en un même point; car les rapports dans lesquelles elles partagent BC, CA, AB, sont égaux à ceux dans lesquels les droites concourantes A'L, B'L, C'L partagent C'B', A'C', B'A'.

Si l'on prend pour ABC un triangle équilatéral, on trouve la proposition de M. Hain.

Solution par MM. de Bőzóky, Choisis, Jeřábek *et* Déprez Soient α, β, γ les distances de L aux côtés de ABC. La distance de M à AB est égale à $\gamma + \mathrm{LM} \sin 60^\circ = \gamma + \alpha$. D'après cela, les coordonnées normales de M, N, P sont :

$$-\alpha, \quad \alpha+\beta, \quad \alpha+\gamma; \quad \beta+\alpha, \quad -\beta, \quad \beta+\gamma; \quad \gamma+\alpha, \quad \gamma+\beta, \quad -\gamma.$$

Les équations des droites AM, BN, CP sont donc

$$\frac{y}{z}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\gamma}, \quad \frac{z}{x}=\frac{\beta+\gamma}{\beta+\alpha}, \quad \frac{x}{y}=\frac{\gamma+\alpha}{\gamma+\beta};$$

on voit que ces lignes concourent en un point L'' dont les coordonnées sont inversement proportionnelles à

$$\beta+\gamma, \quad \gamma+\alpha, \quad \alpha+\beta.$$

Note. Lorsque L décrit une droite, L'' parcourt une conique circonscrite à ABC. Soient m, n, p les points d'intersection des hauteurs d'un triangle quelconque ABC avec la circonférence ABC; les droites mM, nN, pP concourent sur la circonférence ABC (théorème connu). (Jeřábek).

(*) Lorsque les triangles HBC, AJC, ABK sont semblables, les circonférences circonscrites passent également par D, et les angles BDC, CDA, ADC sont les suppléments de ceux du triangle HBC. Comparer *Mathesis*, t. VI, p. 211. (J. N.)

M. Déprez généralise la question 653 en ces termes : ABC *étant un triangle quelconque, et* M, N, P *étant les symétriques d'un point* L *par rapport aux côtés de* ABC, *quel est le lieu géométrique du point* L, *lorsque* AM, BN, CP *concourent en un même point* λ ? *Trouver également le lieu de* λ ?

Cette question a été traitée par M. E. Hain dans les *Archives de Grunert-Hoppe.* 1883, p. 44. Le point L décrit la cubique représentée par

$$(x + 2y\cos C)(y + 2z\cos A)(z + 2x\cos B) =$$
$$(y + 2x\cos C)(z + 2y\cos A)(x + 2z\cos B).$$

Cette courbe est *indéterminée*, lorsque $A = B = C = 60°$; elle se décompose en une droite et une conique lorsque le triangle ABC est isoscèle. Elle passe par les centres des cercles inscrit ou exinscrits à ABC, d'où ce joli théorème de géométrie : *Si* I *est le centre d'un cercle inscrit ou exinscrit à un triangle* ABC *et* L, M, N, *les symétriques de* I *par rapport aux côtés, les droites* AM, BN, CP *concourent en un même point.*

La cubique (L) se reproduit elle même par une inversion trilinéaire.

Le lieu de λ a pour équation.

$$\Sigma(1 - 4\cos^2 A)(y\cos B - z\cos C)x^2 = 0.$$

Nous avons proposé les lieux des points L, λ dans les *Wiskundige Opgaven*, Deel II, 1886, n° 198, sans connaître les recherches de M. Hain.

M. Denys et Bellens ont traité la question 653 par la géométrie analytique. M. Déprez traite la question pour la sphère. De plus, dans le plan, il observe que les droites AM, BN, CP sont concourantes, quel que soit le triangle ABC, si l'on détermine sur les coordonnées normales LM′, LN′, LP′ du point L, les points M, N, P, par les égalités

$$\frac{LM}{LM'} = \frac{\cos A}{\cos B\cos C}, \quad \frac{LN}{LN'} = \frac{\cos B}{\cos C\cos A}, \quad \frac{LP}{LP'} = \frac{\cos C}{\cos A\cos B}. \qquad \text{(J. N.)}$$

×Question 658.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 207.)

Pour que les équations

$$y^2 + z^2 - 2ayz = 0, \quad z^2 + x^2 - 2bxz = 0, \quad x^2 + y^2 - 2cxy = 0$$

soient compatibles, il faut et il suffit que l'on ait

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2abc = 1\ (*). \qquad \text{(J. Neuberg.)}$$

Solution par M. M. Brandza (***Bucharest***). Écrivons les équations proposées sous la forme

$$\frac{y}{z} + \frac{z}{y} = 2a, \quad \frac{z}{x} + \frac{x}{z} = 2q, \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2c. \qquad (1)$$

(*) Comme dans toutes les équations homogènes, on fait abstraction de la solution $x = y = z = 0$.

Pour éliminer les deux rapports $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, que l'on peut regarder comme étant les seules inconnues, faisons le produit des trois égalités précédentes; il vient

$$2+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{z^2}{x^2}+\frac{x^2}{z^2}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=8abc.$$

De ce résultat, retranchons la somme des équations (1) après les avoir élevées au carré; nous aurons

$$a^2+b^2+c^2-2abc=1. \qquad (2)$$

NOTE. L'égalité (2) est évidemment une *condition nécessaire*. C'est aussi une *condition suffisante*, pourvu que l'on s'entende sur la signification de ces mots. En effet, les deux premières des équations (1) donnent

$$\frac{y}{z}=a+\varepsilon\sqrt{a^2-1},\quad \frac{x}{z}=b+\varepsilon'\sqrt{b^2-1}, \qquad (3)$$

$\varepsilon, \varepsilon'$ ayant la valeur $+1$ ou -1. On tire de là

$$\frac{y}{x}=\frac{a+\varepsilon\sqrt{a^2-1}}{b+\varepsilon'\sqrt{b^2-1}}=(a+\varepsilon\sqrt{a^2-1})(b-\varepsilon'\sqrt{b^2-1}),$$

$$\frac{x}{y}=(a-\varepsilon\sqrt{a^2-1})(b+\varepsilon'\sqrt{b^2-1}),$$

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=2ab-2\varepsilon\varepsilon'\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}. \qquad (4)$$

De (2), on déduit

$$2c=2ab\pm 2\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}.$$

Ainsi, l'équation (4) se confond avec la troisième des équations (1), si, dans les valeurs (3), on prend convenablement les facteurs ε et ε'; par exemple, si

$$c=ab+\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)},$$

il faut supposer $\varepsilon\varepsilon'=-1$, c'est-à-dire

$$\frac{y}{z}=a\pm\sqrt{a^2-1},\quad \frac{x}{z}=b\mp\sqrt{b^2-1}.$$

MM. BROCARD et CRISTESCO trouvent une identité en remplaçant, dans (2), a, b, c par les valeurs (1). Autres solutions par MM. DENYS, LALISSE, VERNIDRY, DÉPREZ et P. DECAMPS. (J. N.)

QUESTIONS D'EXAMEN.

426. Dans un tétraèdre trirectangle, les carrés des arêtes du trièdre trirectang le sont proportionnels aux cotangentes des angles de la face opposée. (M. CANTOR.)

427. Soient

$$(2n)^5+(n+1)^5=a,\quad (2n)^5+(n-1)^5=b,$$
$$(2n^2)^5+(n^2+1)^5=c,\quad (2n^2)^5+(n^2-1)^5=d.$$

Vérifier les identités

$$\frac{(a+b)(c+d)}{c}=n^5+(2n)^5+(3n)^5,$$

$$\frac{(3n+1)c}{a}=\frac{(3n-1)d}{b}=(n^2+n)^5+(n^2-n)^5+(n^2-1)^5.$$

(DE ROCQUIGNY.)

428. Si n est un nombre entier quelconque, démontrer que le produit $n(n+2)(5n-1)(5n+1)$ est toujours divisible par 24.

QUESTIONS PROPOSÉES.

671. Trouver les racines de l'équation $X_{2p+1}=0$, les fonctions X_n étant définies par la formule

$$X_{n+2}=xX_n-X_{n-2}.$$

On suppose 1° $X_1=1$, $X_3=x-1$; 2° $X_1=1$, $X_3=x+1$. (V. JAMET.)

***672.** Étudier la variation de la fraction

$$\frac{x^2-2ax+3b}{x^2+ax-2b},$$

a et b ayant des valeurs réelles quelconques.

***673.** Soit H l'orthocentre du triangle ABC. On décrit les circonférences BCH, CAH, ABH, auxquelles on mène des tangentes communes. Etudier les propriétés des triangles formés par trois de ces tangentes. (H. BROCARD.)

Rectification. Dans la question d'examen 423, t. IX, p. 280, au lieu de *les projections de la direction d'un arête*, lire *les projections d'une arête en direction*.

SUR UNE QUESTION DE LIMITES;

par M. Ernest Cesàro.

M. W. Mantel, en résolvant dans le t. IX de *Mathesis* (p. 274) la question 294 que j'ai proposée dans le t. III (p. 248), a cru devoir en *rectifier l'énoncé*. Il est cependant facile de se convaincre que mon énoncé est exact, et que ce sont les calculs de M. Mantel qui ont besoin d'une correction. Qu'on admette, en effet, provisoirement, l'existence de la limite λ de l'expression

$$\lambda_n = \frac{n}{p-1} - \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^p + \left(\frac{n}{n+2}\right)^p + \left(\frac{n}{n+3}\right)^p + \cdots\right], \quad (1)$$

pour n croissant à l'infini. On sait, d'après Cauchy, que l'expression $n(\lambda_n - \lambda_{n+1})$ ne peut avoir d'autre limite que zéro, si λ_n admet une limite finie et déterminée. Or on a

$$n(\lambda_n - \lambda_{n+1}) = \frac{(n+1)^p - n^p - pn^{p-1}}{(p-1)n^{p-1}} - \frac{(n+1)^p - n^p}{n^{p-1}}\lambda_n,$$

d'où

$$lim\ n(\lambda_n - \lambda_{n+1}) = p\left(\tfrac{1}{2} - \lambda\right).$$

Donc la limite λ, si elle existe, doit nécessairement être égale à $\frac{1}{2}$.

C'est du reste $\lambda = \frac{1}{2}$ qu'on trouve lorsqu'on suit la méthode employée par M. Mantel. En effet, l'application de la formule

$$\frac{1}{m^p} = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty e^{-mx}x^{p-1}dx \quad (2)$$

à *tous* les termes de l'expression (1) donne

$$\lambda_n = \frac{n^p}{\Gamma(p)}\int_0^\infty \left(1 - \frac{x}{e^x - 1}\right)e^{-nx}x^{p-1}dx,$$

ou bien

$$\lambda_n = \frac{n^p}{\Gamma(p)}\int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{12} + \frac{x^3}{720} - \cdots\right)e^{-nx}x^{p-1}dx,$$

c'est-à-dire, en appliquant de nouveau la formule (2) à chaque terme du développement,

$$\lambda_n = \frac{1}{2} - \frac{p}{12n} + \frac{p(p+1)(p+2)}{720n^3} - \cdots \quad (3)$$

Donc, encore une fois, $\lambda = \frac{1}{2}$.

On parvient au même résultat par la *formule sommatoire de Mac-Laurin*. L'application de cette formule conduit, en effet, pour $p > 1$, à l'égalité *symbolique*

$$\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\frac{1}{(n+3)^p}+\cdots=\frac{1}{(p-1)(n+B)^{p-1}}.$$

Il en résulte, par substitution dans (1)

$$\lambda_n=\frac{n}{p-1}\left[1-\left(1+\frac{B}{n}\right)^{1-p}\right],$$

c'est-à-dire

$$\lambda_n=\frac{1}{2}-\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\frac{p(p+1)\ldots(p+2\nu-2)}{1.2.3\ldots 2\nu}\cdot\frac{B_{2\nu}}{n^{2\nu-1}};$$

c'est la formule (3).

Mais c'est une démonstration *élémentaire* que j'ai eu l'intention de demander aux lecteurs de *Mathesis* : c'est cette démonstration que je vais indiquer ici en quelques mots, sans sortir de la *théorie des limites*. Je rappelle d'abord que *si, pour n croissant à l'infini, a_n et b_n tendent vers zéro, et que b_n décroisse constamment, on a*

$$lim\frac{a_n}{b_n}=lim\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}, \qquad (4)$$

pourvu que le second membre existe. C'est là, en quelque sorte, la *règle de l'Hospital* pour les fonctions de variable entière. Pour la démontrer, soit ε un nombre positif, arbitrairement petit. Si λ est la valeur du second membre de (4), il existe une valeur de n, telle que les fractions

$$\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}},\quad \frac{a_{n+1}-a_{n+2}}{b_{n+1}-b_{n+2}},\quad \ldots,\quad \frac{a_{n+\nu-1}-a_{n+\nu}}{b_{n+\nu-1}-b_{n+\nu}},$$

diffèrent de λ moins que $\frac{1}{2}\varepsilon$, quelque grand que soit ν. Puisque les dénominateurs sont *positifs*, la fraction

$$\frac{(a_n-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_{n+2})+\cdots+(a_{n+\nu-1}-a_{n+\nu})}{(b_n-b_{n+1})+(b_{n+1}-b_{n+2})+\cdots+(b_{n+\nu-1}-b_{n+\nu})}$$

est comprise entre la plus grande et la plus petite des fractions considérées, d'où il suit que l'on a(*)

$$\left|\frac{a_n-a_{n+\nu}}{b_n-b_{n+\nu}}-\lambda\right|<\frac{1}{2}\varepsilon,$$

(*) Suivant l'usage, nous désignons la valeur absolue d'une quantité par cette quantité placée entre deux barres verticales.

quelque grand que soit n. La dernière fraction tend vers $\frac{a_n}{b_n}$ lorque, n restant fixe, ν croît à l'infini. Il en résulte qu'on peut toujours choisir ν de manière que l'on ait

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n - a_{n+\nu}}{b_n - b_{n+\nu}} \right| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

et, par suite,

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \lambda \right| < \varepsilon,$$

quelque grand que soit n. Donc $\frac{a_n}{b_n}$ tend vers λ lorsque n croît à l'infini. C'est ce qu'il fallait démontrer.

J'applique le théorème précédent à la recherche de la limite de l'expression (1). Il s'agit de démontrer que, p étant supérieur à l'unité, la limite λ *existe*, et que sa valeur est $\frac{1}{2}$. Il est clair que l'expression

$$n^{-p}\lambda_n = \frac{1}{(p-1)n^{p-1}} - \left[\frac{1}{(n+2)^p} + \frac{1}{(n+3)^p} + \cdots\right] \qquad (5)$$

tend vers zéro, puisque n^{p-1} croît sans limite avec n, tandis que la quantité entre parenthèses, *reste* d'une série convergente, tend vers zéro. Si nous prenons $a_n = n^{-p}\lambda_n$, nous pouvons prendre aussi $b_n = n^{-p}$, puisque n^{-p} tend vers zéro en décroissant. Nous aurons

$$\lambda = lim \frac{n^{-p}\lambda_n}{n^{-p}} = lim \frac{n^{-p}\lambda_n - (n+1)^{-p}\lambda_{n+1}}{n^{-p} - (n+1)^{-p}},$$

ou bien, en employant (5),

$$\lambda = lim \frac{\frac{1}{p-1}[n^{-p+1} - (n+1)^{-p+1}] - (n+1)^{-p}}{n^{-p} - (n+1)^{-p}};$$

puis

$$\lambda = lim \frac{\frac{1}{2} - \frac{p+1}{3n} + \cdots}{1 - \frac{p+1}{2n} + \cdots} = \frac{1}{2}.$$

CRELLE OU BROCARD?

I. M. O. SCHLÖMILCH(*) a fait paraître, sous ce titre, dans un recueil pédagogique allemand, un article dont voici un aperçu.

Crelle a publié, en 1816, à Berlin un écrit intitulé : « *Ueber einige Eigenschaften des ebenen geradlinigen Dreiecks* » contenant diverses recherches sur les points remarquables d'un triangle ABC. Il découvrit, entre autres, deux points O, O' tels que l'on ait

$$\theta = OAB = OBC = OCA ; \quad \theta = O'BA = O'CB = O'AC.$$

L'angle θ est donné par la relation

$$\cot\theta = \cot A + \cot B + \cot C.$$

Ces résultats furent généralisés par C. F. Jacobi(**).

« A cela se rattachent différentes recherches de Feuerbach, Wiegand, Hellwig, Emsmann, Clarke (1849), Brocard et beaucoup d'autres; enfin, une certaine Miss Scott proposa de nommer le point O, point de Brocard et l'angle θ, angle de Brocard. Si les Français ont admis ces désignations, il faut l'attribuer à leur vanité et à leur ignorance habituelle des publications allemandes. Mais qu'à une époque où l'on parle sans cesse de la renaissance du sentiment national, les Allemands laissent dans l'oubli Crelle, leur compatriote, qui a si bien mérité de la science, et se laissent guider par une Miss qui ne connaît qu'imparfaitement la question, c'est un scandale dont on devrait rougir. Quel cri d'indignation ne s'élèverait pas en France, si un Français osait baptiser une découverte incontestablement française, du nom d'un italien qui l'a retrouvée plus tard et cela, parce qu'une marraine espagnole le désire? »

L'auteur s'élève ensuite contre la désignation de *Géométrie brocardienne*, et il donne un procédé pour *fabriquer* des points remarquables dans le plan d'un triangle. Dans un autre article, il déclare qu'à son avis, cette désignation de *point remarquable*, n'a pas de raison d'être ; une propriété mathématique est une suite nécessaire de la nature des choses et ne peut avoir rien de surprenant pour celui qui en connaît la démonstration.

II. L'article de M. Schlömilch a provoqué une réponse de M. A. Morel dans la livraison de novembre 1889, du *Journal de Mathématiques élémentaires*. En voici le résumé :

1° Nous ne pouvons suivre M. Schlömilch sur le terrain personnel où il s'est placé.

2° M. Lemoine en 1885, M. de Longchamps en 1886, M. Vigarié en 1887, ont

---

(*) Auteur comme l'on sait, d'un excellent *Compendium der höheren Analysis*, d'autres bons manuels et d'un grand nombre de travaux relatifs à l'analyse mathématique.

(**) Ne pas confondre avec le grand géomètre C. G. J. Jacobi.

publié, sur la géométrie récente, des études et des notes bibliographiques très développées et très impartiales. S'ils n'ont pas cité le travail de Crelle, c'est qu'il était oublié de tout le monde, même en Allemagne. Aussitôt qu'il a été remis en lumière, il a été cité en France (antérieurement à l'article de M. Schlömilch).

3° Les désignations de *points*, *angle* et *cercle de Brocard* ne sont pas dues à Miss Scott, si injustement mise en cause par M. Schlömilch, mais à M. Neuberg, professeur à l'Université de Liége. Ces désignations ont d'ailleurs été adoptées, même en Allemagne, par des auteurs (Fuhrmann, Emmerich) qui connaissent le travail de Crelle. « Toutes ces expressions paraissent naturelles si l'on veut bien considérer que les points et l'angle dont il s'agit se rattachent étroitement au cercle dont la découverte est, sans contestation, la propriété de M. Brocard. »

4° Le terme de *Géométrie brocardienne* n'a été que très rarement employé, et il l'a été uniquement pour indiquer la nature des sujets traités.

5° Dans les *Généralités sur la géométrie du triangle*, M. de Longchamps a indiqué divers procédés, plus élégants que celui de M. Schlömilch, pour trouver des points remarquables (*).

6° Comme l'a dit récemment M. Emmerich, dans sa monographie *Der Brocardsche Winkel des Dreiecks* (Mülheim a. d. Ruhr, 1889), « les écrits de Crelle et de Jacobi, avec les travaux de Grunert, Wiegand, Emsmann et Hellwig qui s'y rattachent, constituent, par la foule des résultats qu'ils renferment, une première période de la géométrie récente, tandis que la période actuelle emprunte un attrait particulier aux cercles de Brocard et de Lemoine ». Ce sont les travaux de ces deux géomètres qui sont vraiment le point de départ des nombreuses recherches relatives à la géométrie du triangle publiées depuis 1873. « Si tout cela est vrai, n'est-il pas de toute justice de conserver les dénominations attribuées en France et à l'étranger aux éléments que ces travaux ont mis en lumière? »

7° Il serait difficile de changer maintenant un langage généralement adopté. C'est au début de la seconde période de la géométre récente que M. Schlömilch aurait dû nous avertir. Mais alors il ignorait peut-être, lui aussi, l'existence du mémoire de Crelle.

III. C'est en mars 1877, que M. Brocard a publié, dans la *Nouvelle correspondance mathématique* (t. III, p. 67), la célèbre relation :

$$\cot\theta = \cot A + \cot B + \cot C.$$

Mais en 1875 déjà, dans les N. A. M., il avait posé le problème de la détermination des points O et O', définis comme nous l'avons indiqué plus haut. Dès 1879, M. Neuberg avait signalé l'importance des nouveaux éléments du triangle introduits dans la géométrie élémentaire par MM. Lemoine et Brocard (N. C. M., t. V, pp. 446-448). A cette époque, le mémoire de Crelle était profondément

---

(*) Les points signalés, par M. Schlömilch ont été d'ailleurs étudiés, dans la géométrie récente, à propos de l'hyperbole de Kiepert, ou sous le nom de points inverses, points réciproques. C'est du vieux-neuf.

oublié, aussi bien en Allemagne qu'ailleurs. Notre collaborateur ayant sans cesse à parler des points O et O', les nomma, en 1881, points de Brocard (*Mathesis*, p. 175), comme il appela, en 1884, *point de Lemoine*, le point de rencontre des symédianes.

Il n'y a plus moyen de revenir sur ces dénominations, trop universellement employées pour qu'on puisse les changer utilement. D'ailleurs, le pût-on, il vaudrait mieux ne pas le faire. Crelle, dans sa longue carrière, a lui même oublié son mémoire de 1816 et a délaissé la géométrie. M. Brocard, au contraire, tout comme M. Lemoine, n'a cessé de travailler aux progrès de la géométrie récente, dans les rares loisirs que lui laissent ses labeurs professionnels. Il est juste que les noms de l'un et l'autre restent indissolublement unis à la terminologie de cette partie de la science, comme l'a proposé M. Neuberg. P. M.

SUR UN GROUPE DE TROIS PARABOLES;

par M. H. MANDART, professeur-agrégé.

Soient ABC en triangle quelconque; A', B', C' les milieux des côtés; I, I_a, I_b, I_c les centres des cercles tangents aux trois côtés.

Prenons sur

BA, CA, d'un même côté de BC,	les segments	BM	$=$ CN	$= \alpha$;
CB, AB,	»	CA,	»	$CM_1 = AN_1 = \beta$;
AC, BC,	»	AB,	»	$AM_2 = BN_2 = \gamma$.

Nous nous proposons d'étudier les propriétés des transversales MN, M_1N_1, M_2N_2, que nous désignons par d_a, d_b, d_c.

1. Soient P, P_1, P_2 les milieux de MN, M_1N_1, M_2N_2. Lorsque α, β, γ varient, ces points parcourent, respectivement, les bissectrices A'I', B'I', C'I' du triangle A'B'C'. En effet, si l'on construit, par exemple, les parallélogrammes BMPU, CNPV, on obtient deux triangles BA'U, CA'V, égaux entre eux, et un triangle isoscèle PUV, et l'on démontre facilement que A' est le milieu de UV; donc PA' est la bissectrice des deux angles UPV, B'A'C'.

Désignons par $\mu\nu$, $\mu_1\nu_1$, $\mu_2\nu_2$ les transversales d_a, d_b, d_c menées par I'. A cause de $I'\mu = \nu I'$, $I'\nu_2 = \mu_2 I'$, les lignes $\mu\nu_2$, $\mu_2\nu$ sont égales et parallèles; il en est de même des lignes $\mu_2\nu_1$ et $\nu_2\mu_1$, $\mu_1\nu$ et $\mu\nu_1$. Or

$$\frac{B\mu}{c} = \frac{\mu\nu_2}{b} = \frac{B\nu_2}{a};$$

d'où

$$\frac{C\nu}{c} = \frac{\mu_2\nu}{b} = \frac{A\mu_2}{a} = \frac{b}{2p},$$

$2p$ désignant $a+b+c$. Donc *les transversales* d_a, d_b, d_c *menées par* I' *déterminent sur un même côté de* ABC *trois segments proportionnels aux côtés de ce triangle*. Les points μ, ν,... sont les isotomiques des points de rencontre de BC, CA, AB, avec les parallèles à ces droites menées par I. Observons également que

$$B\mu = C\nu = \frac{bc}{2p} = \frac{r}{\sin A}, \quad C\mu_1 = A\nu_1 = \frac{r}{\sin B}, \quad A\mu_2 = B\nu_2 = \frac{r}{\sin C}.$$

Les droites $\mu\nu$, $\mu_1\nu_1$, $\mu_2\nu_2$, rencontrent les côtés BC, CA, AB en trois points situés sur la droite qui a pour équation, en coordonnées barycentriques,

$$\frac{a\lambda}{b+c} + \frac{b\mu}{c+a} + \frac{c\nu}{a+b} = 0.$$

Les six points μ, ν, μ_1, ν_1, μ_2, ν_2 appartiennent évidemment à une ellipse ayant pour centre I'; l'équation de cette courbe est

$$\Sigma \frac{a\lambda^2}{b+c} - \Sigma\left(1 + \frac{bc}{(a+c)(b+c)}\right)\mu\nu = 0.$$

L'hexagone $\mu\nu_2\mu_1\nu\mu_2\nu_1\mu$ est circonscriptible à une ellipse ayant pour centre I' et représentée par l'équation

$$\sqrt{a\lambda} + \sqrt{b\mu} + \sqrt{c\nu} = 0;$$

les points de contact des côtés de ABC avec cette courbe sont les isotomiques des pieds des bissectrices intérieures; les droites AI' et $\mu\nu$ sont des diamètres conjugués, car $\mu\nu$ est parallèle à la corde des contacts de l'angle BAC avec la courbe.

2. Les transversales d_a marquent sur AB, AC des ponctuelles égales; donc elles enveloppent une parabole P_a, touchant les supports AB, AC aux points m, n qui correspondent au point A considéré comme appartenant à la seconde ou à la première ponctuelle. Par conséquent, le point de contact m de AB s'obtient en prenant sur BA une longueur $Bm = CA$; on prend de même sur CA la longueur $Cn = BA$. On voit, par cette construction, que $Am = An$; donc mn est parallèle à la bissectrice AI de BAC. De plus, Am et An étant des tangentes égales, la bissectrice extérieure I_bI_c est l'axe de P_a; le sommet S_a est au milieu de la droite allant de A au milieu p de mn.

BC est également une tangente, elle correspond à $\alpha = 0$; ABC est donc un triangle circonscrit à P_a, et le foyer F_a de cette courbe est à la

rencontre de la circonférence ABC avec l'axe AS_a. La directrice est la parallèle menée par l'orthocentre H de ABC à la bissectrice AI.

La tangente au sommet S_a est la droite A'I'; car c'est la droite de Simson du foyer F_a, et A' est la projection de F_a sur BC.

Si l'on considère les trois paraboles P_a, P_b, P_c, on observe que leurs axes forment le triangle $I_aI_bI_c$; que leurs foyers sont aux milieux des côtés du triangle des axes; que le point de concours H des directrices, l'intersection ω des ordonnées menées par les foyers (ω est le centre du cercle $I_aI_bI_c$), l'intersection I' des tangentes aux sommets $S_aS_bS_c$ sont trois points en ligne droite et que I' est au milieu ωH. De même, les trois cordes de contact mn, m_1n_1, m_2n_2 des angles A, B, C avec les paraboles P_a, P_b, P_c concourent au symétrique de I par rapport à I'; car S_a est au milieu de Ap.

Pour trouver l'équation de P_a, prenons AB, AC pour axes. La droite MN est représentée par

$$\frac{x}{c-a}+\frac{y}{b-a}=1;$$

d'où l'on conclut facilement l'équation de son enveloppe :

$$(b+c-x-y)^2=4(bc-bx-cy). \qquad (1)$$

On vérifiera, au moyen d'un calcul facile, que les côtés AB, AC touchent la parabole aux points m, n. De plus, la droite BC ($bc-bx-cy=0$) a son point de contact Q sur la droite représentée par $x+y=b+c$; celle-ci s'obtient en prenant sur AB, AC des longueurs $Am'=An'=b+c$, et en joignant les points m', n'. Le point Q est le symétrique, par rapport au milieu de BC, du point de rencontre de BC avec I_bI_c.

Soient X, Y, Z les distances aux côtés BC, CA, AB, du point dont les coordonnées par rapport aux axes AB, AC sont x, y; comme

$$x=\frac{Y}{\sin A},\quad y=\frac{Z}{\sin A},\quad \frac{aX+bY+cZ}{2S}=1,$$

l'équation (1) se transforme en celle-ci

$$a^2(b-c)^2X^2+b^4Y^2+c^4Z^2+2ab^2(b-c)XY-2ac^2(b-c)XZ+2b^2c^2YZ=0.$$

En coordonnées barycentriques (λ, μ, ν), on a plus simplement

$$(b-c)^2\lambda^2+b^2\mu^2+c^2\nu^2+2b(b-c)\lambda\mu-2c(b-c)\lambda\nu+2bc\mu\nu=0.$$

Les coordonnées du point de rencontre des droites joignant A, B, C aux points de contact de P_a avec les côtés opposés du triangle ABC sont

$$\left(\frac{1}{b-c}, -\frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right).$$

Les points de contact de P_a avec BC, de P_b avec CA, de P_c avec AB sont situés sur la droite $a\lambda + b\mu + c\nu = 0$, transversale réciproque de celle qui passe par les pieds des bissectrices extérieures de ABC.

Le paramètre de P_a se déduit immédiatement du triangle Amp, dans lequel mp et $\frac{1}{2}Ap$ sont l'ordonnée et l'abscisse d'un point m par rapport à l'axe AF_a et au sommet S_a; il a donc pour valeur

$$\frac{2(b-c)\cos^2\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}A}.$$

3. Appelons d'_a une droite MN qui détermine sur AB, AC des segments égaux BM, CN situés de part et d'autre de BC.

Les milieux des transversales d'_a se trouvent sur la bissectrice extérieure $I'_bI'_c$ du triangle A'B'C'.

Les droites d'_a enveloppent une parabole P'_a, qui touche AB, AC aux points m', n' distants de A de la quantité $b+c$; cette courbe touche BC au point Q', symétrique, par rapport au milieu de BC, du point de rencontre de BC avec AI; AI est l'axe de P'_a; le foyer F'_a est l'intersection de AI avec la circonférence ABC.

Il existe deux autres paraboles P'_b, P'_c inscrites à ABC et ayant pour axes BI, CI; elles sont les enveloppes des transversales d'_b, d'_c déterminant sur CB et AB, ou sur AC et BC à partir de AC ou AB des segments égaux qui sont situés de part et d'autre de AC ou de AB.

Les axes de P'_a, P'_b, P'_c sont les hauteurs du triangle des axes de P_a, P_b, P_c. Les cordes de contact des angles A, B, C avec les paraboles correspondantes de l'un des groupes sont les diamètres des courbes de l'autre groupe menés par les points de contact des côtés BC, CA, AB; autrement dit, les points de contact de P_a avec AB, BC et celui de P'_a avec BC sont en ligne droite, etc.

CORRESPONDANCE.

La formule d'Ozanam est due à W. Snell

(Extrait d'une lettre de M. Le Paige à M. Mansion.)

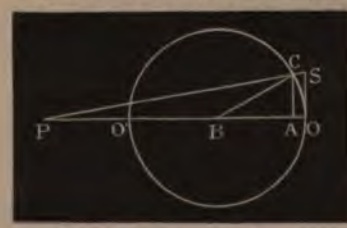
Vous avez, à diverses reprises, appelé l'attention sur une formule attribuée à Ozanam, formule qui permet, dans une certaine mesure, de se passer des tables trigonométriques.

Vous conviendrait-il d'y revenir encore et voudrez-vous bien que je la restitue à son véritable auteur?

Je n'ai pu, jusqu'à ce jour, rencontrer l'ouvrage dans lequel Ozanam a fait connaître le procédé empirique qu'il emploie, de façon qu'il m'est impossible de savoir jusqu'à quel point il s'attribue l'honneur de cette découverte; ce qui est certain, c'est qu'il faut lui enlever cet honneur pour le rendre à un géomètre plus illustre que lui, le célèbre Willebrord Snell van Royen, plus connu sous le nom de Snellius.

Dans l'appendice à son *Cyclometricus*, publié en 1621(*), Snellius se propose, p. 95, le problème suivant — je traduis librement :

Étant donnés les côtés d'un triangle rectangle, en trouver les angles.



« Soit BAC le triangle donné, dont les côtés sont a, b, c, les angles $\frac{1}{2}\pi$, β, γ. Du centre B décrivons le cercle de rayon BC. Prolongeons BA de part et d'autre jusqu'à sa rencontre avec la circonférence en O, O'; puis prenons $O'P = O'B = BC$, du côté opposé à A. La droite PC coupe la tangente, menée par O, en un point S.

La partie OS est sensiblement égale à l'arc OC. Or, on a

$$\frac{OS}{AC} = \frac{OP}{AP}.$$

Calculons OS et réduisons-le en degrés, nous aurons l'angle aigu B. »

De la relation précédente, on conclut aisément

$$OS = 3BC.\frac{b}{2a+c},$$

(*) Cyclometricus, De circuli dimensione secundum Logistarum abacos, et ad Mechanicem accuratissima; atque omnium parabilissima. *Lugduni Batavorum*, Ex officinâ Elzeviriana, Anno CIↃ IↃ CXXI.

et si l'on réduit BC en degrés, en écrivant

$$(BC)^\circ = \frac{360^\circ}{2\pi},$$

on trouve, pour le nombre de degrés de l'angle β,

$$\beta^\circ = \frac{3.360}{2\pi} \cdot \frac{b}{2a+c} = 171{,}9\,\frac{b}{2a+c}.$$

Snellius n'arrive pas à ce résultat, parce que l'idée d'exprimer par une formule générale un pareil théorème ne pouvait guère se présenter à un géomètre de l'époque.

Après avoir calculé OS par la relation indiquée, il se sert d'une table qui donne les degrés, minutes et secondes en parties du rayon.

Nous avons bien ici l'origine du théorème d'Ozanam, et il n'est pas nécessaire d'en chercher une plus lointaine.

D'ailleurs, un contemporain de Snellius lui attribue expressément l'invention de ce théorème : ce contemporain n'est autre que le célèbre Albert Girard.

Voici, en effet, ce que nous lisons dans un petit livret devenu bien rare aujourd'hui, ses *Tables des Sinus*, publiées en 1626(*).

Après avoir donné la table des arcs (degrés, minutes, secondes), le *raid* (rayon) étant 10.000.000.000, Albert Girard ajoute : « L'usage de ces Tables est fort frequent, aussi elles sont propres à practiquer ce tres-beau Probleme de l'Invention du susmentionné mathematicien, Monsieur W. Snellius, descrit en l'appendice de sa Cyclometrie, problème 5, et icy reduit selon nostre stile, qui est pour trouver les angles d'un triangle rectangle, les costez donnèz, sans se servir des tables de Sinus.

« Lequel est tel. Soit H hypotenuse, B base, et P perpend. pour le moindre costé, lequel n'estant environ plus de la moitié de B, on pourra cognoistre l'angle iusques à $\frac{1}{4}$ minute, car tant plus petit est P, à raison de B tant plus precisément se trouvera l'angle, donc soit R le raid de 10000000 ou davantage, alors $\frac{3PR}{2H+B}$ sera la mesure de l'angle oppo-

(*) Tables des sinus, tangentes et secantes avec un traicté succinct de la Trigonometrie tant des triangles plans que sphericques, par Albert Girard Samielois. *La Haye, chez Jakob Elzevir*, l'an M. D. CXXVI.

Dans la citation précédente, j'ai conservé l'orthographe de Girard, mais remplacé ses notations par les notations modernes.

site a P, lequel se deffinira par cette table susdite. Or, par cette invention on peut cognoistre un angle jusques à secondes, tierces, et quartes, voire davantage si l'on veut, ce qui ne se peut faire par les tables des sinus communes.

$$\frac{3PR}{2H+B} \text{ trop peu } \frac{(2B+H)PR}{3BH} \text{ est trop,}$$

le moyen est $\frac{(7HB+H^2+B^2)PR}{3BH(2H+B)}$, toutesfois c'est encore trop(*). »

Enfin on peut ajouter, — car il faut rattacher au théorème de Snell le nom d'un troisième illustre géomètre, — que le grand Huygens, dans son *De circuli magnitudine inventa*, publié en 1654 (**), a démontré rigoureusement que le segment de tangente OS est inférieur à l'arc OC. Il rappelle, à cette occasion, l'usage spécial que Snell a fait de cette propriété.

Telles sont, mon cher Collègue, les quelques indications historiques et bibliographiques que je suis en état de vous donner; je pense que vous désirerez, comme moi, rendre à Snellius ce que lui appartient incontestablement.

BIBLIOGRAPHIE.

Trigonométrie rectiligne suivie des principes de la nouvelle Géométrie du Triangle à l'usage des candidats aux Baccalauréats ès Sciences et aux Écoles du gouvernement, par G. LALBALETTRIER. Paris, Croville-Morant, 1889 (Un vol. autographié de IV-196 pages in-8°). Prix : 2 fr. 50.

Le petit volume dont nous venons de transcrire le titre, est divisé en deux parties d'inégale étendue renfermant, l'une la trigonométrie rectiligne (106 pages), l'autre les éléments de la géométrie récente (76 pages).

Le cours de trigonométrie rectiligne de M. Lalbalettrier est un exposé très bien fait de cette partie des mathématiques élémentaires. Toutes les questions considérées aujourd'hui comme devant faire partie de l'enseignement, y sont traitées d'une façon claire et méthodique, dans l'ordre suivant: 1. Définition des lignes trigonométriques; principe des projections. 2. Formules fondamentales et conséquences immédiates. 3. Formules logarithmiques, angles auxiliaires, équations trigonométriques ($a\cos x + b\sin x = c$, etc.); expressions $\frac{0}{0}$. 4. Construction des tables. 5. Résolution des triangles. 6. Equivalence des systèmes. 7. Applications

---

(*) Girard, par erreur, met 5HB, au lieu de 7HB.

(**) Christiani Hugenii, Const. F. de Circuli magnitudine inventa, etc. *Lugduni Batavorum*, apud Joh. et Dan. Elzevier. CIↃ. IↃC. LIV, pag. 30-31. Dans les Opera varia, Éd. de 1724, p. 378.

diverses (distance au point inaccessible, ou invisible, distance de deux points inaccessibles; rayon de la tour; etc.). 8. Recueil de 189 exercices distribués en sept paragraphes correspondant aux sept chapitres. Ce recueil reproduit un grand nombre de questions posées en France à différents examens (baccalauréat, S. Cyr, etc.) et rendra de grands services aux élèves.

La seconde partie renferme la *Géométrie analytique du triangle*, avec applications à la géométrie récente. Elle est divisée en 4 chapitres : 1. Préliminaires. 2. Étude du point. 3. Étude de la droite. 4. Étude du cercle; à la fin de l'ouvrage (pp. 186-192), on trouve 76 exercices se rapportant à cette partie.

Dans les préliminaires, l'auteur établit une formule importante, relative à une *transversale angulaire* (droite menée par un sommet du triangle de référence ABC); il démontre les propriétés principales de la ponctuelle harmomique et du faisceau harmonique, et définit les points isotomiques et les droites isogonales.

Dans le chapitre II, il cherche les coordonnées barycentriques des points remarquables du triangle (centres du cercle circonscrit et des cercles tangents, centre de gravité, orthocentre, point de Lemoine, points de Brocard, point de Gergonne); il définit et construit les points réciproques d'ordre quelconque, les points inverses, les points associés, et les potentiels d'ordre p; enfin, il cherche la distance de deux points donnés par leurs coordonnées barycentriques.

Le chapitre III donne l'équation de la droite *harmoniquement associée* à un point donné (λ, μ, ν), celle de la droite de l'infini, celles de deux transversales réciproques, celles de la droite de Lemoine et de la droite de Longchamps; il contient aussi les formules relatives aux angles d'une droite avec les côtés du triangle de référence et à l'angle de deux droites.

Enfin, dans le chapitre IV, nous rencontrons la théorie du cercle en coordonnées barycentriques (équation générale d'un cercle, axe radical, centre radical, tangente et polaire), et les équations de cercles remarquables (cercle circonscrit, cercles tangents, cercle des neuf points, cercle conjugué, cercle de Longchamps).

Cette courte analyse montre le but que s'est proposé l'auteur et que nous avons déjà caractérisé ci-dessus. Son livre ne fait pas double emploi avec la monographie de Casey (*Mathesis*, 1889) sur la géométrie récente, mais il la complète en développant les premières notions sur les coordonnées trilinéaires et en appliquant celles-ci à la géométrie récente. L'élève y trouve à la fois une bonne initiation à la géométrie analytique et à la géométrie récente.

Sur les surfaces admettant les plans de symétrie du tétraèdre régulier et du cube, par M. Ernest Lebon, professeur de mathématiques au Lycée Charlemagne. — Brochure extraite du *Journal de mathématiques spéciales*. (Paris, Delagrave, 1889, 48, p. in-8°.) Prix : 1 fr.

Ce Mémoire a pour origine la question que l'Académie des Sciences de Paris avait proposée au *Concours pour le grand prix des sciences mathématiques*, en 1886 :

Étudier les surfaces qui admettent tous les plans de symétrie de l'un des polyèdres réguliers.

M. Lebon s'est occupé particulièrement, dans le Mémoire en question, des surfaces qui se rattachent au tétraèdre régulier et au cube, et dont le degré est aussi petit que possible. Il les nomme SURFACES TÉTRAÉDRIQUES et SURFACES HEXAÉDRIQUES, et il trouve, pour leurs équations respectives :

$$2xyz + b(x^2 + y^2 + z^2) + a = 0,$$
$$2d(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2) + c(x^4 + y^4 + z^4) + 2b(x^2 + y^2 + z^2) + a = 0.$$

Ces équations servent de base à l'étude très intéressante que M. Lebon a faite des deux familles de surfaces qui leur correspondent.

Les derniers paragraphes sont consacrés à l'examen de certaines surfaces hexaédriques particulières passant par des arêtes du cube ou de l'octaèdre régulier, surfaces auxquelles l'auteur donne le nom de CUBOÏDE et d'OCTAÉDROÏDE.

Il n'est pas douteux que ces surfaces remarquables ne donnent lieu à de plus amples recherches, et leur étude, plus profondément creusée, mettra certainement en évidence des propriétés que l'analyse élémentaire ne permet pas de dégager. Le brochure de M. Lebon intéressera donc tous ceux qui cherchent des faits nouveaux dans cette partie si difficile de la géométrie qui correspond à l'étude des surfaces d'ordre supérieur.

G. DE LONGCHAMPS.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Questions 119 et 120.

(Voir *Mathesis*, t. II, p. 71.)

119. *Trouver la valeur de l'intégrale*

$$I = \int \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x + 2} \frac{dx}{\sqrt{(x^4 - 1)}}. \qquad \text{(S. REALIS.)}$$

Solution par M. W. MANTEL (*Delft*). La méthode ordinaire conduit à décomposer l'intégrale en une fonction paire et une fonction impaire, savoir :

$$\int \frac{3x^3 + x}{x^4 + 3x^2 + 4} \frac{dx}{\sqrt{(x^4 - 1)}} + \int \frac{2x^4 + 4x^2 - 2}{x^4 + 3x^2 + 4} \frac{dx}{\sqrt{(x^4 - 1)}}.$$

Le premier terme a pour valeur $\frac{1}{2} \arccos \frac{3x^2 + 5}{x^4 + 3x^2 + 4}$. Le second terme se décompose en deux intégrales elliptiques de la 3me espèce, et une de la première. Cependant on peut se demander si ces intégrales ne se réduisent pas aux fonctions élémentaires de x.

(*) Nous avons reçu, trop tard pour les mentionner dans la précédente livraison, des bonnes solutions des questions 636, 653 par M. LALISSE, 653 par M. REYENS.

L'intégrale proposée peut s'écrire

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x+2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Il semble naturel d'essayer la substitution $\frac{x-1}{x+1}=z^2$; celle-ci conduit à

$$\sqrt{2}\int \frac{3z^2+1}{2z^4-z^2+1}\,\frac{dz}{\sqrt{(z^4+1)}}.$$

Comme il paraît difficile d'imaginer une fonction *algébrique* dont la différentielle ait cette forme, cherchons un logarithme, ou un arc de cercle, ce qui, au fond, est la même chose. Posons

$$u=\arcsin\frac{Az^3+Bz}{2z^4-z^2+1}.$$

Le dénominateur est indiqué par la forme de l'intégrale cherchée; la fonction doit d'ailleurs être impaire. On trouve

$$\frac{du}{dz}=\frac{f(z)}{\sqrt{[(2z^4-z^2+1)^2-(Az^3+Bz)^2]}}.$$

L'irrationnelle doit se réduire à $\sqrt{(z^4+1)}$; on satisfait à cette condition en faisant $A=0$, $B=\sqrt{2}$; alors on a

$$\frac{du}{dz}=\frac{-\sqrt{2}.(3z^2+1)}{(2z^4-z^2+1)\sqrt{(z^4+1)}}.$$

Finalement, l'intégrale proposée a pour valeur :

$$\arcsin\frac{z\sqrt{2}}{2z^4-z^2+1}=\arcsin\frac{(x+1)\sqrt{2(x^2-1)}}{2(x^2-x+2)}.$$

120. *Déterminer la constante* A *de manière que l'intégrale*

$$\int \frac{x^2(x^2+A)}{2x^4-Ax^2-A^2}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

s'exprime par des fonctions élémentaires. (S. Realis.)

La méthode employée dans la question précédente conduit à prendre $A=\sqrt{3}$ et l'on trouve pour la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt[4]{108}}\arctan\frac{3\sqrt{1-x^4}}{x^3\sqrt[4]{12}}.$$ (S. Realis.)

REMARQUE. Dans la question 119, Realis trouve

$$I = 2 \operatorname{arc\,tang} \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^4-1}} + \int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}.$$

L'intégrale qui figure au second membre s'exprime aisément par un arc de cercle, si l'on fait $x^2 = t^{-1}$.

Question 160 et 162(*).

(Voir *Mathesis*, t. II, p. 159.)

160. *Démontrer que l'égalité*

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{p}{q}(k+q)-1}\,dx}{(1+x^p)^{k+1}} = \int_0^1 \frac{x^{\frac{q}{p}(k+q)-1}\,dx}{(1+x^q)^{k+1}}$$

ne subsiste que si $p = q$.

162. *Démontrer que l'on a*

$$\int_0^1 \frac{x^{(\alpha+1)(2\alpha-1)}}{(1+x^\alpha)^{2m+1}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{(\beta+1)(2\beta-1)}}{(1+x^\beta)^{2m+1}}\,dx, \quad (m = \alpha\beta),$$

seulement dans le cas où $\alpha = \beta$.

La seconde question est un cas particulier de la première, dans le cas où $p = \alpha$, $q = \beta$, $k = 2pq$. Il suffira donc de traiter la première. Si l'on fait $x^p = t$, dans la première intégrale, et $x^q = t$, dans la seconde, l'égalité à vérifier peut s'écrire successivement

$$\frac{1}{p}\int_0^1 \frac{t^{\frac{k}{q}}\,dt}{(1+t)^{k+1}} = \frac{1}{q}\int_0^1 \frac{t^{\frac{k}{p}}\,dt}{(1+t)^{k+1}}, \quad \int_0^1 \frac{qt^{\frac{k}{q}}\,dt}{(1+t)^{k+1}} = \int_0^1 \frac{pt^{\frac{k}{p}}\,dt}{(1+t)^{k+1}}.$$

Considérons l'intégrale

$$\varphi(x) = \int_0^1 \frac{xt^{\frac{k}{x}}\,dt}{(1+t)^{k+1}}.$$

(*) Énoncés corrigés, d'après une remarque de M. W. MANTEL. Nous avons égaré les vrais énoncés de ces questions : ils diffèrent à la fois de ceux que nous publions aujourd'hui et de ceux qui ont été proposés dans le tome deuxième de *Mathesis*.

On a

$$\varphi'(x) = \int_0^1 \frac{\frac{k}{t^x}\,dt}{(1+t)^{k+1}} + \int_0^1 \frac{\frac{k}{t^x}\left(-\frac{k}{x}lt\right)dt}{(1+t)^{k+1}}.$$

Les deux intégrales qui composent $\varphi'(x)$ sont toutes deux positives. La fonction $\varphi(x)$ est donc croissante avec x; par suite, les deux intégrales données ne sont égales que si $p = q$. (P. M.)

×Question 610.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 104.)

Étant donnés dans un même plan deux triangles directement semblables $A_1A_2A_3$. $P_1P_2P_3$ ***et une droite*** MN ***de longueur et de position quelconques, si l'on construit les triangles*** $A_2B_1A_3$, $A_3B_2A_1$, $A_1B_3A_2$ ***directement semblables à*** MP_1N, MP_2N, MP_3N, ***les triangles*** $B_1B_2B_3$, $A_1A_2A_3$ ***ont même centre de gravité.*** (H. Van Aubel.)

Solution par M. P. H. Schoute. Sans nuire à la généralité, nous pouvons supposer le triangle $A_1A_2A_3$ confondu avec $P_1P_2P_3$. Nous construisons donc les triangles $P_2B_1P_3$, $P_3B_2P_1$, $P_1B_3P_2$ directement semblables à MP_1N, MP_2N, MP_3N, et nous allons démontrer que les triangles $B_1B_2B_3$, $P_1P_2P_3$ ont même centre de gravité G.

On peut écrire, dans le calcul des équipollences :

$$MB_1 = MP_2 + P_2B_1, \quad \frac{P_2B_1}{MP_1} = \frac{P_2P_3}{MN},$$

d'où

$$MB_1 = MP_2 + \frac{MP_1 . P_2P_3}{MN} = MP_2 + \frac{MP_1\,(MP_3 - MP_2)}{MN}.$$

De même,

$$MB_2 = MP_3 + \frac{MP_2(MP_1 - MP_3)}{MN}, \quad MB_3 = MP_1 + \frac{MP_3(MP_2 - MP_1)}{MN}.$$

La somme des trois égalités donne

$$MB_1 + MB_2 + MB_3 = MP_2 + MP_3 + MP_1,$$

ce qui démontre le théorème.

Question 613.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 128, et *Mélanges mathématiques*, t. III. p. 152.)

Trois circonférences ω, ω′, ω″ *ont une corde commune* AB. *Démontrer qu'il existe une infinité d'hexagones* CC′C″, DD′D″ *dont les sommets opposés* C *et* D, C′ *et* D′, C″ *et* D″ *sont situés respectivement, sur les circonférences* ω, ω′, ω″ *et dont les côtés passent alternativement par* A *et* B.

Transformer la proposition par projection centrale, par polaires réciproques et par inversion. (E. Catalan.)

Solution par M. Schoute. Donnons-nous arbitrairement le point C sur ω, puis menons les droites CA qui coupe ω′ en C′, C′B qui coupe ω″ en C″, C″A qui coupe ω en D, DB qui coupe ω′ en D′, D′A qui coupe ω″ en D″ : il faut prouver que les points C, B, D″ sont en ligne droite, ou que les angles CBD, D″BD′ sont égaux. Or, l'angle

$$\mathrm{CBD} = \mathrm{CAD} = \mathrm{AC'B} - \mathrm{AC''B} = \mathrm{BD'A} - \mathrm{BD''A} = \mathrm{D''BD'};$$

donc le théorème est démontré.

La projection centrale donne un théorème analogue pour trois coniques ω, ω′, ω″ ayant quatre points communs A, B, A′, B′. Par une transformation par polaires réciproques, on obtient la proposition suivante : *Trois coniques* ω, ω′, ω″ *étant inscrites à un même quadrilatère aba′b′, il y a une infinité d'hexagones cc′c″dd′d″, dont les côtés opposés c et d, c′ et d′, c″ et d″ touchent respectivement les coniques* ω, ω′, ω″ *et dont les sommets se trouvent alternativement sur les droites a et b.*

En transformant le théorème de M. Catalan par inversion (le pôle étant quelconque), et ensuite le nouveau théorème par projection centrale, on trouve la propriété suivante :

On donne trois coniques ω, ω′, ω″ *ayant quatre points communs* A, B, A′, B′; *soient* O *un point quelconque de leur plan,* C *un point quelconque de* ω. *On construit les coniques* OA′B′AC *coupant* ω′ *en* C′, OA′B′BC′ *coupant* ω″ *en* C″, OA′B′AC″ *coupant* ω *en* D, OA′B′BD *coupant* ω *en* D′, *enfin* OA′B′AD′ *coupant* ω *en* D″ : *les six points* O, A′, B′, B, D″, C *sont sur une même conique.*

×Question 627.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 280.)

Les n premiers nombres sont dans une urne. On en tire au hasard trois. Quelle est la probabilité que l'un des nombres extraits est égal à la somme des deux autres ou égal à leur demi-somme. (DE ROCQUIGNY.)

Solution par MM. BELLENS, DENYS et MEURICE. 1° Soient a, b, c $(a < b < c)$ trois nombres formant un extrait favorable, de sorte que $a + b = c$.

Supposons d'abord n pair. Les valeurs possibles de a sont

$$1, 2, \ldots, \frac{n}{2} - 1;$$

les valeurs correspondantes de b forment, respectivement, les séries

$$(2, 3, \ldots, n-1), \quad (3, \ldots, n-2), \quad \ldots, \quad \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\right)$$

comprenant

$$n-2, \quad n-4, \quad \ldots, \quad 4, 2,$$

termes. Donc le nombre des chances favorables est

$$(n-2) + (n-4) + \cdots + 4 + 2 = \frac{n(n-2)}{4};$$

le nombre total des chances étant $C_{n,3}$, la probabilité cherchée est

$$P = \frac{\frac{1}{4} n (n-2)}{\frac{1}{6} n (n-1)(n-2)} = \frac{3}{2(n-1)}.$$

Si n est impair, les valeurs possibles de a sont $1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$; les valeurs correspondant de b sont

$$(2, 3, \ldots, n-1), \quad (3, \ldots, n-2), \quad \ldots, \quad \left(\frac{n+1}{2}\right),$$

de sorte que le nombre des chances favorables est

$$(n-2) + (n-4) + \cdots + 3 + 1 = \frac{(n-1)^2}{4};$$

d'où

$$P = \frac{3(n-1)}{2n(n-2)}.$$

2° Si l'on doit avoir $a + b = 2c$, on peut adopter pour a et b deux

nombres quelconques de la suite 1, 2, ..., n, pourvu qu'ils soient de même parité.

Si n est pair, la suite 1, 2, ..., n comprend $\frac{n}{2}$ nombres impairs et $\frac{n}{2}$ nombres pairs; d'où

$$P = 2C_{\frac{1}{2}n,2} : C_{n,3} = \frac{3}{2(n-1)}.$$

Si n est impair, la suite 1, 2, ..., n comprend $\frac{1}{2}(n+1)$ nombres impairs et $\frac{1}{2}(n-1)$ nombres pairs; on en conclut

$$P = (C_{\frac{1}{2}(n+1),2} + C_{\frac{1}{2}(n-1),2}) : C_{n,3} = \frac{3(n-1)}{2n(n-2)}.$$

×Question 664.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 240.)

Résoudre le système

$$x^2(y-z) = a, \quad y^2(z-x) = b, \quad z^2(x-y) = c. \tag{1}$$

Cette question a été traitée par MM. Beyens, Brocard, Decamps, Denys, Deprez, Lalisse, Molenbroeck, Russo et Verniory. Nous allons résumer les différentes solutions.

Du système (1), on tire

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0, \quad \frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2} + \frac{c}{z^2} = 0; \tag{2}$$

en éliminant tour à tour x, y, z entre les équations (2), on trouve

$$\begin{aligned} cy^2(c+a) + 2bcyx + bz^2(a+b) &= 0, \\ az^2(a+b) + 2acxz + cx^2(b+c) &= 0, \\ bx^2(b+c) + 2abxy + ay^2(a+c) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Les deux dernières égalités donnant

$$\frac{z}{x} = \frac{-ac+R}{a(a+b)}, \quad \frac{y}{x} = \frac{-ab-R}{a(a+c)}, \tag{4}$$

R désignant $\pm\sqrt{-abc(a+b+c)}$. Ce radical a des signes contraires dans les formules (4); car de celles-ci, on déduit

$$\frac{x}{z} = \frac{-ac-R}{c(b+c)}, \quad \frac{x}{y} = \frac{-ab+R}{b(b+c)},$$

d'où des valeurs de $\frac{c}{z}$, $\frac{b}{y}$ qui vérifient la première équation (2).

Si l'on élimine y, z entre (4) et $x^2(y-z)=a$, on trouve

$$x^3=\frac{a^2(a-b)(a+c)}{a(c-b)(a+b+c)-\mathrm{R}(2a+b+c)}$$
$$=\frac{a[a(c-b)(a+b+c)+\mathrm{R}(2a+b+c)]}{(b+c)^2(a+b+c)}.$$

(Beyens, Brocard, Molenbroek, Russo, Déprez.)

En additionnant les deux premières équations (1), on obtient

$$(x-y)(xy-zx-zy)=a+b.$$

Combinons ce résultat avec la 3e équation, il vient

$$xy-zx-zy=\frac{a+b}{c}z^2.$$

On a trois équations analogues à la précédente; si on les ajoute deux à deux, on trouve les égalités (3). La solution s'achève comme ci-dessus.

(Denys, Decamps.)

Le système (1) donne

$$\Sigma x^2(y-z)=a+b+c, \quad \text{ou} \quad (y-z)(z-x)(x-y)=-(a+b+c),$$
$$x^2y^2z^2(y-z)(z-x)(x-y)=abc;$$

d'où

$$xyz=r, \quad \text{si} \quad r\equiv\pm\sqrt{\frac{-abc}{a+b+c}}.$$

Si l'on ajoute les deux premières équations (1), multipliées respectivement par y et z, on obtient

$$ay+bx=-xyz(x-y)=-r(x-y);$$

d'où l'on conclut

$$(b+r)x=(r-a)y. \tag{5}$$

On obtient de la même manière

$$(c+r)x=(r-a)z. \tag{6}$$

En multipliant, membre à membre les équations (5) et (6), on trouve

$$x=\sqrt[3]{\frac{r(r-a)^2}{(r+b)(r+c)}}. \quad \text{(Verniory, Lalisse.)}$$

×Question 666.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 264.)

Par un point fixe P ***de l'axe focal d'une ellipse ou d'une hyperbole, on mène une sécante quelconque rencontrant la courbe en*** M, M'. ***Démontrer qu'il existe une constante r telle que le produit*** (FM + *r*) (FM' + *r*) ***ait une valeur constante,*** F ***étant l'un des foyers.*** (STEINER.)

Cette question a été traitée par MM. CHOISIS, DENYS, DEPREZ, DECAMPS et VERNIORY. Voici, avec une simplification, les solutions que nous ont adressées ces honorables correspondants.

Les abscisses des points de rencontre de l'ellipse avec une sécante menée par un point P (p, o) de l'axe focal sont racines de l'équation

$$a^2m^2(x-p)^2+b^2x^2=a^2b^2. \tag{1}$$

Posons

$$\rho=a-\frac{cx}{a}+r \tag{2}$$

et éliminons x entre (1) et (2); les solutions de la nouvelle équation sont les valeurs de FM + r, FM' + r. Le produit de deux valeurs de ρ est

$$\frac{m^2(a^2+ar-cp)^2+b^2(a+r)^2-b^2c^2}{a^2m^2+b^2};$$

pour qu'il soit indépendant de m, il faut poser

$$\frac{(a^2+ar-cp)^2}{a^2}=(a+r)^2-c^2,$$

d'où l'on déduit

$$r=\frac{c(a^2+p^2)-2a^2p}{2ap}.$$

Voici un autre raisonnement, qui montre pourquoi le point P doit être pris sur l'axe focal. Au rayon vecteur FM = λ correspond une seule valeur du rayon FM' = λ', et réciproquement; donc les variables λ, λ' satisfont à une équation de la forme

$$A\lambda\lambda'+B\lambda+B'\lambda'+C=0.$$

On doit avoir B = B'; car λ et λ' entrent symétriquement dans

la question. L'égalité précédente se ramène facilement à la forme

$$(\lambda + r)(\lambda' + r) = s.$$

Pour déterminer les constantes r, s, on applique la relation à deux positions de la sécante, par exemple à PFF′ et à la tangente issue de P.

(J. N.)

×Question 669.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 280.)

Dans un heptagone régulier ABCDEFG :

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}. \qquad (1)$$

Solution par MM. Emmerich *et* Denys. Le quadrilatère ACDE donne

$$AC.DE + AE.CD = AD.CE,$$

ou, à cause de $DE = CD = AB$, $AE = AD$, $CE = AC$,

$$AC.AB + AD.AB = AD.AC. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Solution par MM. Russo, Denys, Decamps, Brocard *et* Olivier (*Collège de Dinant*). Le rayon du cercle étant pris pour unité, l'on a

$$AB = 2\sin\frac{\pi}{7}, \quad AC = 2\sin\frac{2\pi}{7}, \quad AD = 2\sin\frac{3\pi}{7} = 2\sin\frac{4\pi}{7}.$$

Or l'égalité (1) peut prendre la forme

$$AC.AD = AB(AC + AD), \text{ ou } \sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7} = \sin\frac{\pi}{7}\left(\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7}\right);$$

en observant que

$$\sin\frac{2\pi}{7} = 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}, \quad \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} = 2\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7},$$

on voit immédiatement qu'elle se réduit à une identité. Donc etc.

Solution par M. Foulon. AD étant parallèle à BC, CG parallèle à AB, la figure ABCH est un losange (H désigne le point de concours de AD, CG). Les triangles semblables AHC, DHG donnent

$$\frac{AH}{AC} = \frac{HD}{GD}, \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{AD - AB}{AD},$$

égalité qui se ramène facilement à (1).

NOTE. En général, on a identiquement

$$\cos\alpha \sin(\beta-\gamma) + \cos\beta \sin(\gamma-\alpha) + \cos\gamma \sin(\alpha-\beta) = 0,$$

α, β, γ désignant les angles BAO, CAO, DAO quelconques inscrits dans la circonférence de centre O (St LOUP, N. A. M., 1873, (2), XII, p. 116). Si l'on fait $\alpha = 5\omega$, $\beta = 3\omega$, $\gamma = \omega$, on trouve

$$\cos 5\omega \sin 2\omega - \cos 3\omega \sin 4\omega + \cos\omega \sin 2\omega = 0,$$

d'où l'on peut déduire la solution de la question 669, si l'on fait $14\omega = \pi$.

(H. BROCARD.)

QUESTIONS D'EXAMEN.

429. Soient A, B deux points fixes, pris respectivement sur la droite donnée AA′ et sur la circonférence donnée C. Une circonférence variable, passant par A et B coupe AA′ en a, et C en b. Démontrer que la droite ab passe par un point fixe. (AUBERT.)

Le quadrilatère ABba étant inscrit, l'angle Bba est constant; donc la droite ab passe par un point fixe de C.

430. Sachant que la division par 45 du nombre 10 et de toutes les puissances de 10 donne 10 pour reste, en déduire un caractère de divisibilité d'un nombre quelconque par 45.

QUESTIONS PROPOSÉES.

***674.** Si les diagonales AD, BE, CF d'un hexagone ABCDEF sont égales et que les côtés soient parallèles deux à deux, l'hexagone est inscriptible à une circonférence. (E. CATALAN.)

675. Le rapport anharmonique de quatre points A, B, C, D d'une conique est égal à la racine carrée du rapport anharmonique du faisceau P(ABCD) qui a pour centre le pôle P de la droite AB. (G. TARRY.)

676. L'équation

$$a\left(1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{x^m}{1.2.3\ldots m}\right)$$
$$+ b\left(1 - x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots \pm \frac{x^m}{1.2.3\ldots m}\right) + c = 0$$

ne peut avoir plus de deux racines réelles. (SYLVESTER.)

SUR LE TÉTRAÈDRE ORTHOCENTRIQUE;

par M. G. DE LONGCHAMPS, professeur de mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne.

1. *Préliminaires.* La Géométrie du Triangle (ses progrès les plus importants datent, comme on sait, d'une quinzaine d'années) devait, logiquement, être suivie d'une Géométrie du Tétraèdre, conçue dans le même esprit. Et, en effet, des efforts ont été faits déjà dans ce sens. Ils ont produit divers travaux au premier rang desquels il est juste de placer le mémoire « *Sur le Tétraèdre* » de M. Neuberg(*). A ce propos, quelques réflexions générales sur les *deux Géométries* auxquelles nous venons de faire allusion, ne seront peut être pas sans intérêt; dans tous les cas, elles permettront de saisir le but que nous nous sommes proposé en écrivant cette note.

Lorsqu'on veut chercher dans le tétraèdre, comme cela est naturel, les analogies qu'il possède avec le triangle, on se heurte à des obstacles, insurmontables pour quelques-unes, et de diverses natures. La source de ces difficultés, bien que ce langage puisse paraître naïf au premier aspect, tient principalement à un fait contre lequel on ne peut rien : le tétraèdre possède quatre sommets et six arêtes(**). Or, avec quatre lettres A, B, C, D, on ne saurait, par une *permutation circulaire*, produire six combinaisons. Les arêtes du tétraèdre, dont les longueurs entrent, nécessairement, dans les formules représentant les éléments de cette figure, ne peuvent donc pas être obtenues de cette façon. Voilà ce qui différentie, essentiellement, le tétraèdre, du triangle; voilà l'obstacle le plus sérieux que l'on rencontre en abordant la géométrie du tétraèdre.

Il n'est pas le seul et je ne parle pas de la complication des formules relatives au tétraèdre; cette complication pourrait produire, tout au plus,

---

(*) Voir t. XXXVIII des *Mémoires couronnés et autres Mémoires* publiés par l'Académie royale de Belgique (1884), où le supplément de *Mathesis*, t. V.

(**) Il n'y a pas analogie absolue entre les côtés d'un triangle et les aires des faces d'un tétraèdre. Un triangle, en effet, est déterminé par ses côtés; un tétraèdre ne l'est pas par les aires de ses faces.

certaines longueurs dans les démonstrations. Il y en a, malheureusement, d'autres qui tiennent, pour en citer un exemple, à l'absence, dans le tétraèdre, d'éléments tels que l'orthocentre; la sphère conjuguée, etc. Il en résulte qu'une notable partie des propriétés formant la base de la géométrie du triangle, disparaît ainsi et le parallèle poursuivi se trouve détruit, du moins en grande partie.

Pour toutes ces raisons, les analogies entre les deux géométries, celle du triangle et celle du tétraèdre, sont nécessairement bornées et, tout bien pesé, il nous semble qu'elles ne sauraient être recherchées avec un succès relatif que pour certains tétraèdres d'un genre particulier. C'est probablement en obéissant à cet ordre d'idées que M. Neuberg fut conduit à considérer spécialement le tétraèdre *isodynamique* (tétraèdre dans lequel les produits des arêtes opposées sont égaux); et il est bien vrai que plus on creuse la situation que nous signalons ici, plus on voit nettement apparaître la nécessité, si l'on veut arriver à des résultats simples, d'étudier séparément les divers tétraèdres remarquables.

2. *Définition du tétraèdre orthocentrique.* On sait que, en général, les hauteurs d'un tétraèdre ne se coupent pas au même point, mais constituent un *quadruple hyperboloïdique*. S'il arrive, nous verrons tout à l'heure dans quelles conditions, que les hauteurs du tétraèdre $\mathfrak{ABCD}$ concourent en un point H, nous dirons que H est l'orthocentre de $\mathfrak{ABCD}$, qui prend alors le nom de *tétraèdre orthocentrique*. C'est ce tétraèdre particulier que nous nous proposons d'envisager dans cette note.

3. *Principe des coordonnées barycentriques.* Nous donnerons tout à l'heure l'équation de la sphère circonscrite au tétraèdre, en coordonnées barycentriques; mais nous utiliserons, à cet effet, un principe que nous devons d'abord établir.

Si l'on considère un tétraèdre de référence $\mathfrak{ABCD}$ et un point M dans l'espace, les coordonnées barycentriques de M sont des quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ proportionnelles aux volumes $M\mathfrak{BCD}$, $M\mathfrak{CDA}$, $M\mathfrak{DAB}$, $M\mathfrak{ABC}$, affectés de signes convenables, conformément à la convention connue. La droite $\mathfrak{A}M$ rencontre le plan $\mathfrak{BCD}$ en un point A'. On observera que

$$\frac{M\mathfrak{ABC}}{A'\mathfrak{ABC}} = \frac{M\mathfrak{ABD}}{A'\mathfrak{ABD}} = \frac{M\mathfrak{ACD}}{A'\mathfrak{ACD}} = \frac{M\mathfrak{A}}{A'\mathfrak{A}}.$$

D'ailleurs,

$$\frac{A'\mathfrak{ABC}}{A'\mathfrak{BC}}=\frac{A'\mathfrak{ADB}}{A'\mathfrak{DB}}=\frac{A'\mathfrak{ACD}}{A'\mathfrak{CD}};$$

on a donc

$$\frac{M\mathfrak{ABC}}{A'\mathfrak{BC}}=\frac{M\mathfrak{ABD}}{A'\mathfrak{DB}}=\frac{M\mathfrak{ACD}}{A'\mathfrak{CD}}.$$

Ainsi, *les coordonnées barycentriques du point* A', *relativement au triangle* $\mathfrak{BCD}$, *sont proportionnelles aux coordonnées barycentriques du point* M *relativement au tétraèdre.*

Cette remarque importante, qui montre, pour le noter en passant, tout l'avantage des coordonnées barycentriques, a été faite par M. Neuberg dans ses *Études sur les coordonnées tétraédriques* (Voir *Mémoires couronnés et autres Mémoires* publiés par l'Académie royale de Belgique, t. XXI, 1870).

4. *Trace d'une surface sur les faces du tétraèdre de référence.* Si M est situé dans le plan $\mathfrak{BCD}$, ses coordonnées β, γ, δ par rapport au tétraèdre $\mathfrak{ABCD}$ sont, d'après ce qui précède, proportionnelles à ses coordonnées barycentriques par rapport au triangle $\mathfrak{BCD}$. De là cette remarque importante :

Étant donnée l'équation $f(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0$ *d'une surface* Σ, *en coordonnées barycentriques, l'équation de la trace de* Σ *sur l'une des faces du tétraèdre de référence, sur* ABC *par exemple, s'obtient en faisant* $\delta = 0$ *dans cette équation et en considérant* α, β, γ *comme représentant les coordonnées barycentriques d'un point de cette trace, relativement au triangle* $\mathfrak{ABC}$.

5. *Sphère circonscrite au tétraèdre de référence.* De ce principe, on déduit immédiatement que l'équation de la sphère circonscrite à $\mathfrak{ABCD}$ est

$$\Sigma\overline{\mathfrak{AB}}^2 . \alpha\beta = 0. \qquad (1)$$

En effet, c'est là l'équation d'une quadrique dont la trace sur chacune des faces de $\mathfrak{ABCD}$ est la circonférence circonscrite à cette face.

6. *Équation d'une sphère quelconque.* Le plan de l'infini étant représenté par l'équation $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$, on voit que

$$(A\alpha+B\beta+C\gamma+D\delta)(\alpha+\beta+\gamma+\delta) - \Sigma\overline{\mathfrak{AB}}^2 . \alpha\beta = 0 \qquad (2)$$

est l'équation générale des sphères. Nous dirons que c'est la *forme normale* de l'équation d'une sphère.

7. *Signification géométrique des coefficients* A, B, C, D. Les coordonnées barycentriques *absolues* d'un point M sont les rapports

$$\frac{M\mathfrak{BCD}}{\mathfrak{ABCD}} = \frac{MA'}{\mathfrak{AA}'}, \quad \frac{M\mathfrak{CDA}}{\mathfrak{BCDA}}, \quad \frac{M\mathfrak{DAB}}{\mathfrak{CDAB}}, \quad \frac{M\mathfrak{ABC}}{\mathfrak{DABC}};$$

elles vérifient l'identité

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=1.$$

Lorsque le point M est situé dans le plan $\mathfrak{ABC}$, ses coordonnées barycentriques absolues par rapport au tétraèdre $\mathfrak{ABCD}$ sont égales à ses coordonnées absolues par rapport au triangle $\mathfrak{ABC}$, pourvu que l'on prenne pour celles-ci les rapports

$$\frac{M\mathfrak{BC}}{\mathfrak{ABC}}, \quad \frac{M\mathfrak{CA}}{\mathfrak{BCA}}, \quad \frac{M\mathfrak{AB}}{\mathfrak{CAB}}.$$

Cela posé, la trace de la sphère (2) sur le plan $\mathfrak{ABC}$ a pour équation

$$(A\alpha+B\beta+C\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)-\overline{\mathfrak{BC}}^2.\beta\gamma-\overline{\mathfrak{CA}}^2.\gamma\alpha-\overline{\mathfrak{AB}}^2.\alpha\beta=0, \quad (3)$$

et l'on sait que les coefficients A, B, C de cette équation sont égaux aux puissances des sommets du triangle de référence par rapport au cercle qu'elle représente. Il résulte de là que *les coefficients* A, B, C, D *qui entrent dans* (2), *sont les puissances des sommets du tétraèdre de référence par rapport à la sphère considérée.*

8. *Puissance d'un point par rapport à une sphère.* Soient maintenant $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0)$ les coordonnées barycentriques absolues d'un point M_0, et soient x_0, y_0, z_0 ses coordonnées par rapport à trois axes quelconques. Par une transformation linéaire, on passe du système $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ au système cartésien en question; le premier membre de (2), que nous désignons par $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, *devient* $f(x, y, z)$, et, en particulier, $\varphi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0)$ *devient* $f(x_0, y_0, z_0)$. La puissance de M_0 est représentée par $Kf(x_0, y_0, z_0)$, K désignant une constante, fonction des coefficients de $f(x, y, z)$, mais indépendante des coordonnées x_0, y_0, z_0. Cette puissance est donc également représentée par $\frac{1}{K}\varphi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0)$.

Prenons pour le point M_0 le sommet $\mathfrak{A}$, dont les coordonnées absolues sont (1, 0, 0, 0); alors $\varphi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0) = A$. La puissance de M_0 étant

maintenant égale à A, on voit que K = 1. Donc : *une sphère étant représentée en coordonnées barycentriques par l'équation normale, la puissance d'un point* M *par rapport à cette sphère s'obtient en remplaçant dans le premier membre de l'équation les coordonnées courantes par les coordonnées absolues de* M.

9. *Rappel des propriétés fondamentales du tétraèdre orthocentrique.* Pour qu'un tétraèdre soit orthocentrique, il faut et il suffit que la projection d'un sommet sur la face opposée coïncide avec l'orthocentre de cette face(*). On sait aussi qu'un tétraèdre orthocentrique jouit des propriétés suivantes :

1° Les arêtes opposées sont rectangulaires;

2° Les carrés des arêtes opposées donnent des sommes égales;

3° Les produits des cosinus de deux dièdres opposés sont égaux entre eux;

4° Les milieux des arêtes et les pieds des hauteurs des faces sont douze points d'une même sphère, dont le centre coïncide avec le centre de gravité du tétraèdre;

5° Les centres de gravité et les orthocentres des faces, et les points divisant les segments AH, BH, CH, DH dans le rapport 1 : 2 sont douze points d'une même sphère;

6° Il existe une sphère par rapport à laquelle chaque sommet du tétraèdre est le pôle de la face opposée.

Nous allons démontrer la dernière propriété par l'analyse.

(*A continuer*).

(*) On peut aussi dire qu'un tétraèdre est orthocentrique lorsqu'il a deux couples d'arêtes opposées rectangulaires.

Comparer : Lhuilier, *de relatione mutua*, p. 151; Ferriot, *Annales de Gergonne*, 1811-1812, t. II, p. 133; Feuerbach, *sur la pyramide triangulaire*, § 40; Jacobi, *Géométrie de Van Swinden*, p. 453; Wolstenholme, N. A. M., (2) X, 1871, p. 451; Delpit, J. M. E. et S., 1881, p. 337.

Steiner (*Gesammelte Werke*, t. I, p. 454), énonce les théorèmes suivants :

Si deux hauteurs d'un tétraèdre se coupent, les deux autres se coupent également; si trois hauteurs passent par un même point, la quatrième passe par le même point.

×NOTES MATHÉMATIQUES.

×1. *Démonstration des formules* $\sin(a+b)$ *et* $\cos(a+b)$ *par* M. Thiry.

1° Dans tout triangle ABC :

$$a = b\cos C + c\cos B, \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

d'où, puisque $\sin A = \sin(B+C)$,

$$\sin(B+C) = \sin B\cos C + \sin C\cos B. \tag{1}$$

2° Menons la hauteur $AH = h$. La relation

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

donne

$$(BH + HC)^2 = h^2 + \overline{BH}^2 + h^2 + \overline{CH}^2 - 2bc\cos A,$$

et, après réduction

$$h^2 = BH.HC + bc\cos A. \tag{2}$$

Or,

$$h^2 = c\sin B.b\sin C, \quad BH = c\cos B, \quad HC = b\cos C;$$

ces valeurs étant substituées dans (2), on trouve

$$\cos(B+C) = \cos B\cos C - \sin B\sin C. \tag{3}$$

Les formules (1) et (3) se trouvent ainsi établies pour toutes les valeurs positives de B, C ayant une somme inférieure à π.

×2. *Résolution de l'équation*

$$\cos x + a\sin x = b. \tag{1}$$

On trouve dans les œuvres de Goudin (Paris 1803) un mémoire intitulé : *Usages de l'ellipse dans la trigonométrie sphérique* et où l'auteur indique le procédé suivant pour résoudre l'équation (1) :

Soient β, γ deux angles déterminés par les égalités (on suppose $b^2 < 1$):

$$\cos\beta = b, \quad \sin\beta\cot\gamma = a;$$

l'angle x résulte de

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta\cot\tfrac{1}{2}\gamma, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x = -\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Le lecteur trouvera facilement la démonstration de ces formules.

La présente note est tirée d'un article de Servois, *Annales de Gergonne*, 1811-1812, t. II, p. 84.

3. ***Résolution graphique des équations numériques du 3e et du 4e degré, d'après*** **M. Reuschle.** Sur une première feuille de papier quadrillé et transparent se trouve tracée une parabole (axes ox, oy; équation $y^2 = x$); sur une seconde feuille, on a dessiné une suite d'hyperboles équilatères ayant les mêmes asymptotes $o'x'$, $o'y'$ et correspondant à des valeurs suffisamment rapprochées de la puissance (équation $x'y' = p$, p variable). Si l'on transporte la première feuille sur la seconde, de manière que les axes $o'x'$, $o'y'$, soient parallèles à ox, oy et passent au point $O''(\alpha, \beta)$ de la première feuille, l'équation de l'une des hyperboles, rapportée aux axes ox, oy sera

$$(x - \alpha)(y - \beta) = p,$$

et les ordonnées des points où cette courbe rencontre la parabole sont racines de l'équation

$$(y^2 - \alpha)(y - \beta) = p, \quad \text{ou} \quad y^3 - \beta y^2 - \alpha y + \alpha\beta - p = 0.$$

Celle-ci peut être identifiée avec une équation donnée

$$y^3 + Ay^2 + By + C = 0;$$

il suffit de prendre

$$\beta = -A, \quad \alpha = -B, \quad p = \alpha\beta - C.$$

M. Reuschle obtient les racines de l'équation du 4e degré au moyen des abscisses à l'origine des tangentes communes à la parabole et à l'une des hyperboles. Le procédé classique qui consiste à combiner une parabole avec une circonférence nous paraît préférable.

SUR LES CONIQUES OSCULATRICES(*);

par M. Ed. Dewulf, général commandant le génie à Marseille.

Bordeaux, 21 octobre 1885.

.... Soient P et P′ deux plans superposés; P porte les points M, P′ les points M′. La correspondance entre les points M et M′ est établie comme il suit : Deux points correspondants M et M′ sont sur un même rayon issu

---

(*) Extrait des deux lettres qui nous ont été adressées à l'occasion des questions 414-418 (*Mathesis*, t. V, p. 46) proposées par l'auteur. (J. N.)

d'un point fixe O; de plus, M et M′ forment sur un même rayon des ponctuelles projectives dont les points doubles se confondent en O. Si alors on donne, sur chaque rayon issu de O, un couple de points correspondants, la correspondance entre les points des deux plans est entièrement déterminée(*). Supposons, par exemple, qu'aux points de la droite de l'infini correspondent ceux d'une courbe C_m ayant en O un point multiple d'ordre $m-1$. Cette correspondance donne une foule de théorèmes dans le détail desquels je n'entre pas. Je suppose simplement que C_m soit un cercle C. A des points M en ligne droite correspondent des points M′ situés sur une conique osculatrice en O du cercle C′ symétrique du cercle C par rapport à O. A des points M situés sur une courbe $(M)_m$ correspondent des points M′ situés sur une courbe $(M')_{2m}$ ayant trois points d'ordre m situés sur le cercle C et infiniment voisins de O etc., etc. En d'autres termes, les points fondamentaux du plan P sont les trois points infiniment voisins de O sur C′. Les points doubles sont en nombre infini et leur lieu géométrique est formé par les droites isotropes issues de O.

Supposons que la courbe $(M)_m$ soit un cercle passant par O; la courbe correspondante sera une strophoïde $(M')_{2m-1}$ ayant son point double en O, osculée en ce point O par le cercle C et par le cercle $(M)_m$. Soit t' une tangente à cette strophoïde dans P′; à t' correspond dans P une conique osculatrice à C′ et tangente à $(M)_m$. Si t' est une tangente au point d'inflexion de la strophoïde, la conique correspondante sera osculatrice du cercle C′ en O et du cercle $(M)_m$. Le point d'osculation sur cette dernière courbe, sur ce cercle sera le point correspondant au point d'inflexion de la strophoïde. La strophoïde n'a qu'un seul point d'inflexion,

---

(*) Si l'on désigne par x, x' les abscisses OM, OM′ de deux points correspondants de deux ponctuelles projectives superposées, la relation entre ces points est exprimée par une équation de la forme $axx' + bx + b'x' + c = 0$, et les points doubles sont déterminés par l'égalité $ax^2 + (b + b')x + c = 0$. Pour que ces points se confondent avec l'origine O, il faut que l'on ait $c = 0$, $b + b' = 0$; donc, dans ce cas, la projectivité est caractérisée par l'équation $axx' + b(x - x) = 0$, ou $\frac{1}{x} - \frac{1}{x'} = \frac{2}{d}$.

Soient D le point qui a pour abscisse d, N le conjugué harmonique de M par rapport à OD : N et M′ sont symétriques par rapport à O. De là, un moyen très simple de construire les ponctuelles projectives superposées dont les points doubles sont confondus. De telles ponctuelles peuvent être dites en *semi-involution*. (J. N.)

donc : *Étant données deux circonférences* O, O_1 *qui se coupent en* A, B, *il n'existe qu'une conique osculatrice en* A *au cercle* O_1 *et osculatrice aussi au cercle* O. (*Mathesis*, t. V, p. 46, question 414).(*)

Bordeaux, 3 avril 1886.

... J'ai rencontré la question 417(**) dans des recherches relatives aux osculations. Afin de ne pas trop m'étendre, je prends ces recherches au point que voici : *Tracer les coniques osculatrices à un cercle donné* C *qui passent par un point* O *de ce cercle et dont les asymptotes sont parallèles à deux directions données* δ, δ'.

On sait que si l'on trace une conique Γ passant par deux points donnés X, Y et osculatrices à une conique donnée C_2 en un de ses points donnés Z, on trouve le quatrième point Z' d'intersection de ces deux coniques en joignant Z au point d'intersection de X'Y' avec XY; les points X', Y' sont respectivement les points d'intersection avec C_2 de XZ et YZ.

Réciproquement, une conique Γ passant par les trois points X, Y, Z' sera osculatrice à la conique donnée C_2 en un point Z, si les droites ZZ' et X'Y' concourent sur XY (***).

Pour passer à la question 417, substituons à C_2 le cercle C, à X, Y les points à l'infini sur δ, δ', et à Z' le point O. Traçons par un point quelconque Z de la circonférence C deux cordes ZA, ZB parallèles à δ, δ'; si les droites AB, ZO sont parallèles, le point Z sera un point d'oscula-

---

(*) Comparer la solution de M. Servais (*Mathesis* t. VIII, p. 34). (J. N.)

(**) Voir *Mathesis*. t. V, p. 46; t. VI, p. 183; t. IX, p. 144. Voici l'énoncé de cette question : *On donne une circonférence* C, *un point* O *sur cette ligne et deux directions fixes* δ, δ'. *Par un point quelconque* Z *de* C, *on mène les cordes* ZA, ZB *parallèles à* δ, δ'; *trouver le lieu du point* P *où se coupent les droites* ZO, AB. *Déterminer les asymptotes et démontrer que ces droites forment un triangle équilatéral.* (J. N.).

(***) Soit Σ une conique passant par deux points Z, U donnés sur la conique C_2, et par deux autres points donnés X, Y. Si Z', U' sont les deux autres points d'intersection de C_2 avec Σ, l'un de ces points détermine complètement l'autre; donc Z', U' marquent une involution sur C_2, et la corde Z'U' passe par un point fixe K.

Cette proposition subsiste encore lorsque U est infiniment voisin de Z. Dans ce cas, la conique Σ peut se réduire au système des droites ZX, ZY, ou au système formé par XY et la tangente en Z à C_2; la corde Z'U' devient alors X'Y' ou XY. Donc K est à l'intersection de XY, X'Y'. Supposant, de plus, U' confondu avec Z, on obtient le théorème énoncé dans le texte. (J. N.

tion avec le cercle C, de la conique qui passe par O, Z et dont les asymptotes sont parallèles à δ, δ'.

Prenons donc sur C un point Z quelconque, traçons les cordes ZA, ZB parallèles à δ, δ' et cherchons le lieu géométrique des points d'intersection P des droites ZO et AB; les parallèles aux asymptotes de ce lieu menées par O déterminent les points de C où des hyperboles passant par O et ayant leurs asymptotes parallèles aux directions δ, δ' puissent osculer C. Il est évident que le lieu de P est une courbe unicursale, puisqu'il n'a qu'un point sur une droite quelconque OZ, en dehors de O.

O est un point double, car si l'on mène par ce point une parallèle à chacune des directions δ, δ', on obtient un point Z qui donne un point P confondu avec O. Les tangentes au point double se déterminent aisément, et on voit que les quatre points où des droites parallèles à δ, δ' touchent C, appartiennent à la courbe (P)(*).

×DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE L'INÉGALITÉ

$$x - \sin x < \tfrac{1}{6} x^3;$$

d'après MM. Desmons et Gelin (**).

I. M. Desmons, professeur au lycée Janson de Sailly, vient de publier, dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* (Juillet 1889, pp. 145-146), une démonstration très simple et très naturelle de cette formule. Nous croyons utile de la faire connaître à nos lecteurs.

Soient, dans un cercle de rayon égal à l'unité, $x = \text{AM}$ un arc positif tout au plus égal à un quadrant, C son milieu, D le milieu de AC, E le milieu de CM, etc. L'expression $x - \sin x$ représente le double de l'aire du segment circulaire ACM. Cherchons une limite supérieure de cette aire.

Soient c_1, c_2, c_3, ... les longueurs des cordes successives AM, AC,

---

(*) Pour obtenir les asymptotes du lieu (P), on exprime que les arcs interceptés entre les cordes OZ, AB sont égaux.

(**) Comparez Joffroy, N. A. M. 1875 (2), XIV, p. 171, et Rouché et de Combe-rousse, *Traité de Géométrie*, 4e édition, p 299; 5e édition, pp. 317, où l'on trouve au fond la même démonstration.

AD ... des arcs x, $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{4}x$, ...; f_1, f_2, f_3, ... celles des flèches correspondantes. On a

$$2 \text{ aire ACM} = \lim (c_1 f_1 + 2c_2 f_2 + 4c_3 f_3 + \cdots).$$

Or

$$c_1 = 2\sin\frac{1}{2}x, \quad f_1 = 1 - \cos\frac{1}{2}x = 2\sin^2\frac{1}{4}x;$$

par suite,

$$c_1 f_1 = 4\sin\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{4} < 4\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{4}\right)^2 \quad \text{ou} \quad c_1 f_1 < \frac{x^3}{8}.$$

On trouve, de même,

$$c_2 f_2 < \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2}\right)^3 \text{ ou } 2c_2 f_2 < \frac{x^3}{8.4}, \quad c_3 f_3 < \frac{1}{8}\left(\frac{x}{4}\right)^3 \text{ ou } 4c_3 f_2 < \frac{x^3}{8.4^2},$$

et ainsi de suite. Donc, enfin,

$$x - \sin x < \frac{x^3}{8}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right),$$

c'est-à-dire,

$$x - \sin x < \frac{x^3}{8}\frac{4}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{x^3}{6}.$$

II. Voici une autre démonstration, simple et peu connue, de la même formule. Nous l'empruntons aux *Éléments de Trigonométrie* (1888) de M. l'abbé Gelin (p. 243). On a

$$2\sin\frac{1}{2}x - \sin x = 2\sin\frac{1}{2}x\left(1 - \cos\frac{1}{2}x\right) = 4\sin\frac{1}{2}x\sin^2\frac{1}{4}x$$

et, par suite,

$$2\sin\frac{1}{2}x - \sin x < 4\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{4}\right)^3 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{8}x^3. \tag{1}$$

On aura, de même, pour les angles $\frac{1}{4}x$, $\frac{1}{8}x$, ..., $\frac{1}{2^n}x$,

$$2\sin\frac{1}{4}x - \sin\frac{1}{2}x < \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2}\right)^3, \tag{2}$$

$$2\sin\frac{1}{8}x - \sin\frac{1}{4}x < \frac{1}{8}\left(\frac{x}{4}\right)^3, \tag{3}$$

. . . . . .

$$2\sin\frac{1}{2^n}x - \sin\frac{1}{2^{n-1}}x < \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)^3, \tag{n}$$

L'aire de la demi-boucle qui s'étend de $y = 0$, à $y = 1$, est donnée par la formule

$$\int_0^1 x\,dy = \int_0^1 y\sqrt{1-y}\,dy.$$

On trouve aisément cette intégrale par la substitution $1 - y = t^2$; l'aire de la boucle est $\frac{8}{15}$.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Question 384.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 231 et t. VIII, p. 278.)

Si α est la n^e partie d'un quadrant, on a

$$\sin^{2p}\alpha + \sin^{2p}2\alpha + \sin^{2p}3\alpha + \cdots + \sin^{2p}n\alpha = \tfrac{1}{2} + n.\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots 2p},$$

pourvu que $p < 2n$. (E. Cesáro.)

Solution par MM. de Bözóky, Molenbroek *et* Déprez. Soit S le premier membre de l'égalité à démontrer. D'après une formule connue,

$$(-1)^p 2^{2p-1}\sin^{2p}\varphi = \cos 2p\varphi - C_{2p,1}\cos(2p-2)\varphi + \cdots + \tfrac{1}{2}(-1)^p C_{2p,p}.$$

Remplaçons φ par $\alpha, 2\alpha, \ldots n\alpha$, et faisons la somme des résultats: il vient

$$(-1)^p 2^{p-1}S =$$
$$\cos 2p\alpha + \cos 4p\alpha + \cos 6p\alpha + \cdots + \cos 2np\alpha$$
$$- C_{2p,1}[\cos 2(p-1)\alpha + \cos 4(p-1)\alpha + \cdots + \cos 2n(p-1)\alpha]$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{n}{2}(-1)^p C_{2p,p}.$$

Appliquons maintenant la formule

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos nx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}} - \tfrac{1}{2};$$

(*) Nous avons reçu trop tard pour pouvoir les mentionner en temps utile de bonnes solutions des questions 638, 640, par M. Mac-Mahon (Cornell University, Ithaca, N. Y, U. S. A.) et 669, par M. A. Anderson, professeur de philosophie naturelle à Queen's College (Galway, Irlande).

nous aurons, suivant que p est pair ou impair,

$$\cos 2px + \cos 4px + \cdots + \cos 2npx = 0, \quad \text{ou} \quad -1,$$

$$\cos 2(p-1)x + \cos 4(p-1)x + \cdots + \cos 2n(p-1)x = -1, \quad \text{ou} \quad 0; \text{ etc.}$$

Par conséquent, respectivement,

$$(-1)^p 2^{2p-1} S = C_{2p,1} + C_{2p,3} + \cdots + C_{2p,p-1} + \frac{n}{2}(-1)^p C_{2p,p},$$

$$(-1)^p 2^{2p-1} S = -1 - C_{2p,2} - \cdots - C_{2p,p-1} + \frac{n}{2}(-1)^p C_{2p,p}.$$

En développant $(1+1)^{2p}$, $(1-1)^{2p}$ par la formule du binôme, on trouve

$$C_{2p,1} + C_{2p,3} + \cdots + C_{2p,p-1} = 2^{2p-2}, \quad \text{si } p \text{ est pair;}$$
$$1 + C_{2p,2} + C_{2p,4} + \cdots + C_{2p,p-1} = 2^{2p-2}, \quad \text{si } p \text{ est impair.}$$

On en déduit, pour les deux hypothèses,

$$S = \tfrac{1}{2} + \frac{n}{2p} C_{2p,p}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque (indiquée par M. Cesàro et développée par M. de Bőzóky). Multiplions les deux membres de la formule proposée par α; à cause de $nx = \frac{\pi}{2}$, nous pourrons écrire

$$\sum_{k=1}^{k=n} \sin^{2p} k\alpha \,.\, \alpha = \tfrac{1}{2}\alpha + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots 2p};$$

d'où, en passant à la limite pour $n = \infty$ ou $\alpha = 0$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} x\,dx = \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots 2p} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

×Question 386.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 231, et t. VIII, p. 279.)

Démontrer l'identité

$$1 - C_{2n,1}^2 + C_{2n,2}^2 - C_{2n,3}^2 + \cdots + 1 = (-1)^n C_{2n,n}.$$

(E. Cesàro.)

Solution par M. I. Beyens (Cadix). On a

$$(1-x^2)^{2n} = 1 - C_{2n,1} x^2 + C_{2n,2} x^4 - \cdots + (-1)^n C_{2n,n} x^{2n} \cdots, \quad (1)$$
$$(1+x)^{2n} = 1 + C_{2n,1} x + C_{2n,2} x^2 + \cdots + C_{2n,1} x^{2n-1} + x^{2n}, \quad (2)$$
$$(1-x)^{2n} = 1 - C_{2n,1} x + C_{2n,2} x^2 + \cdots - C_{2n,1} x^{2n-1} + x^{2n}. \quad (3)$$

Le coefficient de x^{2n}, dans le produit des seconds membres de (2) et (3) doit être égal au coefficient de x^{2n}, dans le second membre de (1); etc.

Solution par M. Deprez. M. Cesáro a signalé la formule suivante (Voir *Mathesis*, t. VI, p. 129) :

$$q^{n^2} - \left[\frac{1-q^{2n}}{1-q}\right]^2 q^{(n-1)^2} + \left[\frac{(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})}{1-q(1-q^2)}\right]^2 q^{(n-2)^2} - \cdots + q^{n^2}$$

$$= (-1)^n \frac{1-q^{2n+2}}{1-q^2} \cdot \frac{1-q^{2n+4}}{1-q^4} \cdots \frac{1-q^{4n}}{1-q^{2n}}. \qquad (a)$$

Si l'on fait tendre q vers la limite 1, on trouve

$$\lim \frac{1-q^{2n}}{1-q} = \frac{2n}{1} = C_{2n,1},$$

$$\lim \frac{(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})}{(1-q)(1-q^2)} = \frac{2n(2n-1)}{1.2} = C_{2n,2}, \text{ etc.};$$

d'où la question 386.

Question 628.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, pp. 240 et 280.)

On donne une circonférence Δ, *un point fixe* O *et un axe fixe* OX. *Soit* M *un point quelconque de* Δ. 1° *Soit* N *un point tel que*

$$\text{angle NOX} = \tfrac{1}{2}\,\text{MOX}, \quad \text{ON} = \sqrt{a.\text{OM}}, \qquad (1)$$

a étant une constante; démontrer que N *décrit un ovale de Cassini.* 2° *Le lieu d'un point* P *tel que*

$$\text{angle XOP} = 2\text{XOM}, \quad \text{OP} = \frac{\overline{\text{OM}}^2}{a}, \qquad (2)$$

est un ovale de Descartes. (Laisant.)

Solution par M. Dewez. 1° Soient C le centre de Δ, r le rayon, D le transformé de C, c'est-à-dire le point tel que

$$\text{angle DOX} = \tfrac{1}{2}\,\text{COX}, \quad \text{OD} = \sqrt{a.\text{OC}}.$$

Le triangle CDM donne

$$r^2 = \text{OM}^2 + \text{OD}^2 - 2\,\text{OM}.\text{OD}\cos\text{COM}. \qquad (3)$$

Prenons pour axe polaire OD et posons OM $= \rho$, OX $= x$, NOD $= \omega$;

nous aurons $\rho^2 = a.OM$, $COM = 2\omega$, $d^2 = a.OC$, et la relation (3) se transforme en celle-ci :

$$\rho^4 - 2\rho^2 d^2 \cos 2\omega + d^4 - a^2 r^2 = 0. \qquad (4)$$

Le lieu de N est un ovale de Cassini ayant pour foyers le point D et son symétrique D′ par rapport à O; car la relation $ND.ND' = b^2$ se traduit par l'équation (4), si l'on suppose $b = ar$.

Remarques. 1° Si le point O est sur la circonférence Δ, on a $d = ar = b$, et N décrit une lemniscate de Bernoulli.

2° Si M décrit la droite perpendiculaire à l'extrémité du rayon vecteur OC, l'on a $OC = OM \cos COM$, relation qui donne $\rho^2 \cos 2\omega = d^2$. Donc N parcourt une hyperbole équilatère.

3° Soit E le point tel que

$$\text{angle } EOX = 2COX, \quad OE = \frac{\overline{OC}^2}{a}.$$

OE étant pris pour axe polaire, on tire, de (3),

$$\frac{r^2}{a} = \rho + d - 2\sqrt{\rho d}\cos\tfrac{1}{2}\omega,$$

où $d = OE$. Sous forme rationnelle, on a

$$\rho^2 - 2\rho\left(d\cos\omega + \frac{r^2}{a}\right) + \left(\frac{r^2}{a} - d\right)^2 = 0. \qquad (5)$$

Or, l'équation d'un ovale de Descartes, en coordonnées bipolaires, est $m\rho + n\rho' = 1$, ou, si l'on suppose le premier foyer à l'origine et l'autre situé sur l'axe polaire à la distance c de l'origine,

$$m\rho + n\sqrt{\rho^2 + c^2 - 2\rho c\cos\omega} = 1.$$

Elle peut s'identifier avec l'équation (5), il suffit de poser

$$\frac{n^2 c}{n^2 - m^2} = d, \quad \frac{m}{n^2 - m^2} = -\frac{r^2}{a}, \quad \frac{n^2 c^2 - 1}{n^2 - m^2} = \left(\frac{r^2}{a} - d\right)^2,$$

égalités d'où l'on déduit

$$c = d - \frac{r^2}{a}, \quad m = -\frac{1}{c}, \quad n^2 = \frac{ad}{r^2 c^2}.$$

Remarques. 1° Si la circonférence Δ passe par O, le point P décrit une cardioïde représentée par l'équation $\rho = d\cos^2\dfrac{\omega}{2}$.

2° Lorsque M décrit la droite perpendiculaire à l'extrémité du rayon vecteur OC, P décrit une parabole ayant pour équation $\rho = d\,\text{séc}^2\frac{\omega}{2}$.

Solution par M. Genese 1° Prenons sur OX une longueur $OA = a$. Dans le calcul des *équipollences*, la relation entre M et N est indiquée par l'équation unique $ON = \sqrt{OA \cdot OM}$.

Soient C le centre de Δ, D et D′ les deux points symétriques par rapport à O, définis par les équipollences

$$OD = \sqrt{OA \cdot OC}, \quad OD' = -\sqrt{OA \cdot OC}.$$

Alors

$$DN = ON - OD = \sqrt{OA \cdot OM} - \sqrt{OA \cdot OC},$$
$$D'N = ON - OD' = \sqrt{OA \cdot OM} + \sqrt{OA \cdot OC},$$

d'où

$$DN \cdot D'N = OA\,(OM - OC) = OA \cdot CM.$$

Donc le module du produit DN . D′N est constant, et le lieu de N est un ovale de Cassini.

2° Soit E l'homologue de C déterminé par l'équipollence $OE = \frac{\overline{OC}^2}{\overline{OA}}$. Alors

$$EP = OP - OE = \frac{\overline{OM}^2 - \overline{OC}^2}{OA} = \frac{(OM + OC)(OM - OC)}{OA},$$

ou, si C′ est le symétrique de C par rapport à O,

$$EP = \frac{C'M \cdot CM}{OA}. \qquad (A)$$

Mais on a, entre les modules des différents segments de la figure, la relation

$$\overline{C'M}^2 + \overline{CM}^2 = 2\overline{OM}^2 + 2\overline{OC}^2,$$

ou, eu égard aux égalités (2) et (A),

$$\frac{a^2 \cdot \overline{EP}^2}{\overline{CM}^2} + \overline{CM}^2 = 2a \cdot OP + 2a\ OE,$$

ce qui revient à

$$EP^2 = m \cdot OP + n^2,$$

m et n étant des constantes. On sait qu'une telle équation caractérise les ovales de Descartes.

La même question a été traitée par MM. Beyens, François et Choisis. Comparez Laisant, *Théorie des équipollences*, 1887, pp. 240 et 261.

ˣQuestion 659.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 207.)

On décrit deux cercles Δ_a, Δ'_a *qui touchent les côtés* AB, AC *d'un triangle et qui ont, le premier un contact intérieur en* V_a, *le second un contact extérieur en* V'_a *avec le cercle circonscrit à* ABC. *Démontrer* 1° *que les polaires de* A *par rapport à* Δ_a, Δ'_a *passent, respectivement, par le centre* I *du cercle inscrit à* ABC *et par le centre* I_a *du cercle exinscrit, opposé à* A. 2° *Les droites* AV_a, BV_b, CV_c *concourent au point inverse du point de Nagel de* ABC. 3° *Les droites* AV'_a, BV'_b, CV'_c *concourent au point inverse du point de Gergonne de* ABC. (De Longchamps.)

Une bonne solution de cette question nous a été adressée par M. Déprez; nous n'en reproduisons que la première partie, parce que les deux autres peuvent être établies par une méthode plus intuitive.

1° Soient O, R le centre et le rayon du cercle ABC, M le point de contact de Δ_a avec AB, d la distance $A\Delta_a$, ρ le rayon de Δ_a. Le triangle $AO\Delta_a$ donne

$$\overline{O\Delta_a}^2 = d^2 + R^2 - 2Rd\cos\frac{B-C}{2};$$

on a aussi

$$O\Delta_a = R - \rho = R - \Delta_aM = R - d\sin\frac{A}{2},$$

d'où

$$\left(R - d\sin\frac{A}{2}\right)^2 = d^2 + R^2 - 2Rd\cos\frac{B-C}{2},$$

et après quelques réductions faciles

$$d = \frac{4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}, \quad AM = d\cos\frac{A}{2} = \frac{4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

Si I désigne le centre et r le rayon du cercle inscrit au triangle ABC, on a

$$AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} = 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2};$$

donc $AI = d\cos\frac{A}{2}$, et par suite MI est perpendiculaire à AI. (Déprez.)

Transformons la figure par rayons vecteurs réciproques, A étant le pôle d'inversion et $\sqrt{AB.AC}$ la puissance. Prenons sur AB la longueur $AB' = AC$, sur AC la longueur $AC' = AB$; B' et C' seront les points inverses de B et C, et la circonférence ABC se transforme en la droite B'C'. Le cercle Δ_a a donc pour transformée le cercle I_a, qui touche BC, B'C', et les prolongements de AB, AC; soient α, α', γ, β les points de contact du cercle I_a avec ces droites. Par conséquent, si M est le point où le cercle Δ_a touche AB, on a $A\gamma . AM = bc$; mais si I est le centre du cercle inscrit à ABC, on trouve, au moyen des triangles semblables ABI, AI_aC la relation $AI . AI_a = bc$. Donc $A\gamma . AM = AI . AI_a$, et puisque l'angle $A\gamma I_a$ est droit, l'angle AIM est également droit.

2° Le cercle Δ_a s'étant transformé en un cercle touchant B'C' en α', les points A, α', V_a sont en ligne droite. Donc les droites $A\alpha$, AV_a sont isogonales. Or, les droites analogues à $A\alpha'$ se rencontrent au point de Nagel de ABC; donc les droites AV_a, BV_b, CV_c concourent au point inverse du point de Nagel de ABC.

3° Si le cercle inscrit à ABC, touche B'C' en α_1, les points A, α_1, V'_a sont en ligne droite, et la droite AV'_a est l'isogonale de celle qui joint A au point de contact de BC avec le cercle inscrit à ABC, etc. (J. N.)

Question 663.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 240.)

1° *Si les côtés d'un triangle* ABC *sont en progression géométrique, il en est de même des rayons de courbure de la potentielle triangulaire aux extrémités du côté moyen et au barycentre;* 2° *Le cercle osculant la potentielle au barycentre est égal au cercle circonscrit* (Voir N. A. M., 1888, p. 263 et *Mathesis*, VI, p. 246.) (E. Cesàro.)

Solution par M. Déprez. Lorsque $a^2 = bc$, la potentielle se confond

avec l'ellipse qui touche AB, AC en B, C et passe par le barycentre. Si l'on prend pour axes CB, CA, l'équation de la courbe est

$$cy^2 + bx^2 + axy - abx = 0,$$

d'où l'équation du cercle osculateur à l'origine des coordonnées

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos C - \frac{ab}{c}x = 0.$$

Le rayon de ce cercle est donc $\rho = \frac{ab}{2c\sin C}$. De même, le rayon de courbure en B est $\rho' = \frac{ac}{2b\sin B}$.

Si l'on prend pour axes la médiane AG et la parallèle à BC par le barycentre G, la potentielle a pour équation.

$$3a^2y^2 + 4m^2x^2 + 4a^2my = 0;$$

le cercle osculateur en G est représenté par

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos A + \frac{a^2}{m}y = 0,$$

et a pour rayon

$$\rho'' = \frac{a^2}{2m\sin\theta} = \frac{a^2}{2h} = \frac{a^2R}{bc} = R.$$

Donc $\rho\rho' = \rho''^2$.

Remarque. Soient B′, C′ les points où une tangente quelconque à la parabole touchant AC, AB en C, B, rencontre ces mêmes côtés. Lorsque $a^2 = bc$, la potentielle est le lieu du point de rencontre des droites BB′, CC′.

×Question 668.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 264.)

Soient ABC, A′B′C′ *deux triangles directement semblables, situés dans un même plan. Quelle que soit leur situation relative, si par un même point on mène les droites* OA″, OB″, OC″ *égales et parallèles à* AA′, BB′, CC′, *le triangle* A″B″C″ *est semblable aux triangles* ABC, A′B′C′.

(J. Neuberg.)

Première solution par M^lle^ Bouwmeester *et* MM. Emmerich, Déprez, Verniory, H. van Aubel *et* Denys. Par hypothèse,

$$\textit{angle}\,(AB, A'B') = \textit{angle}\,(BC, B'C') = \textit{angle}\,(CA, C'A'), \qquad (1)$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}. \qquad (2)$$

Menons Ab égale et parallèle à BB', Ac égale et parallèle à CC'; il s'agit de démontrer que le triangle A'bc est semblable à ABC. Les droites AB, AC étant égales et parallèles à bB', cC', les relations (1) et (2) donnent

$$\textit{angle}\,(b\mathrm{B}', \mathrm{A}'\mathrm{B}') = \textit{angle}\,(\mathrm{C}'c, \mathrm{C}'\mathrm{A}), \quad \frac{b\mathrm{B}'}{\mathrm{A}'\mathrm{B}'} = \frac{\mathrm{C}'c}{\mathrm{C}'\mathrm{A}'};$$

on en conclut que les triangles bB'A', cC'A' sont directement semblables; par suite,

$$\textit{angle}\,(\mathrm{A}'b, \mathrm{A}'c) = \textit{angle}\,(\mathrm{A}'\mathrm{B}', \mathrm{A}'\mathrm{C}'), \quad \frac{\mathrm{A}'b}{\mathrm{A}'c} = \frac{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}{\mathrm{A}'\mathrm{C}'},$$

et le triangle A'bc est semblable à A'B'C'.

Deuxième solution. On a les équipollences

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'},$$

ou, en menant les droites Ab, Ac équipollentes à AB, AC,

$$\frac{b\mathrm{B}'}{\mathrm{A}'\mathrm{B}'} = \frac{\mathrm{C}'c}{\mathrm{C}'\mathrm{A}'}.$$

Celle-ci peut s'écrire

$$\frac{b\mathrm{A}' + \mathrm{A}'\mathrm{B}'}{\mathrm{A}'\mathrm{B}'} = \frac{\mathrm{C}'\mathrm{A}' + \mathrm{A}'c}{\mathrm{C}'\mathrm{A}'}, \text{ d'où } \frac{b\mathrm{A}'}{\mathrm{A}'\mathrm{B}'} = \frac{c\mathrm{A}'}{\mathrm{C}'\mathrm{A}'}.$$

On en conclut que les triangles A'bc, A'B'C' sont semblables.

(H. van Aubel.)

Troisième solution. Soit S le centre de similitude de deux figures directement semblables F, F', et soient A, A' deux points homologues quelconques. Le triangle SAA' est d'espèce constante; donc si l'on construit le parallélogramme SAA'A'', le triangle SA'A'' sera également d'espèce constante, et les points A', A'' se correspondent dans deux figures semblables F', F''. (J. N.)

QUESTIONS D'EXAMEN.

431. Un triangle rectangle ABC exécute une révolution complète autour de son hypoténuse BC et engendre ainsi un solide P. On peut inscrire dans P, une sphère S de rayon

$$r = \frac{bc}{b+c},$$

lui circonscrire une sphère de rayon $r' = \frac{1}{2}a$. La distance des centres de ces deux sphères est

$$d = \frac{(b-c)a}{2(b+c)}.$$

La surface convexe T et le volume V du cône qui a pour sommet le centre de la sphère inscrite et pour base la circonférence décrite par le sommet A, ont pour expressions

$$T = \frac{\pi b^2 c^2 \sqrt{2}}{a(b+c)}, \quad V = \frac{\pi b^3 c^3 (b-c)}{3a^3(b+c)}.$$

Les surfaces coniques engendrées par les côtés AC et AB touchent S suivant deux circonférences, dont les centres sont à une distance $(bc:a)$; la somme des aires des cercles limités par ces circonférences est égale à πr^2. (*Bulletin scientifique* de LEBON.)

432. Discuter la réalité et les signes des racines de l'équation suivante, lorsqu'on fait varier m:

$$(m-2)x^2 - (m-4)x + m - 3 = 0.$$

Soient x', x'' les deux racines, Δ le discriminant; on a

$$\Delta = -3m^2 + 12m - 8, \quad x'x'' = \frac{m-3}{m-2}, \quad x' + x'' = \frac{m-4}{m-2}.$$

Δ s'annule pour les valeurs $m' = \frac{1}{3}(6 - \sqrt{12}) = 0.84\ldots$, $m'' = \frac{1}{3}(6+\sqrt{12}) = 3{,}15\ldots$ On considèrera donc, dans la série des valeurs de m, les *intervalles* déterminés par

$$-\infty, \quad m', \quad 2, \quad 3, \quad m'', \quad +\infty, \quad \text{etc.}$$

433. Un parallèlipipède dont les trois dimensions sont 2^m, 3^m50 et 4^m25 pèse 40000 kilogr. Quel est le poids d'une sphère de la même substance, de 15^m de rayon?

434. Exprimer $\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\varphi)$ au moyen de $\operatorname{tg}\varphi$. Indiquer les signes de la formule à trouver, suivant que φ est compris entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$, entre $\frac{1}{2}\pi$ et π, entre π et $\frac{3}{2}\pi$ et entre $\frac{3}{2}\pi$ et π. (*Baccalauréat*, Nancy, 1889.)

435. Trouver la portion d'un cercle comprise entre deux cordes parallèles dont l'une est égale au rayon R du cercle, l'autre égale au côté du triangle équilatéral inscrit.

QUESTIONS PROPOSÉES.

***677.** Construire un triangle connaissant : 1° deux côtés $AB = c$, $AC = b$ et deux droites isogonales appartenant à l'angle A. 2° La symédiane issue de A et ses distances (perpendiculaires) aux points B et C. 3° Le centre de gravité, le point de Lemoine et *a*) le milieu d'une hauteur, *b*) le pied d'une hauteur. 4° Deux côtés et l'angle de Brocard. 5° L'angle de Brocard et l'angle sous lequel la base est vue du centre de gravité. (EMMERICH.)

678. Étudier la surface lieu des circonférences de contact des cônes circonscrits à des sphères égales, les centres de ces sphères étant sur une droite fixe et les cônes ayant même sommet. (H. BROCARD.)

***679.** Résoudre l'équation

$$\sqrt{abx(x-a-b)} + \sqrt{bcx(x-b-c)} + \sqrt{cax(x-a-c)} = \sqrt{abc(a+b+c)}. \qquad \text{(GRAM.)}$$

680. Soient $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ des quantités positives quelconques; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ des quantités positives ou négatives, dont la valeur absolue est au plus égale à l'unité. Démontrer que le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} a_0+a_1 & -\lambda_1 a_1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ -\lambda_1 a_1 & a_1+a_2 & -\lambda_2 a_2 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 a_2 & a_2+a_3 & -\lambda_3 a_3 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & a_{n-2}+a_{n-1} & -\lambda_{n-1}a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & -\lambda_{n-1}a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}$$

est nécessairement positif. (H. NOVARESE.)

LES PROPOSITIONS DU CINQUIÈME LIVRE D'EUCLIDE, RÉDUITES EN FORMULES;

par M. G. PEANO, professeur à l'Université de Turin.

Je me propose, dans cette note, de déterminer le minimum des signes et des conventions nécessaires pour exprimer les 25 propositions du Livre V d'Euclide (*).

Ces conventions sont les suivantes :

1. Nous désignons par les lettres a, b.... des êtres (grandeurs, nombres) quelconques.

2. L'affirmation simultanée de deux ou plusieurs propositions s'indiquera en les écrivant l'une après l'autre.

3. Pour séparer les différentes parties d'une formule, on se servira des parenthèses, selon l'usage habituel. On arrive au même but, avec une plus grande simplicité, au moyen des points . : ∴ etc. Pour lire une formule divisée par des points, on unira d'abord les signes qui ne sont séparés par aucun point, puis ceux qui le sont par un, ensuite ceux qui le sont par deux, etc. Nous adopterons ici les points seulement pour séparer les propositions partielles d'un même théorème.

4. Le signe $\supset$ entre deux propositions a et b ($a \supset b$) signifie que « de la première a, on déduit la seconde b. »

5. Le signe ε signifie *est*. Ainsi $a \varepsilon b$ signifie « a est un b. » Au lieu d'écrire $a \varepsilon k . b \varepsilon k . c \varepsilon k$, on écrira $a, b, c \varepsilon k$ (a, b, c sont des k).

6. Les signes $+$, $-$, $=$, $>$, $<$, entre des grandeurs auront la signification ordinaire. Le produit de la grandeur a par le nombre m se représente par ma; et la raison des grandeurs a et b par a/b.

7. Au lieu des mots *grandeur* et *nombre* (entier positif), nous écrivons G et N. Alors les propositions d'Euclide deviennent :

1. $a, b \varepsilon G . m \varepsilon N : \supset . ma + mb = m(a + b)$.
2. $a \varepsilon G . m, n \varepsilon N : \supset . ma + na = (m + n)a$.
3. » » $: \supset . n(ma) = (nm)a$.
4. $a, b, c, d \varepsilon G . m, n \varepsilon N . a/b = c/d : \supset . (ma)/(nb) = (mc)/(nd)$.

(*) J'ai déjà résolu la même question dans mes *Aritmetices principia, nova methodo exposita* et *Principii di Geometria*. Turin 1889, pour d'autres systèmes de propositions.

5. $a, b \in G \,.\, m \in N : \supset \,.\, ma - mb = m(a - b).$
6. $a \in G \,.\, m, n \in N : \supset \,.\, ma - na = (m - n)a.$
7. $a, b, c \in G \,.\, a = b : \supset : a/c = b/c \,.\, c/a = c/b.$
8. » $\quad .\, a > b : \supset : a/c > b/c \,.\, c/b > c/a.$
9. » $\quad .\, a/c = b/c : \supset \,.\, a = b.$
» $\quad .\, c/a = c/b : \supset \,.\, a = b.$
10. » $\quad .\, a/c > b/c : \supset \,.\, a > b.$
» $\quad .\, c/b > c/a : \supset \,.\, a > b.$
11. $a, b, c, d, e, f \in G \,.\, a/b = c/d \,.\, c/d = e/f : \supset \,.\, a/b = e/f.$
12. » $\quad .\, a/b = c/d = e/f : \supset .\, a/b = (a + c + e)/(b + d + f).$
13. » $\quad .\, a/b = c/d \,.\, c/d > e/f : \supset \,.\, a/b > e/f.$
14. $a, b, c, d \in G \,.\, a/b = c/d : \supset \,.\, a > c \,.\, \supset \,.\, b > d : a = c \,.\, \supset \,.\, b = d :$
$a < c \,.\, \supset \,.\, b < d.$
15. $a, b \in G \,.\, m \in N : \supset \,.\, (ma)/(mb) = a/b.$
16. $a, b, c, d \in G \,.\, a/b = c/d : \supset \,.\, a/c = b/d.$
17. » » $\quad : \supset \,.\, (a - b)/b = (c - d)/d.$
18. » » $\quad : \supset \,.\, (a + b)/b = (c + d)/d.$
19. » » $\quad : \supset \,.\, (a - c)/(b - d) = a/b.$
20. $a, b, c, d, e, f \in G \,.\, a/b = d/e \,.\, b/c = e/f : \supset \,.\, a > c \,.\, \supset \,.\, d > f :$
$a = c \,.\, \supset \,.\, d = f : a < c \,.\, \supset \,.\, d < f.$
21. » $\quad .\, a/b = e/f \,.\, b/c = d/e : \supset \,.\, a > c \,.\, \supset \,.\, d > f :$
$a = c \,.\, \supset \,.\, d = f : a < c \,.\, \supset \,.\, d < f.$
22. » $\quad .\, a/b = d/e \,.\, b/c = e/f : \supset \,.\, a/c = d/f.$
23. » $\quad .\, a/b = e/f \,.\, b/c = d/e : \supset \,.\, a/c = d/f.$
24. » $\quad .\, a/b = c/d \,.\, e/b = f/d : \supset \,.\, (a+e)/b = (c+f)/d.$
25. $a, b, c, d \in G \,.\, a/b = c/d \,.\, a > b \,.\, a > c : \supset \,.\, a + d > b + c.$

SUR LES NOMBRES PARFAITS;

par M. Ed. Lucas, professeur de mathématiques spéciales au Lycée St-Louis, à Paris.

I. Lionnet a énoncé (N. A. M., 1879; p. 306) le théorème démontré par M. Stern (*Mathesis*, VI; p. 248). Il s'occupa aussi des nombres parfaits, *de seconde espèce*, égaux au produit de leurs parties aliquotes. On simplifie sa méthode, en observant que le produit des diviseurs d'un nombre n est une puissance de n dont l'exposant est la moitié du nombre ν des divi-

seurs de n, ainsi qu'on s'en assure en groupant les diviseurs deux par par deux, de telle sorte que leur produit soit n. D'ailleurs la formule subsiste lorsque n est un carré. On doit donc avoir

$$n = n^{\frac{\nu}{2}-1},$$

d'où $\nu = 4$, et par suite, en se reportant à la formule qui donne le nombre des diviseurs de n, il faut et il suffit que n soit le cube d'un nombre premier ou le produit de deux nombres premiers inégaux. On trouverait de même les nombres n dont le produit des parties aliquotes est une puissance de n d'exposant donné.

II. On sait que les *nombres parfaits pairs*, ou nombres d'Euclide, sont pris parmi les nombres

$$e_p = 2^{p-1}(2^p - 1),$$

dans lesquels le second facteur est premier; par suite, l'exposant p est premier. Donc *tout nombre parfait pair autre que* 6 *ou* 28 *est divisible par* 16.

Tout nombre premier plus grand que 3, est de l'une des formes $6q+1$ ou $6q+5$; d'autre part, on a, pour le *module* 9,

$$2^3 \equiv -1, \quad 2^{6q} \equiv +1;$$

par suite, pour

$$p = 6q+1, \quad e_p \equiv 1(2-1) \equiv 1,$$
$$p = 6q+5, \quad e_p \equiv 2(2^3+1) \equiv 1;$$

donc *tout nombre parfait pair, autre que* 6, *est un multiple de* 9, *augmenté de* 1.

On a, de même, pour le *module* 7, les congruences

$$2^3 \equiv +1, \quad 2^{3q} \equiv +1;$$

par suite, pour

$$p = 6q+1, \quad e_p \equiv 1(2-1) \equiv 1,$$
$$p = 6q+5, \quad e_p \equiv 2(2^3-1) \equiv -1;$$

donc *tout nombre parfait pair, autre que* 28, *est un multiple de* 7 *augmenté ou diminué de* 1.

Pour le *module* 13, on a $2^6 \equiv -1$; en appliquant ce résultat aux nombres des formes

$$p = 12q+1, 5, 7, 11,$$

on en déduit que *tout nombre parfait pair, autre que* 6, *est un multiple de* 13 *augmenté de* 1, 2, 3 *ou* 8.

Pour le *module* **19**, on a $2^9 \equiv -1$; en appliquant ce résultat aux nombres p des formes

$$p = 18q + 1, 5, 7, 11, 13, 17,$$

on trouve que *tout nombre parfait pair, autre que* 6 *ou* 28, *est un multiple de* 19 *augmenté de* 1, 2, 3, 7, 10 *ou* 15.

Enfin pour le *module* **25**, la congruence $2^{10} \equiv -1$, donne pour les nombres p des formes

$$p = 20q + 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19,$$

ce théorème : *Tout nombre parfait pair, autre que* 496, *est un multiple de* 25 *augmenté de* 1, 3, 6, 11 *ou* 16.

En combinant ce résultat avec le premier, il en résulte que *tout nombre parfait pair, autre que* 6 *ou* 496, *est terminé par l'ensemble des deux chiffres*

16, 28, 36, 56, 76.

Exercices I. Trouver les résidus des nombres parfaits pairs 1° par les nombres 11, 23, 29, 49. 2^n par les nombres 31, 37, 41, 43.

II. Trouver les trois derniers chiffres des nombres parfaits pairs; — et les quatre derniers chiffres.

III. Les nombres amiables(*) fournis par les formules

$$a = 2^n(3.2^{n-1} - 1)(3.2^n - 1), \quad b = 2^n(3^n.2^{2n-1} - 1),$$

dans lesquelles les facteurs entre parenthèses sont des nombres premiers, ne donnent de tels nombres, pour $n < 35$, que pour les valeurs connues d'Euler, $n = 2, 4, 7$.

Note. Sur la théorie des nombres parfaits, voir *Mathesis*, VI, 100-101 (Seelhoff); 145-148 (E. Lucas et P. Mansion); 178 (Seelhoff); 248-250 (M. Stern et E. Lucas); VII, 45-46 (E. Lucas); 288-290 (C. Servais); 245-246 (E. Cesàro); VIII, 57-61, (Sylvester); 92-93, 135 (C. Servais); 112-113 (E. Catalan). (Rép.)

(*) On appelle ainsi deux nombres dont chacun est égal à la somme des diviseurs de l'autre. Exemple : $a = 220$, $b = 284$. Nous publierons dans *Mathesis* les solutions des exercices proposés par M. Lucas, que l'on voudra bien nous envoyer.

SUR LE TÉTRAÈDRE ORTHOCENTRIQUE;

par M. G. DE LONGCHAMPS, professeur de mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne.

(*Suite et fin;* voir p. 49-54.)

9. THÉORÈME. *Le tétraèdre orthocentrique possède une sphère conjuguée.* Pour que l'équation (2) représente une quadrique conjuguée au tétraèdre, il est nécessaire et suffisant que les termes en $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, ... disparaissent. On a donc les relations

$$\left.\begin{aligned} &A+B=\overline{\mathfrak{AB}}^2, \quad A+C=\overline{\mathfrak{AC}}^2, \quad A+D=\overline{\mathfrak{AD}}^2;\\ &B+C=\overline{\mathfrak{BC}}^2, \quad B+D=\overline{\mathfrak{BD}}^2, \quad C+D=\overline{\mathfrak{CD}}^2, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

dans lesquelles les coefficients A, B, C, D représentent les inconnues qu'il s'agit de déterminer.

Posons

$$\begin{aligned} &\mathfrak{AB}=u, \quad \mathfrak{AC}=v, \quad \mathfrak{AD}=w,\\ &\mathfrak{CD}=u', \quad \mathfrak{BD}=v', \quad \mathfrak{BC}=w'; \end{aligned}$$

les égalités (4) prennent la forme

$$\left.\begin{aligned} &A+B=u^2, \quad A+C=v^2, \quad A+D=w^2,\\ &C+D=u'^2, \quad B+D=v'^2, \quad B+C=w'^2. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

On en déduit

$$A+B+C+D=u^2+u'^2=v^2+v'^2=w^2+w'^2.$$

Ainsi, la somme des carrés des arêtes opposées doit être la même; le tétraèdre est donc orthocentrique. Cette condition est, d'ailleurs, suffisante; car, si elle est vérifiée, on peut résoudre les équations (5). Si l'on fait

$$A+B+C+D=K^2=u^2+u'^2=\dots,$$

on trouve

$$\left.\begin{aligned} &2A=u^2+v^2+w^2-K^2=2K^2-u'^2-v'^2-w'^2,\\ &2B=u^2-v^2-w^2+K^2=v'^2+w'^2-u'^2,\\ &2C=v^2-u^2-w^2+K^2=u'^2+w'^2-v'^2,\\ &2D=w^2-u^2-v^2+K^2=u'^2+v'^2-w'^2. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

La sphère conjuguée au tétraèdre orthocentrique a alors pour équation

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + D\delta^2 = 0, \qquad (7)$$

A, B, C, D ayant les valeurs (6).

On vérifie aisément que la surface (7) coupe les faces du tétraèdre suivant des circonférences conjuguées au triangle correspondant; résultat évident *à priori*.

10. ***Coefficients du tétraèdre orthocentrique.*** L'équation (7) renferme quatre paramètres indépendants A, B, C, D que nous appellerons les ***coefficients du tétraèdre orthocentrique;*** leur somme K^2 sera le ***coefficient total*** du tétraèdre.

Tous les éléments du tétraèdre orthocentrique sont, évidemment, des fonctions de A, B, C, D. Nous allons calculer ces fonctions pour les éléments qui présentent le plus d'intérêt. Des formules trouvées, nous déduirons ensuite diverses conséquences.

11. ***Coordonnées du centre de la sphère conjuguée.*** On sait que le centre d'une quadrique peut être considérée comme le pôle du plan de l'infini, plan qui a pour équation $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$.

D'après cela, les coordonnées du centre de la sphère (7) vérifient les équations

$$A\alpha = B\beta = C\gamma = D\delta.$$

On a donc, pour les coordonnées absolues de ce point,

$$\frac{\alpha}{\frac{1}{A}} = \frac{\beta}{\frac{1}{B}} = \frac{\gamma}{\frac{1}{C}} = \frac{\delta}{\frac{1}{D}} = \frac{1}{\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}}.$$

12. ***Rayon de la sphère conjuguée.*** Le carré ρ^2 du rayon de la sphère conjuguée étant égal à moins la puissance de son centre, on trouve, par application du § 8 :

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} = 0.$$

13. ***Aires des faces du tétraèdre orthocentrique.*** Désignons par a, b, c, d les aires des faces opposées aux sommets A, B, C, D du tétraèdre. Nous avons

$$16a^2 = 2u'^2v'^2 + 2v'^2w'^2 + 2w'^2u'^2 - u'^4 - v'^4 - w'^4,$$

d'où, en introduisant les valeurs (5) de u'^2, v'^2, w'^2 et en réduisant,

$$4a^2 = BC + CD + DB. \qquad (8)$$

Par analogie,

$$4b^2 = CD + DA + AC, \text{ etc.}$$

14. *Plus courte distance de deux arêtes opposées.* Le plan CDH est perpendiculaire aux plans ABD et ABC et, par suite, à leur intersection AB; soit P le point où il coupe AB, et soit Q le point de rencontre de PH avec CD. PQ est la plus courte distance de AB et CD. CP, DQ étant les hauteurs des faces ACB, BDA, on a

$$u^2 . \overline{DP}^2 = 4c^2, \quad u^2 . \overline{CP}^2 = 4d^2,$$

d'où

$$\overline{DP}^2 = \frac{AD + AB + BD}{A + B}, \quad \overline{CP}^2 = \frac{AB + BC + CA}{A + B}.$$

D'ailleurs, PQ étant la hauteur du triangle CPD, on a également

$$4u'^2 . \overline{PQ}^2 = 2\overline{CP}^2 . \overline{PD}^2 + 2\overline{CP}^2 . u'^2 + 2\overline{PD}^2 . u'^2 - \overline{CP}^4 - \overline{PD}^4 - u'^4;$$

d'où, tout calcul fait,

$$\overline{PQ}^2 = \frac{AB}{A + B} + \frac{CD}{C + D}. \qquad (9)$$

Pour déterminer la position de PQ, il faut calculer les longueurs des segments AP, BP, CA, DA. En observant que DP est une hauteur du triangle ABC, on trouve immédiatement

$$\overline{AP}^2 = \frac{A^2}{A + B}, \quad \overline{BP}^2 = \frac{B^2}{A + B}. \qquad (10)$$

De même,

$$\overline{CQ}^2 = \frac{C^2}{C + D}, \quad \overline{DQ}^2 = \frac{D^2}{C + D}.$$

15. *Volume du tétraèdre orthocentrique.* Soit AA′ la hauteur de ABCD. On a

$$6V = 2ABCD . AA' = BQ . CD . AA' = 2ABQ . CD = AB . CD . PQ.$$

Donc, *dans le tétraèdre orthocentrique, le produit de deux arêtes opposées par leur plus courte distance est le même pour les trois couples d'arêtes opposées. Ce produit représente six fois le volume du tétraèdre.*

Des formules (9) et (11), on déduit

$$36V^2 = (A + B)(C + D)\left(\frac{AB}{A + B} + \frac{CD}{C + D}\right) = \Sigma ABC, \qquad (12)$$

ou

$$\frac{36V^2}{ABCD}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}.$$

16. *Coordonnées de l'orthocentre.* Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les coordonnées absolues de l'orthocentre H. On a

$$\alpha=\frac{HA'}{\mathfrak{H}A'}=1-\frac{\mathfrak{H}H}{AA'}=1-\frac{\mathfrak{H}H.\mathfrak{H}A'}{\mathfrak{H}\overline{A'}^2};$$

le quadrilatère A'$\mathfrak{H}$PH étant inscriptible, on a aussi $\mathfrak{H}H.\mathfrak{H}A'=\mathfrak{H}P.\mathfrak{H}\mathfrak{P}$. Donc

$$\alpha=1-\frac{\mathfrak{H}P.\mathfrak{H}\mathfrak{P}}{\mathfrak{H}A'^2}.$$

Or, d'après les formules (5), (8), (10) et (12),

$$\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{P}}^2=A+B,\quad \overline{\mathfrak{H}P}^2=\frac{A^2}{A+B},\quad \overline{\mathfrak{H}A'}^2=\frac{9V^2}{a^2}=\frac{\Sigma ABC}{BC+CD+DB};$$

par conséquent,

$$\alpha=1-\frac{A(BC+CD+DB)}{\Sigma ABC}=\frac{BCD}{\Sigma ABC}=\frac{1}{A\Sigma\frac{1}{A}}.$$

On voit par là que l'orthocentre coïncide avec le centre de la sphère conjuguée (§ 11). Ce résultat, évident *a priori*, nous donne une vérification des calculs précédents.

17. *Centre et rayon de la sphère circonscrite.* L'équation normale de cette sphère est

$$-\Sigma(A+B)\alpha\beta=0. \qquad (13)$$

Les coordonnées de son centre sont données par les égalités

$$\frac{\alpha}{ABC+ACD+ABD-BCD}=\frac{\beta}{BCA+BCD+BDA-ACD}=\dots$$

Les valeurs absolues sont, d'après cela,

$$\alpha=\frac{1}{2}\frac{ABC+ACD+ABD-BCD}{ABC+ACD+ABD+BCD}=\frac{18V^2-BCD}{36V^2}.$$

En appliquant à l'équation (13) le procédé de calcul indiqué au § 12, on trouve pour le rayon R de la sphère circonscrite

$$R^2=\frac{\Sigma A^2(BC+CD+DB)}{144V^2}=\frac{\Sigma A^2(BC+CD+DB)}{4\Sigma ABC}.$$

Résumé des formules relatives au tétraèdre orthocentrique.

A, B, C, D sont les coefficients du tétraèdre ; $A+B+C+D=K^2$; K^2 est le coefficient total.

1. Le carré d'une ARÊTE, 𝔄𝔅 par exemple, est égal à $A+B$;

2. L'aire d'une FACE, 𝔄𝔅ℭ par exemple, est égale à $\frac{1}{2}\sqrt{BC+CD+DB}$.

3. Le carré de LA PLUS COURTE DISTANCE de deux arêtes opposées, des arêtes 𝔄𝔅, ℭ𝔇 par exemple, est égal à

$$\frac{AB}{A+B}+\frac{CD}{C+D}.$$

4. Le carré du VOLUME de 𝔄𝔅ℭ𝔇 est égal à

$$\frac{1}{36}\,b\,(ABC+BCD+CDA+DAB).$$

5. L'équation de la SPHÈRE CONJUGUÉE est

$$\Sigma A\alpha\Sigma\alpha-\Sigma(A+B)\alpha\beta=0, \quad \text{ou} \quad A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2+D\delta^2=0.$$

6. Les puissances des sommets 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 relativement à la sphère conjuguée sont respectivement égales à A, B, C, D.

7. L'équation de la *sphère circonscrite* est

$$\Sigma(A+B)\alpha\beta=0.$$

8. Le *plan radical* de la sphère conjuguée et de la sphère circonscrite est représenté par l'équation

$$A\alpha+B\beta+C\gamma+D\delta=0.$$

Ce plan est le plan polaire du centre de gravité du tétraèdre par rapport à la sphère conjuguée ; c'est aussi le plan harmoniquement associé à l'orthocentre par rapport au tétraèdre.

9. L'*orthocentre* H, qui est en même temps le centre de la sphère conjuguée et le point de concours des perpendiculaires communes aux couples formés par les arêtes opposées, a pour coordonnées

$$\frac{1}{A},\ \frac{1}{B},\ \frac{1}{C},\ \frac{1}{D}.$$

10. Le rayon ρ de la sphère conjuguée est donné par la formule

$$\frac{1}{\rho^2}+\Sigma\frac{1}{A}=0.$$

11. Les coordonnées du centre et le rayon R de la sphère circonscrite sont données par les relations

$$\frac{\alpha}{ABC + ACD + ABD - BCD} = \frac{\beta}{BAC + BAD + BCD - ACD} = \dots,$$

$$R^2 = \frac{\Sigma A^2 (BC + CD + DB)}{4 \Sigma ABC}.$$

De ces formules, on peut tirer des conséquences diverses; nous en citerons seulement quelques-unes; le lecteur rétablira sans peine la démonstration.

THÉORÈME I. *La puissance du centre de gravité* G *d'un tétraèdre orthocentrique, par rapport à la sphère conjuguée* $= \frac{1}{16} K^2$.

THÉORÈME II. *Le triple de l'inverse du carré du rayon de la sphère conjuguée est égal à la somme des carrés des inverses des rayons de sections faites, dans cette sphère, par les faces du tétraèdre.*

THÉORÈME III. Soit H l'orthocentre du tétraèdre orthocentrique; la hauteur AH coupe la face BCD en un point A', et la sphère circonscrite en A''; on a

$$A'A'' = 2HA'.$$

THÉORÈME IV. *La première sphère des douze points a pour équation*

$$\tfrac{1}{2} \Sigma A \alpha \Sigma \alpha - \Sigma (A + B) \alpha\beta = 0;$$

la seconde sphère des douze points est représentée par

$$\tfrac{1}{2} \Sigma A \alpha \Sigma \alpha - \Sigma (A + B) \alpha\beta = 0.$$

Ces deux sphères, la sphère circonscrite et la sphère conjuguée ont même plan radical.

BIBLIOGRAPHIE.

Teoria elemental de las Formas algebraicas, par D. JUAN J. DURÁN y LORIGA, capitán de Artillera. Segovia, Ondero, 1889 (137 pages in-8°). Prix : 5 fr.

Sommaire. 1. Préliminaires. 2. Substitutions linéaires. 3. Discriminants. 4. Invariants. 5. Jacobiens et hessiens. 6. Covariants. 7. Contrevariants et divariants. 8. Emanants. 9. Formes canoniques.

La théorie élémentaire des formes algébriques de M. le capitaine Durán y Loriga est faite principalement d'après l'ouvrage classique de Salmon et peut servir d'introduction à celui-ci, pour les personnes qui ne veulent pas aborder immédiatement l'étude d'un traité aussi étendu. Selon nous, dans un livre élémentaire comme celui

que nous annonçons ici, il était inutile d'effleurer un sujet aussi difficile que celui des discriminants des formes quelconques; car, au fond, cela présuppose une théorie complète des fonctions symétriques des équations algébriques.

Cours d'Arithmétique par A. TARTINVILLE, ancien élève de l'École normale supérieure, agrégé des Sciences mathématiques, professeur au lycée Saint-Louis. Paris, Nony et C^ie^, 1889. Un vol. in-8° de 515 pages. Prix : 5 francs.

Le nouveau *Cours d'Arithmétique* de M. Tartinville n'est précédé d'aucun avertissement ou avant-propos qui en fasse connaître le but spécial. Est-il destiné aux élèves ou aux professeurs? C'est ce qu'il est difficile de décider. D'une part, la partie du livre consacrée aux nombres incommensurables semble beaucoup trop abstraite pour des élèves; d'autre part, celle qui est relative aux nombres commensurables contient bien des développements inutiles, si elle s'adresse aux maîtres. M. Tartinville semble avoir voulu faire, dans son livre, un exposé logique de l'Arithméthique sans s'inquiéter spécialement des besoins de l'enseignement proprement dit; aussi comme manuel d'Arithmétique, le nouveau Cours est-il inférieur aux *Éléments* de Serret ou au *Traité* de Bertrand; mais au point de vue philosophique, il peut en être considéré comme un complément utile pour toutes les questions où interviennent les incommensurables.

Voici une indication sommaire des sujets qui y sont traités.

INTRODUCTION (pp. 1-6). Définition des nombres entiers, fractionnaires, incommensurables, par la considération de la mesure des longueurs. Représentation des nombres quelconques par des lettres. — Selon nous, il n'est pas philosophique de définir les nombres autrement que par la considération d'êtres distincts, considérés comme identiques sous un certain rapport (nombres entiers), ou comme réunis en groupes dont chaque être forme une partie aliquote (nombres fractionnaires). Quant aux nombres incommensurables, on ne peut, croyons nous, les définir que d'une manière négative : l'exemple de la diagonale du carré introduit au n° 6, suppose que l'on puisse établir la géométrie euclidienne sans une théorie préliminaire des incommensurables, ce qui semble très difficile, sinon impossible.

Première partie : DES NOMBRES ENTIERS (pp. 7-225). L'ordre suivi est celui-ci : 1. Numération. 2. Addition. 3. Soustraction. 4. Multiplication et élévation aux puissances. 5. Égalités et inégalités. 6. Division. 7. Extraction des racines (carrée, cubique, m^ième^). 8. Exponentation (recherche de l'exposant dans une équation $a^x = b$). 9. Caractères de divisibilité. 10. Plus grand commun diviseur. 11. Plus petit commun multiple. 12. Nombres premiers et diviseurs des nombres. 13. Théorèmes de Fermat et de Wilson; recherche de φ (N). 14. Exercices après les n^os^ 1-5, 6, 7, 9, 10-11, 12 et 13.

Au point de vue de la rigueur, l'exposition est toujours irréprochable, mais elle est presque toujours trop abstraite et trop longue; les théorèmes principaux sont disséqués en propositions distinctes trop nombreuses; la marche naturelle de l'esprit, dans les démonstrations, est voilée au lieu d'être mise en évidence. Trop souvent, l'auteur descend du cas général aux cas particuliers, au lieu de faire

l'inverse. Ainsi, il expose la numération dans un système à base B, avant les numérations décimale, binaire et duodécimale; le caractère de divisibilité par 2 dépend d'un théorème sur la divisibilité par un nombre quelconque; avant d'arriver au calcul de la différence entre deux nombres entiers, le lecteur voit passer devant lui quatorze théorèmes sur les polynômes arithmétiques $(a - b + c - d - e)$. En général, l'ouvrage contient trop de théorèmes relatifs à ces polynômes : leur vraie place est en algèbre, où il est plus facile de les démontrer brièvement, précisément parce que l'on est en algèbre, et qu'il n'y a pas de restriction à faire sur l'ordre de grandeur des quantités a, b, c, d, e. Si, en arithmétique, l'on ne se borne pas au strict nécessaire dans l'emploi des polynômes écrits avec des lettres, rien n'empêche d'y introduire même la recherche des racines entières et des racines fractionnaires des équations numériques : elle ne dépend, en effet, que de la divisibilité des nombres entiers.

Seconde partie. DES NOMBRES FRACTIONNAIRES (pp. 227-330). 1. Préliminaires. Simplification des fractions. Réduction au même dénominateur. 2. Somme, différence, produit de plusieurs nombres commensurables; puissance $m^{ième}$ d'un nombre commensurable. Quotient exact de deux membres commensurables. 3. Fractions de fractions ou fractions complexes. Exercices. 4. Quotient approché à moins d'une fraction près de deux nombres commensurables. 5. Racine $m^{ième}$ approchée à moins d'une fraction près d'un nombre commensurable. Exercices. 6. Des nombres décimaux. 7. Premiers principes de la méthode des limites. 8. Théorie des fractions périodiques. Exercices.

Nous avons les mêmes réserves à faire ici que pour la première section. Mais nous pouvons signaler comme étant très bien traitées toutes les questions des n^os^ 4, 5 et 7; la théorie des fractions périodiques (n° 8) est exposée d'une manière un peu longue, mais avec rigueur et d'une manière complète.

Troisième partie : DES NOMBRES INCOMMENSURABLES (pp. 331-395). 1. Détermination d'un nombre commensurable ou non, au moyen d'une suite convergente. 2. Somme, différence, produit, quotient de deux nombres commensurables ou non. 3 Racine carrée, racine $m^{ième}$, exacte d'un nombre commensurable, ou incommensurable.

Ici nous n'avons que des éloges à donner à l'ouvrage de M. Tartinville. Abandonnant la définition géométrique des incommensurables, il adopte la définition purement arithmétique, et établit avec rigueur les théorèmes relatifs aux opérations fondamentales, sujet qui n'est qu'esquissé dans l'Arithmétique de Bertrand et dans la plupart des manuels. Çà et là, par exemple, au n° 739, on pourrait introduire des simplifications.

Nous croyons aussi qu'il y aurait avantage à éviter la considération des suites convergentes telle qu'elles sont définies au n° 748 (une suite $u_1, u_2, u_3, \ldots$ est dite *convergente*, si la différence de deux termes quelconques, dont le premier est suffisamment éloigné, est, en valeur absolue, inférieure à tout nombre donné, si petit qu'il soit); il suffit de recourir à des suites toujours croissantes ou toujours décroissantes, pour établir toute l'arithmétique des incommensurables.

Quatrième partie: RADICAUX, PROPORTIONS, APPROXIMATIONS (pp. 397-507). 1. Calcul des radicaux : simplification, produit, puissance, quotient, racine. Puissances fractionnaires. Exercices. 2. Rapports des nombres et des grandeurs. 3. Proportions entre nombres commensurables ou incommensurables. Exercices. 4. Approximations : méthode des erreurs absolues, méthode des erreurs relatives (somme et différence ; produit, puissance, quotient, racine). Exercices.

Cette quatrième partie nous semble traitée avec le même soin que la troisième et, en général, sans longueurs inutiles.

En résumé, au point de vue de la rigueur, l'ouvrage de M. Tartinville nous semble digne de sa *Théorie des Equations et des Inéquations du premier et du second degré à une inconnue;* mais, en général, il est trop abstrait et trop long. Il ne peut guère être mis utilement entre les mains des élèves : ils s'égareraient dans le dédale des théorèmes trop particuliers dont il est encombré ; mais les professeurs qui n'ont pas eu encore l'occasion de lire un exposé complet de la théorie purement arithmétique des incommensurables le consulteront avec fruit. Nous appelons aussi leur attention sur les exercices bien choisis que l'on trouve après chacune des subdivisions principales du livre. (P. M. et J. N).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 195.

(Voir *Mathesis*, t. II, p. 231 et t. VIII, p. 104.)

L'expression symbolique

$$\frac{(H\alpha)^n - (H + \alpha - 1)^n}{\alpha^n}$$

dans laquelle H_p *représente la somme des p premiers termes de la série harmonique, tend vers le logarithme népérien de* α, *lorsque n croît indéfiniment.* (E. CESÀRO.)

On démontre sans peine l'égalité symbolique

$$(1 - H)^n = -\frac{1}{n}, \qquad (1)$$

qui engendre, par les règles connues du *Calcul des différences*, l'égalité plus générale

$$H^i(1 - H)^n = -\frac{i!\,(n-1)!}{(i+n)!}. \qquad (2)$$

Cela étant, l'identité

$$[H+(1-H)x]^n=\sum_{i=0}^{i=n} C_{n,i}\,H^{n-i}(1-H)^i x^i$$

devient

$$H^n-[H+(1-H)x]^n=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n};$$

puis, en remplaçant x par $\frac{\alpha-1}{\alpha}$, on obtient, pour n infini,

$$\lim\frac{(H\alpha)^n-(H+\alpha-1)^n}{\alpha^n}=\log\alpha, \tag{3}$$

pourvu que α ne soit pas inférieur à $\frac{1}{2}$.

Remarque. L'identité (1) suffit pour la démonstration de (3), sans qu'il y ait besoin de recourir à (2). On a, en effet,

$$[1+(H-1)x]^n=C_{n,1}\,x-C_{n,2}\frac{x^2}{2}+C_{n,3}\frac{x^3}{3}-\cdots,$$

et l'on voit que le second membre ne diffère pas de

$$\int_0^x\frac{1-(1-x)^n}{x}\,dx=\int_z^1\frac{1-z^n}{1-z}\,dz.$$

Par suite,

$$\left(1+\frac{H-1}{\alpha}\right)^n=\frac{\alpha-(\alpha-1)}{\alpha}+\frac{\alpha^2-(\alpha-1)^2}{2\alpha^2}+\cdots+\frac{\alpha^n-(\alpha-1)^n}{n\alpha^n};$$

d'où, pour n infini et $\alpha\geq\frac{1}{2}$,

$$lim\left[H_n-\left(1+\frac{H-1}{\alpha}\right)^n\right]=\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{i}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^i=\log\alpha.$$

(E. Cesàro.)

Question 385.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 231 et t. VIII, p. 278.)

Soit $p_r=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^r)$; *démontrer l'identité*

$$\frac{1}{p_r}-\frac{x}{p_1p_{r-1}}+\frac{x^3}{p_2p_{r-2}}-\cdots\pm\frac{x^{\frac{1}{2}r(r+1)}}{p_r}=1. \quad \text{(E. Cesàro.)}$$

Solution par MM. Klompers *et* Déprez. « Soient c_i la somme des produits i à i des quantités $q, q^2, q^3, \ldots, q^n$. Si, à ces quantités l'on adjoint q^{n+1},

la somme considérée devient $c_i + q^{n+1}c_{i-1}$. D'autre part, si l'on distingue, dans cette même somme, les produits qui ne contiennent pas le premier terme, de ceux qui le contiennent, on voit immédiatement qu'elle est égale à $q^i c_i + q.\ q^{i-1}c_{i-1}$. En égalant ces valeurs, on obtient

$$(1-q^i)\,c_i = q^i(1-q^{n-i+1})c_{i-1};$$

changeant i en $i-1$, $i-2$, $i-3$, $\cdots$, et multipliant, on trouve

$$c_i = q^{\frac{i}{2}(i+1)}\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-i+1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^i)} = q^{\frac{i}{2}(i+1)}\lambda_{n,i}.$$

Considérons la fonction

$$F_n(x) = (1-qx)(1-q^2x)\cdots(1-q^nx).$$

D'après ce que l'on vient de dire, on a

$$F_n(x) = 1 - \lambda_{n,1}qx + \lambda_{n,2}q^3x^2 - \cdots \pm \lambda_{n,n}q^{\frac{1}{2}n(n+1)n}x. \quad (1)$$

(Cesàro, *Mathesis*, t. VI, p. 126.)

Dans la formule (1), faisons $x = 1$ et changeons q en x; il vient

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^n) = 1 - \lambda_{n,1}x + \lambda_{n,2}x^3 - \cdots \pm \lambda_{n,n}x^{\frac{1}{2}n(n+1)}, \quad (2)$$

où

$$\lambda_{n,i} = \frac{(1-x^n)(1-x^{n-1})\cdots(1-x^{n-i+1})}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^i)}.$$

Divisant les deux membres de (2) par p_n, et observant que

$$\lambda_{n,1} = \frac{p_n}{p_1 p_{n-1}}, \quad \lambda_{n,2} = \frac{p_n}{p_2 p_{n-2}}, \quad \cdots, \quad \lambda_{n,n} = 1,$$

on trouve la formule proposée.

×Question 436.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 94.)

On donne dans un plan horizontal, deux tiges sur lesquelles roule une surface de révolution dont la courbe méridienne admet deux axes de symétrie, et dont l'équateur reste dans le plan vertical de la bissectrice de l'angle que forment les tiges. Le lieu du centre de la surface mobile est une courbe de même nature que la méridienne.

Définir cette courbe lorsque la surface de révolution est un cône (le double cône des expériences de physique), une sphère, ou un ellipsoïde. (H. Brocard.)

Solution par M. Anderson (Galway). Soient OU, OV les deux tiges, OX la bissectrice de leur angle, OY une verticale. Dans l'une de ses positions, la surface de révolution repose sur OU, OV aux points A, B et son centre se trouve en O', sur la verticale passant au milieu C de la droite AB. Les axes de symétrie de la méridienne sont une parallèle O'X' à AB, et la verticale O'C. Désignons par $x' = CA$, $y' = O'C$ les coordonnées du point A de la méridienne, par rapport aux axes O'X', O'C, et représentons par $x = OC$, $y = O'C$ les coordonnées de O' par rapport aux axes OX, OY. Si θ est l'angle XOV, on a

$$y' = y, \quad x' = x \operatorname{tg} \theta.$$

Ces formules indiquent la relation qui existe entre la méridienne et le lieu de O'.

Lorsque la surface mobile est une cône, le point O' décrit une droite; lorsque c'est une sphère ou une ellipsoïde, le lieu de O' est une ellipse ayant pour axes $(R \cot \theta, R)$, $(a \cot \theta, b)$.

×Question 645.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 104.)

Soient I, I_a, I_b, I_c *les centres des cercles tangents aux trois côtés du triangle* ABC, *et soient* Γ, Γ_a, Γ_b, Γ_c *les points de concours des droites joignant* A, B, C, *aux points de contact des côtés opposés avec l'un des cercles.*

Démontrer que les droites $I\Gamma$, $I_a\Gamma_a$, $I_b\Gamma_b$, $I_c\Gamma_c$ *concourent en un même point* T *et trouver les coordonnées de ce point.* (E. Lemoine.)

Solution par M. Déprez. Prenons ABC pour triangle de référence. Les coordonnées barycentriques des points considérés sont

I ··· sin A, sin B, sin C; $\quad \Gamma \cdots \operatorname{tg} \frac{1}{2}A, \operatorname{tg} \frac{1}{2}B, \operatorname{tg} \frac{1}{2}C$;

I_a ··· — sin A, sin B, sin C; $\quad \Gamma_a \cdots - \operatorname{tg} \frac{1}{2}A, \cot \frac{1}{2}B, \cot \frac{1}{2}C$; etc.

On en déduit pour les équations des droites $I\Gamma$, $I_a\Gamma_a$:

$$\alpha \cot \frac{A}{2}(\cos B - \cos C) + \beta \cot \frac{B}{2}(\cos C - \cos A) + \gamma \cot \frac{C}{2}(\cos A - \cos B) = 0,$$

$$\alpha \cot \frac{A}{2}(\cos B - \cos C) + \beta \operatorname{tg} \frac{B}{2}(\cos C + \cos A) + \gamma \operatorname{tg} \frac{C}{2}(\cos A + \cos B) = 0,$$

Résolvons ces équations par rapport à α, β, γ. En retranchant la seconde de la première et remplaçant cot, tg par $\frac{\cos}{\sin}$, $\frac{\sin}{\cos}$, on obtient

$$\frac{\beta}{\sin B}\{(1+\cos B)(\cos C-\cos A)+(1-\cos B)(\cos C+\cos A)\}$$

$$+\frac{\gamma}{\sin C}\{(1+\cos C)(\cos A-\cos B)-(1-\cos C)(\cos A+\cos B)\}=0,$$

ou, en développant les produits indiqués,

$$\frac{\beta}{\sin B(\cos B-\cos A\cos C)}=\frac{\gamma}{\sin C(\cos C-\cos A\cos B)}.$$

En éliminant β entre les équations de $I\Gamma$, $I_a\Gamma_a$ et employant ensuite les mêmes transformations que tantôt, on voit que ces droites se coupent au point T qui a pour coordonnées barycentriques

$$\sin A(\cos A-\cos B\cos C),\ \sin B(\cos B-\cos C\cos A),\ \sin C(\cos C-\cos A\cos B),$$

ou

$$-\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C,\ \operatorname{tg} A-\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C,\ \operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B-\operatorname{tg} C.$$

Les coordonnées normales de ce point sont

$$\cos A-\cos B\cos C,\quad \cos B-\cos C\cos A,\quad \cos C-\cos A\cos B;$$

on en déduit qu'il est le symétrique de l'orthocentre par rapport au centre du cercle circonscrit à ABC, l'anticomplémentaire de H et le centre du cercle de Longchamps.

Les valeurs de ces coordonnées montrent que les droites $I_b\Gamma_b$, $I_c\Gamma_c$ passent par le même point.

Remarque. Plus généralement, soient E, E_a, E_b, E_c quatre points associés, centres de quatre coniques inscrites au triangle, et soient F, F_a, F_b, F_c les points de concours des droites joignant A, B, C aux points de contact des côtés opposés avec l'une des coniques : les quatre droites EF, E_aF_a, E_bF_b, E_cF_c concourent en un même point.

La question 645 a été également résolue par MM. Boutin et de Bőzóky.

Les coordonnées normales de T par rapport au triangle $I_aI_bI_c$ sont

$$\sin^2\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}, \text{ ect.} \qquad \text{(Boutin et Dépret.)}$$

×Question 657.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 207.)

Si m est impair, transformer $\cos^{m-1}x\sin x$ *en*

$$A_1\sin x + A_3\sin 3x + \cdots + A_m\sin mx.$$

Quelles sont les valeurs des coefficients ? (E. CATALAN.)

Solution par MM. KLOMPERS, DENYS, VERNIORY *et* DE BŐZÓKY. On a

$$\cos x = \frac{(\cos x + i\sin x) + (\cos x - i\sin x)}{2};$$

$$2^m\cos^m x = (\cos x + i\sin x)^m + C_{m,1}(\cos x + i\sin x)^{m-1}(\cos x - i\sin x) + \cdots$$

Supposant m impair et observant que

$$(\cos x + i\sin x)(\cos x - i\sin x) = 1, \quad (\cos x \pm i\sin x)^p = \cos px \pm i\sin px,$$

on trouve aisément

$$2^m\cos^m x = (\cos mx + i\sin mx) + C_{m,1}[\cos(m-2)x + \sin(m-2)x] + \cdots +$$
$$C_{m,\frac{1}{2}(m-1)}(\cos x + i\sin x) + C_{m,\frac{1}{2}(m+1)}(\cos x + i\sin x) + \cdots + (\cos mx - i\sin mx).$$

D'où, en rapprochant les termes équidistants des extrêmes

$$2^m\cos^m x = 2\cos mx + 2C_{m,1}\cos(m-2)x + \cdots + 2C_{m,\frac{m-1}{2}}\cos x.$$

Cette égalité étant dérivée par rapport à x donne

$$2^{m-1}m\cos^{m-1}x\sin x$$
$$= m\sin mx + (m-2)C_{m,1}\sin(m-2)x + \cdots + C_{m,\frac{1}{2}(m-1)}\sin x.$$

Par conséquent

$$A_m = \frac{1}{2^{m-1}}, \quad A_{m-2} = \frac{m-2}{2^{m-1}}, \quad A_{m-4} = \frac{(m-4)C_{m,2}}{2^{m-1}.m}, \cdots$$

$$A_{m-2p} = (m-2p)\frac{C_{m,p}}{2^{m-1}.m}.$$

NOTE. Voici une solution plus élémentaire. Pour abréger, nous posons $u = \cos x + i\sin x$, $v = \cos x - i\sin x$, $q = 2n = m-1$. On a successivement, en désignant par $q_1, q_2, q_3, \cdots$ les cœfficients du développement de $(u+v)^q$,

$$\cos^{m-1}x\sin x = \frac{1}{2^{m-1}}(u+v)^{m-1} \times \frac{1}{2i}(u-v) = \frac{1}{2^m i}T,$$

$$T = (u-v)[u^q + q_1u^{q-1}v + q_2u^{q-2}v^2 + \cdots + q_2u^2v^{q-2} + q_1uv^{q-1} + v^q] =$$
$$u^{q+1} + (q_1-1)u^qv + (q_2-q_1)u^{q-1}v^2 + \cdots + (q_n-q_{n-1})u^{n+1}v^n +$$
$$(q_{n-1}-q_n)u^nv^{n+1} + \cdots + (q_1-q_2)u^2v^{q-1} + (1-q_1)uv^q - v^{q+1}$$

et, en rapprochant les termes équidistants des extrêmes et tenant compte des relations (GELIN, *Trig.*, n° 220)

$$uv=1,\quad u^k=\cos kx+i\sin kx,\quad v^k=\cos kx-i\sin kx,\quad u^k-v^k=2i\sin kx,$$

$$T=[u^{q_1+1}-v^{q_1+1}]+(q_1-1)uv[u^{q_1-1}-v^{q_1-1}]+(q_2-q_1)u^2v^2[u^{q_1-2}-v^{q_1-2}]+$$
$$\cdots+(q_n-q_{n-1})u^nv^n(u-v);$$

$$\cos^{m-1}x\sin x=\frac{1}{2^{m-1}}[\sin mx+(q_1-1)\sin(m-2)x+$$
$$(q_2-q_1)\sin(m-4)x+\cdots+(q_n-q_{n-1})\sin x].$$

Cette formule ne diffère pas de celle qui est donnée plus haut. (P.M.)

Question 671.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 24.)

Trouver les racines de l'équation $X_{2p}=0$, *les fonctions* X_n *étant définies par la formule*

$$X_{n+2}=xX_n-X_{n-2}.$$

On supposera

$$1^\circ\ X_1=1,\quad X_3=x-1;\quad 2^\circ\ X_1=1,\quad X_3=x+1.$$

(V. JAMET.)

Solution par M. JEAN-GASTON DARBOUX, *élève de Mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand* (Paris). On sait que, si des quantités $u_1, u_2, \ldots, u_n$, sont liées entre elles par la relation

$$au_n+bu_{n-1}+\cdots+lu_{n-p}=0,$$

on a

$$u_n=A\alpha^n+B\beta^n+\cdots+L\lambda^n$$

A, B. . . L étant des constantes et $\alpha, \beta \ldots \lambda$ étant les racines de l'équation

$$ax^p+bx^{p-1}+\cdots+l=0,$$

que Lagrange appelait *équation génératrice*.

Nous allons, à l'aide de ce qui précède, déterminer X_{2p+1}. L'équation génératrice est, dans le cas particulier qui nous occupe,

$$y^4-xy^2+1=0.$$

Soient α et β les racines de cette équation résolue par rapport à y^2. Nous aurons, ε désignant ± 1,

$$X_{2p+1} = A\sqrt{\alpha^{2p+1}} + B\sqrt{\beta^{2p+1}},$$

$$X_1 = 1 = A\sqrt{\alpha} + B\sqrt{\beta},$$

$$X_2 = x + \varepsilon = A\alpha\sqrt{\alpha} + B\beta\sqrt{\beta}.$$

Éliminant A et B entre ces trois équations, on obtient

$$X_{2p+1} = \frac{\alpha^p(\beta - x - \varepsilon) - \beta^p(\alpha - x - \varepsilon)}{\beta - \alpha}. \qquad (1)$$

Remarquant que $\alpha + \beta = x$, on peut mettre l'équation (1) sous la forme

$$X_{2p+1} = \frac{-\alpha^p(\alpha + \varepsilon) + \beta^p(\beta + \varepsilon)}{\beta - \alpha}.$$

Multiplions haut et bas par α. Puisque $\alpha\beta = 1$, nous aurons

$$X_{2p+1} = \frac{-\alpha^{p+1}(\alpha + \varepsilon) + \beta^p(1 + \varepsilon\alpha)}{1 - \alpha^2}.$$

Mais $\varepsilon^2 = 1$; par suite,

$$X_{2p+1} = \frac{-\alpha^{p+1}(\alpha + \varepsilon) + \beta^p\varepsilon(\alpha + \varepsilon)}{(\varepsilon - \alpha)(\varepsilon + \alpha)} = \frac{\varepsilon\beta^p - \alpha^{p+1}}{\varepsilon - \alpha}.$$

L'équation à résoudre est donc

$$\frac{\alpha^{p+1} - \varepsilon\beta^p}{\alpha - \varepsilon} = 0.$$

Comme α ne peut être nul, nous pouvons écrire

$$\alpha^p\frac{\alpha^{p+1} - \varepsilon\beta^p}{\alpha - \varepsilon} = \frac{\alpha^{2p+1} - \varepsilon}{\alpha - \varepsilon} = 0.$$

Nous allons maintenant distinguer les deux cas :

1° $\varepsilon = -1$, $X_1 = 1, X_2 = x - 1$. L'équation devient

$$\frac{\alpha^{2p+1} + 1}{\alpha + 1} = 0.$$

Les racines de cette équation sont celles de $\alpha^{2p+1} = -1$, sauf la racine $\alpha = -1$. Elles sont donc données par la formule

$$\alpha = \cos\frac{2k\pi}{2p+1} + i\sin\frac{2k\pi}{2p+1},$$

dans laquelle on donnera à k les valeurs $0, 1, 2, \ldots, 2p$.

L'équation $X_{2p+1} = 0$ résolue par rapport à α a donc $2p$ racines. Comme x est donné en fonction de α par une équation réciproque

$$\alpha^2 - \alpha x + 1 = 0,$$

x n'aura que p valeurs. On déduit, de l'équation qui précède,

$$x = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha},$$

ou, en remplaçant α par sa valeur,

$$x = -2\cos\frac{2k\pi}{2p+1}.$$

On ne devra pas dans cette relation donner à k les valeurs de la forme

$$m(2p+1).$$

2° $\varepsilon = 1$; $X_1 = 1$; $X_2 = x + 1$. L'équation devient

$$\frac{\alpha^{2p+1} - 1}{\alpha - 1} = 0.$$

Ce second cas se traite comme le premier. On a

$$\alpha = \cos\frac{2k\pi}{2p+1} + i\sin\frac{2k\pi}{2p+1}$$

k n'étant pas un multiple de $2p + 1$, et, par suite,

$$x = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} = 2\cos\frac{2k\pi}{2p+1}.$$

NOTE. Voici les principes invoqués par M. J. G. DARBOUX.

Soient $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, $(\beta_0, \beta_1, \ldots)$, $\ldots$ $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots)$ des suites de quantités liées par la loi de récurrence

$$au_n + bu_{n-1} + \cdots + lu_{n-p} = 0, \qquad (a)$$

et différant par les *valeurs initiales*

$$(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}), \quad (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{p-1}), \quad \ldots, \quad (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}).$$

Les quantités $(\mu_0, \mu_1, \ldots)$ définies par l'égalité

$$\mu_k = A\alpha_k + B\beta_k + \cdots + L\lambda_k, \qquad (b)$$

satisfont également à la relation (a), quels que soient les coefficients A, B, C. De plus, si l'on connaît p systèmes

$$(\alpha_0, \alpha_1, \ldots), \quad (\beta_0, \beta_1, \ldots), \quad \ldots, \quad (\lambda_0, \lambda_1, \ldots)$$

satisfaisant à la relation (*a*) et ***réellement distincts***, tout autre système $(\mu_0, \mu_1, \ldots)$ qui vérifie cette relation est de la forme (*b*); car, on peut choisir A, B, ..., L de manière que l'égalité (*b*) ait lieu pour

$$k = 0, \quad 1, 2, \quad \ldots, p-1.$$

Or, p de ces systèmes peuvent se former immédiatement : soient $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ les racines de l'équation

$$ax^n + bx^{n-1} + \cdots + l = 0,$$

supposées distinctes; les systèmes de quantités

$$(\alpha^0, \alpha, \alpha^2, \ldots), \quad (\beta^0, \beta, \beta^2, \ldots), \quad \ldots \quad (\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \ldots)$$

obéissent à la loi de récurrence (*a*).

×Question 674.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 48.)

Si les diagonales AD, BE, CF ***d'un hexagone*** ABCDEF ***sont égales et que les côtés soient parallèles deux à deux, l'hexagone est inscriptible à une circonférence.*** (E. CATALAN.)

Solution par MM. FRANÇOIS (La Haye), SOHIE, RUSSO, OLIVIER (collège de Dinant), DECAMPS, BELLENS et LALISSE. Soient α, β, γ les points d'intersection de BE et CF, CF et AD, AD et BE. La figure ABDE est un trapèze isoscèle; car AB et DE sont parallèles, AD et BE sont des lignes égales. Il résulte de là que la bissectrice de l'angle AγB est perpendiculaire aux milieux des droites AB, DE. Désignons par O le point de concours des bissectrices intérieures du triangle $\alpha\beta\gamma$; ce point est à l'intersection des perpendiculaires élevées aux milieux des six côtés de l'hexagone, et par suite, il est à égale distance des six sommets.

QUESTIONS D'EXAMEN.

436. Soient AOB, COD deux diamètres d'un cercle. Déterminer l'angle AOC par la condition que les segments circulaires sous-tendus par les cordes AC, AD, en tournant autour de AOB, engendrent des volumes qui soient dans le rapport 1 : 3. (***Baccalauréat***, Paris, 1889.)

427. Étant données les deux équations

$$x^2+2x+q=0, \quad (1+q)(x^2+2x+q)-2(q-1)(x^2+1)=0,$$

montrer que les racines de la seconde sont imaginaires lorsque celles de la première sont réelles et inégales et inversement.

(*Bulletin scientifique* de LEBON.)

428. Si on désigne par R_A, R'_A les rayons de deux circonférences tangentes aux côtés de l'angle A du triangle ABC et à la circonférence ABC, la première intérieurement et la seconde extérieurement, on aura

$$\frac{R_A}{R'_A}+\frac{R_B}{R'_B}+\frac{R_C}{R'_C}=1.$$

En prenant le sommet A comme centre d'inversion, on trouve facilement que

$$\frac{R_A}{R'_A}=\frac{r}{r_a}.$$

Or,

$$\frac{r}{r_a}+\frac{r}{r_b}+\frac{r}{r_c}=1, \text{ etc.}$$ (AD. MINEUR.)

429. Étant donné un cercle O, on abaisse d'un point M de sa circonférence, une perpendiculaire MP sur un rayon fixe OA, puis on ajoute au rayon OM, $MN = n.MP$. Le lieu de N est un limaçon de Pascal.

(KEELHOFF.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

***681.** Soient A', B', C' les points de rencontre de la circonférence circonscrite à ABC avec les *médianes* (ou les *hauteurs*) de ABC. Les droites joignant le point de Tarry aux sommets de ABC rencontrent les côtés correspondants de A'B'C' sur une droite qui passe par le *barycentre* (ou l'*orthocentre*) et par le point de Lemoine de ABC. (E. CESÀRO.)

682. Résoudre, complètement, l'équation

$$(x^3-3qx+p^3-3pq)^3-4(px+q)^3=0.$$

(E. CATALAN.)

***683.** Si m, n, p, r sont des nombres entiers quelconques, le nombre

$$N=(13p-4^n r)\,10^{6m+n}+r$$

est divisible par 13. (CHRISTIE.)

COMPLÉMENT DE THÉORIE DES POLYGONES HARMONIQUES(*);

par M. J. CASEY, professeur à l'Université catholique de Dublin.

1. *Soient* O *le centre de la circonférence circonscrite à un polygone harmonique de n côtés;* ω *l'angle de Brocard;* S, S′ *les centres d'inversion. On a la relation*

$$\frac{OS}{OS'} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n} - \omega\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n} + \omega\right)}. \qquad (1)$$

Désignons par X la circonférence circonscrite, par X′ la circonférence de Brocard, par K le centre des symédianes. S, S′ étant les points-limites de X, X′, l'axe radical QL passe au milieu Q de SS′. Cet axe est la figure inverse de X′ par rapport à X; donc $OQ = R^2 : \delta$, R étant le rayon de X et δ la distance OK. Puisque S′ est un point limite,

$$\overline{QS'}^2 = \overline{OQ}^2 - R^2 = \frac{R^2}{\delta^2}(R^2 - \delta^2).$$

En combinant cette relation avec la suivante (voir *Mathesis*, IX, p. 40)

$$\delta^2 = R^2\left(1 - \operatorname{tg}^2\omega \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}\right),$$

on trouve

$$QS' = \frac{R^2}{\delta}\operatorname{tg}\omega \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = OQ \operatorname{tg}\omega \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}. \qquad (2)$$

Ensuite,

$$OS = OQ + QS = OQ\left(1 + \operatorname{tg}\omega \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right), \quad OS' = OQ\left(1 - \operatorname{tg}\omega \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right),$$

d'où l'on tire l'égalité (1).

2. *Soient* Ω, Ω' *les points de Brocard; on a*

$$\textit{angle}\ S\Omega S' = \frac{2\pi}{n}.$$

Soit L le point de rencontre de la droite $O\Omega$ avec l'axe radical de X,

(*) Ce complément de la théorie des polygones harmoniques est encore inédit. M. Casey nous l'a fait parvenir en 1889. Les renvois se rapportent à la traduction de la *Géométrie récente* (*Mathesis*, IX, pp. 5-70). (RÉD.)

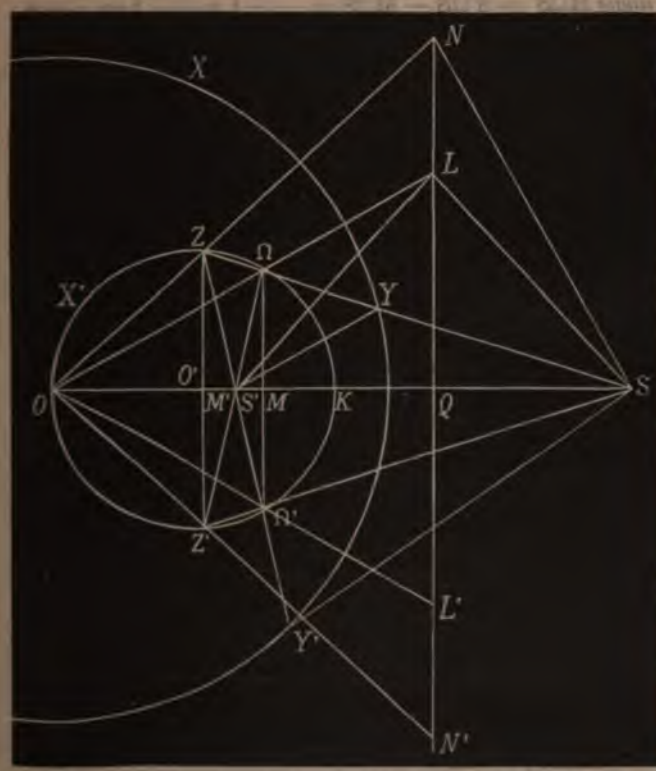
X'; joignons L à S, S'. L'angle LOQ étant égal à ω, on a $QL = OQ \operatorname{tg} \omega$; par suite, la formule (2) donne

$$QS' = QL \operatorname{tg} \frac{\pi}{n},$$

d'où l'on conclut

$$\textit{angle}\, QLS' = \frac{\pi}{n}, \quad \textit{angle}\, SLS' = \frac{2\pi}{n}.$$

QL et X' étant des figures inverses par rapport à X, on a $O\Omega . OL = R^2$. S, S' étant les points-limites de X, X', on a également $OS . OS' = R^2$.



Par conséquent, $O\Omega . OL = OS . OS'$; les points Ω, L, S, S'_1 appartiennent donc à une même circonférence, et

$$\textit{angle}\, S'\Omega S = S'LS = \frac{2\pi}{n}. \qquad (3)$$

3. *Les angles à la base des triangles isoscèles* $S\Omega\Omega'$, $S'\Omega\Omega'$ *valent respectivement,* $\frac{\pi}{n}+\omega$, $\frac{\pi}{n}-\omega$.

Soit M le milieu de $\Omega\Omega'$. Le quadrilatère $S'SL\Omega$ étant inscriptible on trouve successivement,

$$\text{angle } M\Omega S = \frac{\pi}{2} - MS\Omega = \frac{\pi}{2} - S'L\Omega = \frac{\pi}{2} - (\Omega LQ - S'LQ)$$

$$= \Omega OQ + S'LQ = \omega + \frac{\pi}{n};$$

$$\text{angle } M\Omega S' = S'\Omega S - M\Omega S = \frac{2\pi}{n} - \left(\omega + \frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{n} - \omega.$$

Cor. *La différence des angles aux sommets des triangles isosc* $S\Omega\Omega'$, $S'\Omega\Omega'$ *égale* 4ω.

4. *Soient* Z, Z' *les points de rencontre des droites* $S\Omega$, $S\Omega'$ *avec la c conférence de Brocard, on a*

$$\text{angle } ZOZ' = \frac{2\pi}{n}.$$

En effet, les droites $\Omega Z'$, $\Omega' Z$ se coupent au point S'; le quadrilat OZΩZ' étant inscrit, on a

$$\text{angle } ZOZ' = S'\Omega S = \frac{2\pi}{n}.$$

5. *Dans la même figure,*

$$\frac{S\Omega}{SZ} = \frac{\sin 2\omega}{\sin \frac{2\pi}{n}}.$$

Car, S'S étant la bissectrice extérieure du triangle $ZS'\Omega$, on a :

$$\frac{S\Omega}{SZ} = \frac{S'\Omega}{S'Z} = \frac{\sin S'Z\Omega}{\sin S'\Omega Z} = \frac{\sin \Omega O\Omega'}{\sin S'\Omega S} = \frac{\sin 2\omega}{\sin \frac{2\pi}{n}}.$$

6. *Soient* N, N' *les points de rencontre de* OZ, OZ' *avec l'axe radi de* X, X'; *ces points sont les orthocentres des triangles* OLS, OLS'.

On a vu (§§ 4 et 2) que l'angle $ZOS = \frac{\pi}{n} = SLQ$; les côtés LQ, étant perpendiculaires, les autres côtés SL et ON sont également perp diculaires, et SN est une hauteur du triangle OLS.

Cor. 1. N, N′ sont aussi les orthocentres des triangles OS′L′, OL′S.

Cor. 2. L est l'orthocentre de chacun des triangles ONS, ON′S′, et L′ est l'orthocentre de chacun des triangles ON′S, ONS′.

7. *Si* Y *est le point de rencontre de la circonférence* X *avec la droite* ΩS, *et que* θ *désigne l'angle* SS′Y, *on a*

$$\cos^2\theta = \sin^2\frac{\pi}{n} + \sin^2\omega. \qquad (4)$$

Les triangles S′OY, YOS étant semblables, on peut écrire

$$\frac{\overline{SY}^2}{\overline{S'Y}^2} = \frac{\overline{OS}^2}{\overline{OY}^2} = \frac{\overline{OS}^2}{OS.OS'} = \frac{OS}{OS'}.$$

D'autre part,

$$\frac{\overline{SY}^2}{\overline{S'Y'}^2} = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2 S'SY} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}+\omega\right)}, \quad \frac{OS}{OS'} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}-\omega\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}+\omega\right)};$$

par conséquent,

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}+\omega\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}-\omega\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}+\omega\right)}, \quad \sin^2\theta = \cos\left(\frac{\pi}{n}-\omega\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}+\omega\right),$$

d'où la formule (4).

Cor. *Si* S′Ω′ *coupe* X *en* Y′, *la droite* SY′ *est parallèle à* S′Y.

Car on démontre de la même manière, que

$$\cos^2 S'SY' = \sin^2\frac{\pi}{n} + \sin^2\omega.$$

Par suite, angle SS′Y = Y′SS′.

8. *Soient* M, M′ *les milieux des droites* ΩΩ′, ZZ′; *on a*

$$OM.OM' = R^2\cos\left(\frac{\pi}{n}+\omega\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}-\omega\right).$$

Car

$$OM = O\Omega\cos\omega = \delta\cos^2\omega, \quad OM' = \delta\cos^2\frac{\pi}{n},$$

d'où

$$OM.OM' = \delta^2 \cos^2\omega \cos^2\frac{\pi}{n} = R^2\left(1 - \operatorname{tg}^2\omega \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}\right)\cos^2\omega\cos^2\frac{\pi}{n}$$
$$= R^2 \cos\left(\frac{\pi}{n} + \omega\right)\cos\left(\frac{\pi}{n} - \omega\right).$$

Cor. Soit O' le centre du cercle de Brocard, on a

$$\Omega S = \frac{\delta \sin 2\omega}{2\cos\left(\frac{\pi}{n} + \omega\right)}, \quad ZS = \frac{\delta \sin\frac{2\pi}{n}}{2\cos\left(\frac{\pi}{n} + \omega\right)},$$
$$O'M.O'M' = \frac{1}{4}\delta^2 \cos 2\omega \cos\frac{2\pi}{n}.$$

La première de ces égalités résulte de

$$\Omega S \cos\left(\frac{\pi}{n} + \omega\right) = \Omega M = \delta \sin\omega\cos\omega.$$

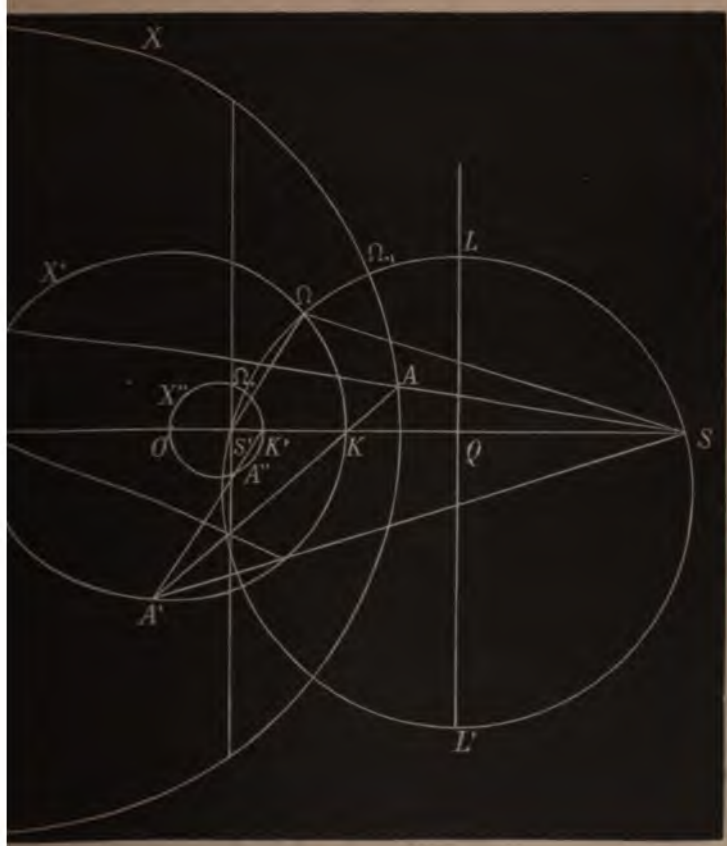
9. Considérons un polygone harmonique P d'un nombre impair de côtés. Soient X la circonférence circonscrite, O le centre de X, K le centre des symédianes, X' la circonférence de Brocard (diamètre OK). A étant un sommet quelconque de P, menons la ligne AK qui coupe X' en A'; A' est le point double des figures directement semblables construites sur les côtés BA, AC de P qui aboutissent en A. Les points analogues à A' sont les sommets d'un polygone harmonique P' du même nombre de côtés que P. P' a reçu le nom de *polygone de similitude de* P.

De même que P, P' a un centre des symédianes K', une circonférence de Brocard X'', un polygone de similitude P''. Les centres d'inversion S, S' de P sont les points-limites du faisceau de cercles dont font partie X, X'; ce sont également les centres d'inversion de P' (p. 48, prop. 13). Par suite, X, X', X'' ont même axe radical. Pour avoir X'', il suffit donc de faire passer par le centre O' de X' une circonférence coaxiale avec X, X'; le point où elle rencontre la seconde fois OO' est le centre des symédianes K'; la droite A'K coupe X'' en un sommet A'' de P''.

Le polygone harmonique P'', à son tour, admet un cercle de Brocard X''' et un polygone de similitude P'''; P''' admet un cercle de Brocard X'' et un polygone de similitude P''; et ainsi de suite.

Les cercles X', X'', X'''... peuvent être appelés *premier, deuxième,*

me, ..., cercle de Brocard de P; les polygones P′, P″, P‴, ...,
premier, deuxième, troisième, ..., polygone de similitude de P.
rsement, P est le polygone de similitude d'un autre polygone
ique P_{-1}; P_{-1}, celui d'un autre polygone P_{-2}, ... Soient X_{-1},
.., les cercles de Brocard de P_{-1}, P_{-2}, ... Nous dirons que P_{-1},
., sont le *premier*, le *deuxième*, ..., *polygone négatif de similitude*



que X_{-1}, X_{-2}, ..., sont le *premier*, le *second cercle négatif de*
d de P. La construction de ces cercles résulte immédiatement de ce
écède.

polygone harmonique de $2n$ côtés a n symédianes; les projections
tre de la circonférence circonscrite sur ces symédianes sont les

Or (12 et 7)

$$\frac{\overline{SY}^2}{\overline{S'Y}^2} = \frac{OS}{OS'} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n} - \omega\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n} + \omega\right)},$$

$$\cos^2 PSY = \sin^2\left(\frac{\pi}{n} + \omega\right), \cos^2 PS'Y = \sin^2\frac{\pi}{n} + \sin^2\omega.$$

Par conséquent,

$$\frac{\overline{SP}^2}{\overline{S'P}^2} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n} - \omega\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{n} + \omega\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n} + \omega\right)\left(\sin^2\frac{\pi}{n} + \sin^2\omega\right)};$$

d'où l'équation de la circonférence du faisceau (X, X') qui touche YP en P :

$$S\cos\left(\frac{\pi}{n} + \omega\right)\left(\sin^2\frac{\pi}{n} + \sin^2\omega\right) - S'\cos\left(\frac{\pi}{n} - \omega\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{n} + \omega\right) = 0.$$

3° L'équation de la circonférence touchant en son pied la perpendiculaire abaissée de Y' sur SS' est

$$S\cos\left(\frac{\pi}{n} + \omega\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{n} - \omega\right) - S'\cos\left(\frac{\pi}{n} - \omega\right)\left(\sin^2\frac{\pi}{n} + \sin^2\omega\right) = 0.$$

4° Les circonférences qui touchent les droites SΩ, S'Ω ont respectivement pour équations(*)

$$S - S'\sec^2\left(\frac{\pi}{n} + \omega\right) = 0, \quad S - S'\cos^2\left(\frac{\pi}{n} - \omega\right) = 0.$$

(*) Le point de contact de la première circonférence est à la rencontre de SΩ avec la perpendiculaire élevée en S sur SS'.

SUR UN NOUVEAU CERCLE ASSOCIÉ A UN TRIANGLE;

Par M. W. FUHRMANN, professeur à Königsberg(*).

Préliminaires. Soient ABC le triangle fondamental; O, R le centre et le rayon du cercle circonscrit; I, r le centre et le rayon du cercle inscrit; I_a, I_b, I_c les centres des cercles ex-inscrits; H_a, H_b, H_c, H les pieds des hauteurs et l'orthocentre; A', B', C' les milieux des côtés de ABC; A''B''C'' le triangle qui a pour côtés les parallèles menées par les sommets de ABC aux côtés opposés.

Les bissectrices AI, BI, CI rencontrent la circonférence O aux milieux A_1, B_1, C_1 des arcs interceptés par les angles du triangle ABC. On sait que les triangles $A_1B_1C_1$, $I_aI_bI_c$ sont homothétiques par rapport au point I qui est leur orthocentre commun.

La circonférence O coupe les côtés du triangle $I_aI_bI_c$ en leurs milieux A_2, B_2, C_2; les droites A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sont perpendiculaires aux milieux des droites BC, CA, AB.

Nous indiquons par ν le centre du cercle inscrit au triangle anticomplémentaire A''B''C''; ce point a reçu le nom de *point de Nagel* du triangle ABC (Voir *Mathesis*, t. VII, p. 57).

Sur Hν comme diamètre, décrivons une circonférence; nous la désignerons par la lettre P, qui représente son centre; Hν et OI, lignes homologues des triangles A''B''C'', ABC sont parallèles et dans le rapport 2:1.

1. *Soient* A_2, B_2, C_2 *les symétriques des points* A_1, B_1, C_1 *par rapport à* BC, CA, AB : *le triangle* $A_2B_2C_2$ *est inscrit à la circonférence* P *et est symétriquement semblable aux triangles* $A_1B_1C_1$, $I_aI_bI_c$.

On a

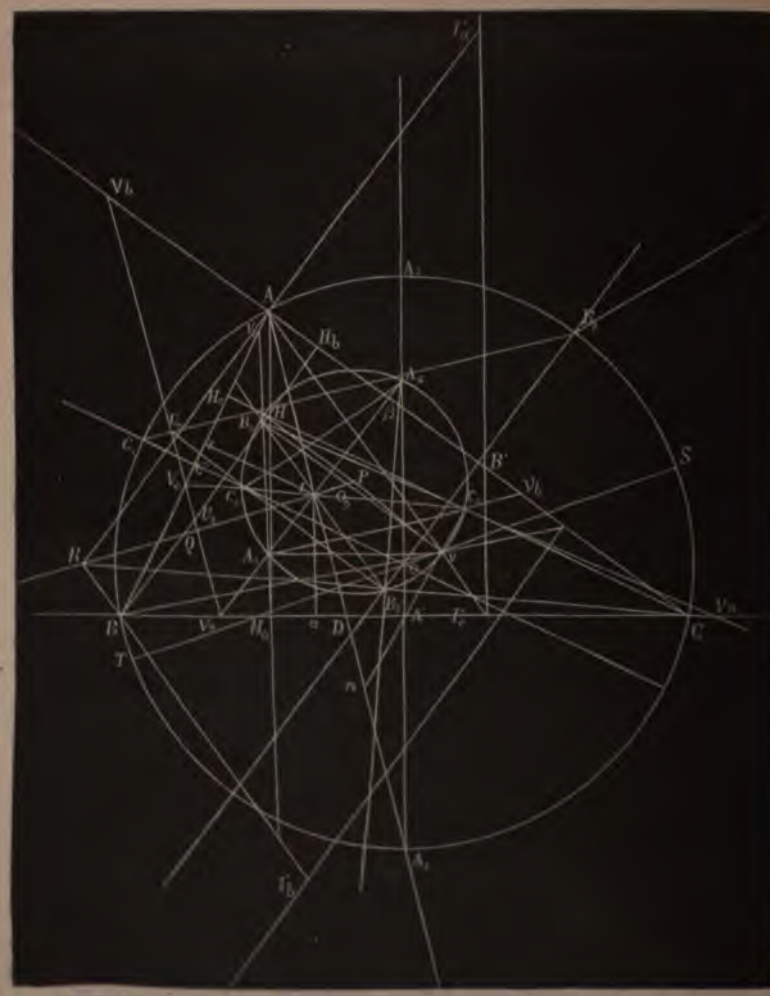
$$A_2A_2 = A'A_2 - A'A_1 = 2A'O = AH;$$

par suite, HA_2 est parallèle à AA_2 et à B_1C_1. Aν et A'I, lignes homologues des triangles semblables A''B''C'', ABC, sont parallèles, et

(*) M. Fuhrmann vient de faire paraître, sous le titre de *Synthetische Beweise planimetrischer Sätze* (Berlin, Simion, 1890, XXIV-190 p. in-8°, 14 planches), un excellent recueil de propositions se rapportant, en grande partie, à la géométrie récente du triangle.

Nous publierons ultérieurement des recherches de M. Mandart qui forment un complément à l'article de M. Fuhrmann. (J. N.)

$A\nu = 2A'I$; donc $\nu A'$ rencontre AI en un point n tel que $\nu A' = A'n$, et comme on a aussi $A_2A' = A'A_4$, le figure $A_4\nu A_2 n$ est un parallélogramme.



Ainsi, les droites A_2H, $A_4\nu$ sont parallèles aux droites rectangulaires AA_2, AA_4; par conséquent, l'angle $HA_2\nu$ est droit, et la circonférence P passe par A_4.

En général, si par un point d'une circonférence, on mène trois cordes parallèles aux côtés d'un triangle donné, les extrémités non communes de ces cordes sont les sommets d'un triangle symétriquement semblable au triangle donné. D'après cette remarque, les droites HA_2, HB_2, HC_2 étant parallèles aux côtés du triangle $A_1B_1C_1$, le triangle $A_2B_2C_2$ est symétriquement semblable à $A_1B_1C_1$.

Remarque. Les points A_2, B_2, C_2 sont les projections de H sur les bissectrices $A''\nu$, $B''\nu$, $C''\nu$ du triangle A''B''C''.

2. *On prend sur les hauteurs* AH, BH, CH *du triangle* ABC *les segments* AA_4, BB_4, CC_4 *égaux au diamètre* $2r$ *du cercle inscrit : le triangle* $A_4B_4C_4$ *est inscrit à la circonférence* P, *et est symétriquement semblable à* ABC.

Les distances de ν aux côtés du triangle A''B''C'' étant égales à $2r$, les droites νA_4, νB_4, νC_4 sont parallèles aux côtés du triangle ABC, et les angles $\nu A_4 H$, etc. sont droits. La circonférence P passe donc par les points A_4, B_4, C_4 et le triangle $A_4B_4C_4$ est symétriquement semblable à ABC.

Remarque. Les points A_4, B_4, C_4 sont les projections du centre du cercle inscrit à A''B''C'', sur les médiatrices de ce triangle.

3. I *est le centre de perspective des triangles* $A_2B_2C_2$, $A_4B_4C_4$.

Soient α, β, γ les points où le cercle I touche BC, CA, AB. En tenant compte de la similitude des triangles $AI\beta$, $BA'A_1$, on trouve

$$\frac{AA_4}{A_2A_1} = \frac{2r}{2A_1A'} = \frac{I\beta}{A_1A'} = \frac{AI}{A_1B} = \frac{AI}{IA_1}.$$

Les triangles AA_4I, A_1A_2I sont donc semblables, et les points A_4, I, A_2 sont en ligne droite.

Remarque. L'axe d'homologie des triangles ABC, $A_1B_1C_1$ est évidemment la polaire du point I par rapport au cercle O; celui des triangles $A_2B_2C_2$, $A_4B_4C_4$ est la polaire de I par rapport au cercle P.

4. I *est le point double des triangles symétriquement semblables* ABC, $A_2B_2C_2$, *et aussi celui des triangles* $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$.

Les triangles ABC, $A_4B_4C_4$ sont symétriquement semblables, et les droites qui joignent leurs sommets au point I rencontrent leurs circonférences circonscrites aux sommets de deux triangles symétriquement semblables $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$. Il résulte de là que I est son propre homologue dans ABC et $A_4B_4C_4$, $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$.

Remarque I. Les deux systèmes de points ABC $A_1B_1C_1$, $A_4B_4C_4A_2B_2C_2$ sont inversement semblables; leur point double est I, leurs droites doubles sont les bissectrices (intérieure et extérieure) de l'angle AIA_4.

Remarque II. I est le centre du cercle inscrit à $A_1B_1C_1$, et l'orthocentre du triangle $A_2B_2C_2$.

5. *Soient* I'_a, I'_b, I'_c *les symétriques des points* I_a, I_b, I_c *respectivement par rapport aux droites* BC, CA, AB. *Les circonférences circonscrites aux triangles* BCI'_a, CAI'_b, ABI'_c, *et les droites* AI'_a, BI'_b, CI'_c *passent par un même point* R. *Les côtés du triangle* $A_2B_2C_2$ *sont perpendiculaires aux milieux des droites* AR, BR, CR.

Les triangles I_aBC, AI_bC, ABI_c sont directement semblables; leurs angles sont égaux à

$$90° - \frac{A}{2}, \quad 90° - \frac{B}{2}, \quad 90° - \frac{C}{2}.$$

Les circonférences circonscrites à ces triangles ont pour centres les points A_1, B_1, C_1, et elles passent par le même point I.

Les triangles I'_aBC, AI'_bC, ABI'_c sont inversement semblables à I_aBC, AI_bC, ABI_c; les circonférences circonscrites ont, évidemment, pour centres les points A_2, B_2, C_2, et elles passent par un même point R, centre d'un faisceau R (ABC), symétriquement égal au faisceau I (ABC). On démontre facilement, par la considération des quadrilatères cycliques $ABRI'_c$, $BCRI'_a$, que AR et RI'_a ne forment qu'une seule droite.

AR, corde commune aux circonférences ABI'_c, ACI'_b est perpendiculaire à la ligne C_2B_2 des centres et est divisée par celle-ci en deux parties égales.

Remarque. Les faisceaux R(ABC), I(ABC) étant symétriquement égaux, leurs sommets R, I sont, d'après une dénomination proposée par M. Artzt, des *points jumeaux* par rapport au triangle ABC.

6. *L'axe d'homologie des triangles* $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ *est perpendiculaire au milieu de la droite* IR *et touche en ce point le cercle inscrit à* ABC.

Soient U_a, U_b, U_c les points de rencontre des côtés homologues des deux triangles; I étant l'orthocentre de $A_1B_1C_1$ et de $A_2B_2C_2$, B_1C_1 est perpendiculaire au milieu de IA, et B_2C_2 l'est au milieu de IA_1; B_2C_2 est également perpendiculaire au milieu de RA. Donc U_a est le centre d'une circonférence passant par les quatre points A, I, A_1, R; par suite, il est situé sur la perpendiculaire élevée au milieu de IR. De même, les points U_b, U_c appartiennent à cette droite.

Les droites AA_1, IR sont symétriques par rapport à B_2C_2; d'où $IR = 2r$. Le milieu Q de IR est donc situé sur la circonférence inscrite à ABC, et la tangente en ce point est la droite U_aU_bU.

7. *Le cercle inscrit à* ABC *et le cercle des neuf points se touchent au milieu de* IR.

Dans les triangles symétriquement semblables $A_4B_4C_4$ et ABC, I est son propre homologue et P correspond à O : donc IAO, IA_4P sont des angles homologues et, par suite, symétriquement égaux. Comme AI est la bissectrice de l'angle A_4AO, les angles IA_4P, IAA_4 sont directement égaux. Il résulte de là que le rayon PA_4 du cercle P touche en A_4 le cercle AIA_4R, et que les deux cercles sont orthogonaux. Les cercles BIB_4R, CIC_4R étant également orthogonaux au cercle P, les points communs I, R divisent harmoniquement un même diamètre du cercle P.

Par conséquent,

$$\overline{PH}^2 = PI \cdot PR = PR\,(PR - 2r);$$

d'après un théorème connu,

$$\overline{PH}^2 = \overline{OI}^2 = OA\,(OA - 2r).$$

La comparaison de ces égalités donne la relation $PR = OA$.

Soit O_9 le centre du cercle des neuf points du triangle ABC; ce point est situé au milieu commun des droites HO, IP (HP et IO sont des droites égales et parallèles). Q étant le milieu de IR, la distance $O_9Q = \frac{1}{2} PR = \frac{1}{2} OA$. Donc Q appartient au cercle O_9, et comme il est sur la ligne des centres des cercles I et O_9, ceux-ci se touchent en Q.

Remarque. Le point R est situé sur l'axe d'homologie des triangles $A_2B_2C_2$, $A_4B_4C_4$ (n° 3, *Remarque*).

8. *Lemme.* Soient XX_1, YY_1 deux segments qui se divisent harmoniquement, et soient M le milieu de XX_1, N le conjugué harmonique de Y par rapport à XM. La relation suivante se démontre aisément :

$$NY_1 \cdot NM = \overline{NX}_1^2.$$

9. *Les droites* A_2A_4, B_2B_4, C_2C_4, *rencontrent respectivement* BC, CA, AB *en trois points* V_a, V_b, V_c *situés sur la tangente commune aux cercles* I *et* O_9. Soient D le point de rencontre de AI avec BC, et α, α' les points de contact des cercles I, I_a avec BC. La division harmonique $(ADII_a)$ se projette sur BC suivant une nouvelle division harmonique $(H_aD\alpha\alpha')$. A' étant le milieu de A_1A_2, on a un faisceau harmonique $I(A_1A_2A'\alpha)$, dont la section par BC donne une division harmonique $(DV_aA'\alpha)$. Les deux ponctuelles $(H_aD\alpha\alpha')$, $(DV_aA'\alpha)$ rentrent dans le lemme du n° 8, car A' est le milieu de $\alpha\alpha'$. Par conséquent,

$$\overline{V_a\alpha}^2 = V_aH_a \cdot V_aA';$$

d'où l'on conclut que V_a est d'égale puissance par rapport aux cercles I, O_9. Ce point appartient donc à la tangente commune menée en Q.

Remarque. De l'égalité précédente, on déduit

$$\overline{V_aI}^2 = V_aA_4 . V_aA_2;$$

elle exprime que le cercle décrit de V_a comme centre, avec le rayon V_aI, coupe orthogonalement le cercle P; propriété qui résulte aussi de ce que V_a est sur la perpendiculaire élevée au milieu de la distance des deux points réciproques I, R.

10. *Les perpendiculaires abaissées de* A_1, B_1, C_1 *sur les côtés opposés du triangle* $A_2B_2C_2$ *concourent en un même point* S *de la circonférence* O. *Ce point est situé sur la droite* Oν *et est, dans le triangle* ABC, *l'homologue du point* ν *considéré dans le triangle* $A_4B_4C_4$(*).

La première partie du théorème résulte de ce que les triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ sont inversement semblables. On sait (§ 1) que ν est le point de concours des perpendiculaires abaissées des sommets de $A_2B_2C_2$ sur les côtés de $A_1B_1C_1$; donc ν et S sont des points homologues de $A_2B_2C_2$, $A_1B_1C_1$. P et O sont également des points homologues, et I est son propre correspondant; par suite, IPν et IOS sont des angles homologues, et comme PIOν est un parallélogramme, les points O, ν, S sont en ligne droite.

11. *Les perpendiculaires abaissées de* A, B, C *sur les côtés opposés du triangle* $A_4B_4C_4$ *concourent en un même point* T *de la circonférence* O; T *et* H *sont des points homologues des triangles* ABC, $A_4B_4C_4$.

Ce théorème se démontre de la même manière que le précédent.

Remarques. I. L'inverse du point S par rapport au triangle ABC est situé à l'infini dans la direction perpendiculaire à la droite Hν.

En effet, soit SS' la corde du cercle O parallèle à AB. Dans les figures inversement semblables ABC, $A_4B_4C_4$, les directions ST et Hν, CT et C_4H se correspondent; donc l'angle CHν = STC = SS'C, et comme SS' est perpendiculaire à CH, CS' l'est à Hν. Or, CS' est l'isogonale de CS; donc etc.

(*) Les coordonnées normales de ν par rapport au triangle $A_4B_4C_4$ sont inversement proportionnelles aux distances νA_4, νB_4, νC_4, ou aux projections de OI sur BC, CA, AB; elles ont donc pour expressions $\frac{1}{b-c}$, $\frac{1}{c-a}$, $\frac{1}{a-b}$. Telles sont aussi les coordonnées de S par rapport au triangle ABC. (J. N.)

II. $H\nu$ étant un diamètre du cercle $A_4B_4C_4$, S et T sont les extrémités du diamètre $O\nu$ du cercle ABC. On en déduit que les lignes AS, BS, CS sont parallèles à B_4C_4, C_4A_4, A_4B_4.

12. *L'axe d'homologie des triangles* ABC, $A_4B_4C_4$ *est perpendiculaire à la droite* HT.

Soient ν_a, ν_b, ν_c les intersections des côtés homologues de ces triangles. Les triangles THB, $CC_4\nu_a$ jouissent de la propriété que les perpendiculaires abaissées des sommets du premier sur les côtés opposés du second concourent en un même point A; donc les perpendiculaires abaissées de C, C_4, ν_a, respectivement sur HB, TB, TH se coupent en un même point; les deux premières de ces droites concourent en ν_b; donc $\nu_a\nu_b$ est perpendiculaire à TH.

Plus simplement, les deux quadrangles complets ABHT, $\nu_b\nu_aC_4C$ ont cinq couples de côtés perpendiculaires; donc les côtés restants HT, $\nu_b\nu_a$ sont également perpendiculaires.

13. *Les droites doubles des triangles inversement semblables* ABC, $A_4B_4C_4$ *rencontrent les hauteurs* AH, BH, CH *de* ABC *en des points* (X_a, X_b, X_c), (X'_a, X'_b, X'_c) *tels que l'on a*

$$AX_a = BX_b = CX_c = R - d, \quad AX'_a = BX'_b = CX'_c = R + d,$$

d étant la distance OI.

En effet, le rapport de similitude des triangles ABC, $A_4B_4C_4$ est égal à celui des diamètres des cercles circonscrits, ou égal à $R : d$; IX_a étant la bissectrice de l'angle AIA_4, on a, successivement,

$$\frac{AX_a}{X_aA_4} = \frac{R}{d}, \quad \frac{AX_a}{AX_a + X_aA_4} = \frac{R}{R+d}, \quad AX_a = \frac{2Rr}{R+d} = R - d.$$

De même, $AX'_a = R + d$.

Remarques. I. La proposition n° 13 résout le problème suivant: Prendre sur les hauteurs AH, BH, CH d'un triangle ABC trois segments égaux $AX_a = BX_b = CX_c$, tels que les points X_a, X_b, X_c soient en ligne droite. On voit qu'il existe deux droites $X_aX_bX_c$ qui répondent à cette question; elles sont rectangulaires et passent par le centre du cercle inscrit à ABC.

II. Prenons sur AH, BH, CH les longueurs $AY_a = BY_b = CY_c = OA$. Les triangles $Y_aY_bY_c$, $A_1B_2C_3$ sont symétriques par rapport à O_9.

×NOTES MATHÉMATIQUES.

×**5.** ***Démonstration de la formule*** $\cos(A+B) =$ etc (Extrait d'une lettre de M. B. I. Clasen). M. Thiry a démontré (***Mathesis,*** t. X, p. 54) que l'on a

$$\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B.$$

De même

$$\sin C = \sin A \cos B + \sin B \cos A.$$

En éliminant sin C entre ces équations, il vient successivement

$$\sin A = \sin B \cos C + \sin A \cos^2 B + \sin B \cos A \cos B,$$
$$\sin A \sin^2 B = \sin B \cos C + \sin B \cos A \cos B,$$
$$\sin A \sin B = \cos C + \cos A \cos B,$$

et comme

$$\cos C = -\cos(A+B),$$
$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin C,$$

ce qui est la formule cherchée.

×**6.** ***Démonstration de l'inégalité*** $\sin x > x - \frac{1}{6}x^3$ (***D'après*** M. E. Bernès, ***professeur au lycée Louis-le-Grand, à Paris***). De l'identité

$$\cos\frac{a}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2^2},$$

on tire

$$\cos\frac{a}{2} > 1 - \frac{a^2}{2^3}. \qquad (1)$$

On peut donc écrire

$$\cos\frac{a}{2} = 1 - \frac{a^2}{2^3} + \alpha,$$

α étant un nombre positif déterminé, moindre que $\frac{a^2}{2^3}$.

On a ainsi

$$\cos\frac{a}{2} = 1 - \frac{a^2}{2^3} + \alpha, \quad \cos\frac{a}{2^2} > 1 - \frac{a^2}{2^5},$$
$$\cos\frac{a}{2^3} > 1 - \frac{a^2}{2^7}, \quad \cos\frac{a}{2^n} > 1 - \frac{a^2}{2^{2n+1}}.$$

Multipliant membre à membre, on obtient

$$P > \left(1 - \frac{a^2}{2^3} + \alpha\right)\left(1 - \frac{a^2}{2^5}\right)\left(1 - \frac{a^2}{2^7}\right)\cdots\left(1 - \frac{a^2}{2^{2n+1}}\right) \qquad (2)$$

où

$$P = \cos\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2^2}\cdots\cos\frac{a}{2^n}.$$

L'inégalité (2) donne, *a fortiori*,

$$P > 1 + \alpha - \left(\frac{a^2}{2^3} + \frac{a^2}{2^5} + \cdots + \frac{a^2}{2^{2n+1}}\right),$$

et de nouveau, *a fortiori*,

$$P > 1 - \frac{a^2}{6} + \alpha.$$

Si l'on suppose que n augmente indéfiniment, on sait que

$$\lim P = \frac{\sin a}{a} \text{ (*)}$$

d'où il suit que

$$\frac{\sin a}{a} \geqq 1 - \frac{a^2}{6} + \alpha,$$

ensuite,

$$\frac{\sin a}{a} > 1 - \frac{a^2}{6}$$

et, puisque l'on suppose $a > 0$,

$$\sin a > a - \frac{a^3}{6}.$$

×7. ***Théorème d'arithmétique*** (Démonstration de M. Bernès). ***La moyenne arithmétique de plusieurs nombres positifs est supérieure à leur moyenne géométrique.***

Représentons par a^m, b^m, ... l^m, m nombres positifs et supposons le théorème démontré pour $m - 1$ nombres; je dis qu'il sera vrai pour m nombres.

On a l'inégalité évidente

$$(a^{m-1} - b^{m-1})(a - b) \geqq 0,$$

d'où

$$a^m + b^m \geqq a^{m-1}b + b^{m-1}a.$$

(*) En effet, on a

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{4}}{\frac{\alpha}{4}}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2} = \cdots = \frac{\sin\frac{\alpha}{2^n}}{\frac{\alpha}{2^n}}\cos\frac{\alpha}{2^n}\cdots\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2},$$

d'où, évidemment, pour $n = \infty$, la relation indiquée.

Ajoutant membre à membre toutes les inégalités qu'on peut former en considérant de toutes les manières possibles les m nombres donnés deux à deux, on obtient :

$$(m-1)\,\Sigma a^m > \Sigma a\,(b^{m-1}+c^{m-1}+\cdots+l^{m-1}).$$

Mais, par hypothèse,

$$b^{m-1}+c^{m-1}+\cdots+l^{m-1} > (m-1)\,bc\cdots l;$$

donc

$$(m-1)\,\Sigma a^m > \Sigma\,(m-1)\,abc\cdots l,$$

ou

$$(m-1)\,\Sigma a^m > m\,(m-1)\,abc\cdots l,$$

et enfin,

$$\Sigma a^m > m\cdot abc\cdot\cdot l,$$

ce qui démontre la proposition (*).

8. *Sur le développement des fonctions en série* (d'après une lettre de M. J. Bruno de Cabedo, à Coïmbre). Soit

$$fx = u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}+R_n$$

une relation vraie pour toute valeur de n. On aura donc aussi

$$fx = u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}+u_n+\cdots+u_{n+p-1}+R_{n+p}.$$

Supposons que pour n croissant indéfiniment,

$$\lim\,(R_{n+p}-R_n)=0,$$

quelle que soit la valeur entière que l'on donne à p. Il n'en résultera pas nécessairement,

$$\lim R_n = 0,$$

et, par suite, on ne peut écrire

$$fx = u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}+\text{etc.},$$

en série indéfinie.

Exemple. Si $\varphi x = e^{-\frac{1}{x^2}}$, on a, comme on sait,

$$e^x+\varphi x = 1+\frac{x}{1}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}+R_n,$$

$$R_n=\frac{x^n}{1.2\ldots n}e^{\theta x}+\varphi x,\quad R_{n+p}=\frac{x^{n+p}}{1.2\ldots(n+p)}e^{\theta_1 x}+\varphi x,$$

(*) Ces deux démonstrations nous ont été communiquées par M. B. Niewenglowski, professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand.

ϑ et ϑ_1 étant compris entre zéro et l'unité. On déduit de là

$$R_{n+p} - R_n = \frac{x^{n+p}}{1.2...(n+p)} e^{\vartheta_1 x} - \frac{x^n}{1.2...n} e^{\vartheta x},$$

$$\lim (R_{n+p} - R_n) = 0.$$

Mais on a $\lim R_n = \varphi x$, et l'on ne peut évidemment écrire, en série indéfinie

$$e^x + \varphi x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \text{etc.}$$

La remarque précédente ne diffère pas de celle de Cauchy relativement à la fonction φx, mais la forme en est peut-être nouvelle.

[x]**9.** *Sur le* 176^e *porisme d'Euclide.* Voici l'énoncé de ce porisme : *Un angle de grandeur donné* ω *se meut de manière qu'un de ses côtés passe par un point donné* Ω *et que son sommet* B *glisse sur une circonférence de cercle* O ; *son second côté rencontre la circonférence en un second point* A, *par lequel on mène une droite faisant avec ce côté un angle égal à l'angle mobile* ω, *mais en sens contraire : cette droite passe par un point fixe* Ω'.

La démonstration qu'on va lire, nous a été communiquée par M. A. C; elle est plus simple que celle de Chasles, cependant celle-ci a l'avantage de montrer le rôle du porisme d'Euclide dans la théorie des coniques. Pour l'usage qu'on peut faire de ce porisme dans la géométrie du triangle, nous renvoyons à un article de M. Vigarié (J. M. E., 1890, p. 83).

Soit D l'intersection de BΩ avec le second côté de l'angle ω, construit au point A sur AB. Le triangle DAB est isoscèle; donc la perpendiculaire élevée au milieu K de AB passe par O et D. L'angle ODB ayant la valeur constante $\frac{1}{2}\pi - \omega$, le lieu du point D est une circonférence passant par O et Ω. Soit Ω′ le point de rencontre de cette circonférence avec la droite DA; l'angle ODA étant constant, le point Ω′ est fixe. — Pour construire le point Ω′, on peut observer que l'angle $\Omega O\Omega' = 2\omega$, et $O\Omega' = O\Omega$.

Remarques. 1° La parallèle à AB menée par D passe par un point fixe J de la circonférence ΩOΩ′; 2° on a $A\Omega' = E\Omega$, E étant le second point de rencontre de BΩ avec la circonférence O.

THÉORÈMES SUR LA PARABOLE;

par C. BERGMANS, professeur à l'Athénée royal de Gand.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 71, 95, 175; t. VI, p. 169; t. VII, p. 136; t. VIII, p. 63.)

Sixième Série.

LXXV. Toute corde menée par le foyer d'une parabole est égale au quadruple du rayon vecteur de l'extrémité du diamètre conjugué avec la corde, et par suite égale au double du paramètre p' relatif à ce diamètre.

LXXVI. Soient E le point de rencontre des normales menées en deux points B,C d'une parabole; D, le point d'intersection de la corde BC avec l'axe; B'C', la corde menée par le foyer F parallèlement à BC. 1° La différence des abscisses des points E et D est égale à $B'C' - p$; 2° la somme des projections des droites BE, CE respectivement sur les rayons vecteurs FB, FC est égale à B'C'.

LXXVII. Le rayon de courbure en un point B de la parabole s'obtient en divisant la moitié de la corde focale parallèle à la tangente en B, par le sinus de l'inclinaison de cette tangente sur l'axe.

Ce théorème peut se déduire de LXXVI, 1° et de XXXV, 3°.

LXXVIII. 1° La somme des inverses des deux segments d'une corde focale BC est constante et égale à $\frac{2}{p}$. 2° Si une perpendiculaire menée en F sur BC rencontre la directrice en D, on a $\overline{FD}^2 = FB.FC = \frac{1}{2}p.BC$. 3° La somme des inverses de deux cordes focales rectangulaires est constante. 4° $\frac{FC}{FB} = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha$, α étant l'inclinaison de BC sur l'axe.

LXXIX. Sur les tangentes TB, TC menées d'un point T à la parabole, on prend les longueurs $TB' = \sqrt{lr}$, $TC' = \sqrt{lr'}$; l est une longueur quelconque et r, r' sont les longueurs des rayons vecteurs FB, FC menés aux points de contact des deux tangentes. La surface du triangle TB'C' a pour mesure $\frac{1}{2} B'C' \sqrt{2lp}$.

Ce théorème est l'interprétation de la formule

$$p = \frac{2rr' \sin^2 T}{r + r' - 2\sqrt{rr'} \cos T},$$

qu'on obtient en éliminant α et α' entre les égalités

$$r=\frac{p}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}},\quad r'=\frac{p}{2\sin^2\frac{\alpha'}{2}},\quad T=\frac{\alpha'-\alpha}{2}.$$

LXXX. Une droite AB est tangente à la parabole au point B; soit P la projection d'un point A de la tangente sur le rayon recteur FB. 1° $\overline{AP}^2=2p.AM$; 2° $FP=AQ$, M et Q étant les points où une parallèle à l'axe menée par A rencontre la courbe et la directrice.

LXXXI. Si la tangente en un point B de la parabole rencontre la directrice au point A, la droite FA coupe la normale en B au point milieu du rayon de courbure.

LXXXII. Le lieu des foyers et celui des sommets de toutes les paraboles qui ont la même directrice d et une tangente commune t sont deux droites.

Le lieu des foyers F est la symétrique d' de d par rapport à t; celui des sommets est la médiane du triangle formé par d, d' et une perpendiculaire à d.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 278.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 192 et t. VIII, p. 215).

Calculer la valeur du déterminant

$$D=\begin{vmatrix} \sin a & \sin(a+\delta) & \sin(a+2\delta) & \dots & \sin(a+n\delta-\delta) \\ \sin(a+n\delta-\delta) & \sin a & \sin(a+\delta) & \dots & \sin(a+n\delta-2\delta) \\ \sin(a+n\delta-2\delta) & \sin(a+n\delta-\delta) & \sin a & \dots & \sin(a+n\delta-3\delta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(a+\delta) & \sin(a+2\delta) & \sin(a+3\delta) & \cdots & \sin a \end{vmatrix}$$

(J. Neuberg.)

La valeur indiquée dans l'énoncé de la question n'est pas exacte.

Soient $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ les racines de l'équation $\omega^n-1=0$, et posons

$$\varphi(\omega)=\sin a+\omega\sin(a+\delta)+\omega^2\sin(a+2\delta)+\cdots+\omega^{n-1}\sin(a+n\delta-\delta).$$

Si l'on multiplie le déterminant proposé par le suivant

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega_1 & \omega_1^2 & \cdots & \omega_1^{n-1} \\ 1 & \omega_2 & \omega_2^2 & \cdots & \omega_2^{n-1} \\ 1 & \omega_3 & \omega_3^2 & \cdots & \omega_3^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \cdot \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

on trouve

$$\begin{vmatrix} \varphi(\omega_1) & \varphi(\omega_2) & \cdots & \varphi(\omega_n) \\ \omega_1\varphi(\omega_1) & \omega_2\varphi(\omega_2) & \cdot \cdot & \omega_n\varphi(\omega_n) \\ \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdots & \cdot \cdot \cdot \\ \omega_1^{n-1}\varphi(\omega_1) & \omega_2^{n-1}\varphi(\omega_2) & \cdots & \omega_n^{n-1}\varphi(\omega_n) \end{vmatrix}.$$

On conclut de là que

$$D = \varphi(\omega_1)\,\varphi(\omega_2)\cdots\varphi(\omega_n).$$

Calculons les quantités $\varphi(\omega_1)$, $\varphi(\omega_2)$, ... Faisons

$$\psi(\omega) = \cos a + \omega\cos(a+\delta) + \omega^2\cos(a+2\delta) + \cdots + \omega^{n-1}\cos(a+n\delta-\delta),$$

$$i = \sqrt{-1}, \quad u = \cos a + i\sin a, \quad v = \cos\delta + i\sin\delta;$$

nous pourrons écrire, en appliquant la formule de Moivre,

$$\psi(\omega) + i\varphi(\omega) = u + \omega uv + \omega^2 uv^2 + \cdots + \omega^{n-1}uv^{n-1}$$

$$= u\,\frac{(\omega v)^n - 1}{\omega v - 1} = \frac{(\cos a + i\sin a)(\omega^n\cos n\delta - 1 + i\omega^n\sin n\delta)}{\omega\cos\delta - 1 + i\omega\sin\delta}.$$

Multiplions les deux termes de la dernière fraction par

$$\omega\cos\delta - 1 - i\omega\sin\delta.$$

Si nous supposons ω réel, nous pourrons conclure de l'égalité précédente,

$$\varphi(\omega) = \frac{\sin a - \omega\sin(a-\delta) - \omega^n\sin(a+n\delta) + \omega^{n+1}\sin(a+n\overline{-1}\delta)}{1+\omega^2-2\omega\cos\delta},$$

relation vraie quel que soit ω. Remplaçons ω par $\cos\varepsilon + i\sin\varepsilon$, ε désignant l'un quelconque des arcs

$$\varepsilon_1 = \frac{2\pi}{n}, \quad \varepsilon_2 = \frac{4\pi}{n}, \quad \cdots, \quad \varepsilon_n = n\cdot\frac{2\pi}{n};$$

ces valeurs de ω sont les racines de l'équation $\omega^n - 1 = 0$. Nous aurons, à cause de $\omega^n = 1$, $\omega^{n+1} = \omega$,

$$\varphi(\omega) = \frac{\sin a - \sin(a + n\delta) - \omega[\sin(a - \delta) - \sin(a + n\delta - \delta)]}{1 + \cos 2\varepsilon + i \sin 2\varepsilon - 2(\cos\varepsilon + i\sin\varepsilon)\cos\delta}$$

$$= \sin\frac{n\delta}{2} \cdot \frac{\omega\cos\left(a + \frac{n-2}{2}\delta\right) - \cos\left(a + \frac{n\delta}{2}\right)}{2\omega(\cos\varepsilon - \cos\delta)},$$

et en multipliant les deux termes de la fraction par $\cos\varepsilon - i\sin\varepsilon$:

$$\varphi(\omega) = \frac{\sin\frac{n\delta}{2}}{\cos\varepsilon - \cos\delta} \cdot \left[\cos\left(a + \frac{n-2}{2}\delta\right) - (\cos\varepsilon - i\sin\varepsilon)\cos\left(a + \frac{n\delta}{2}\right)\right].$$

Pour débarrasser D des imaginaires, on peut observer que ω_k et ω_{n-k} sont des imaginaires conjuguées; par suite,

$$\varphi(\omega_k)\varphi(\omega_{n-k}) = A\frac{\sin^2\frac{n\delta}{2}}{(\cos\varepsilon_k - \cos\delta)^2},$$

si l'on désigne par A la quantité

$$\cos^2\left(a + \frac{n-2}{2}\delta\right) + \cos^2\left(a + \frac{n\delta}{2}\right) - 2\cos\varepsilon_k\cos\left(a + \frac{n-2}{2}\delta\right)\cos\left(a + \frac{n\delta}{2}\right).$$

(J. N.)

×Question 402.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 22.)

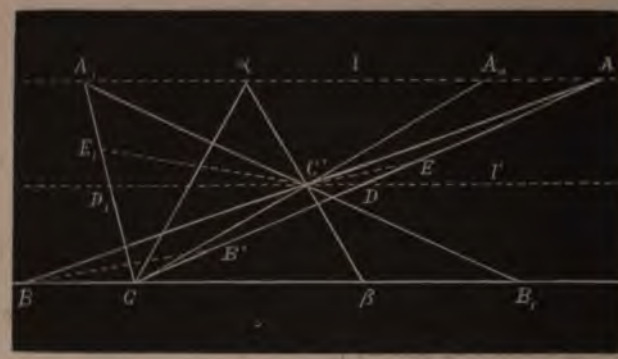
Démontrer qu'il existe des triangles ABC ***autres que le triangle équilatéral pour lesquels la hauteur partant de*** A, ***la bissectrice partant de*** B ***et la médiane partant de*** C ***sont égales.*** (E. Lemoine.)

Solution d'après MM. Lemoine ***et*** de Rocquigny. Construisons un triangle équilatéral $\alpha\beta C$; par le sommet α menons la droite l parallèle à $C\beta$. Joignons un point quelconque A de l à C et au milieu C′ de $\alpha\beta$; soit B le point de rencontre des droites $C\beta$, AC′.

Dans le triangle ABC, la hauteur issue de A et le médiane CC′ sont égales entre elles. Nous allons montrer que le point A peut être choisi de manière que la bissectrice BB′ de l'angle ABC soit égale à CC′.

La droite CC′ rencontre l en un point A_0. Si le point A parcourt l à partir de A_0 dans le sens αA, BB′ varie d'une manière continue de 0 à

l'infini. En effet, l'angle C'CB étant obtus, on a $BB' > BC$; mais $BC = A_0A$, donc BB' peut croître indéfiniment. Lorsque A est en A_2, $BB' = 0$; donc il existe une position de A sur la droite αA_0 et une seule



pour laquelle $BB' = CC'$. Comme elle correspond à une longueur $CB < CC'$, l'angle B du triangle cherché est compris entre 15° et 30°.

Solution d'après MM. Rochetti, Déprez *et* Gob. Soient AA', BB', CC' la hauteur issue de A, la bissectrice de l'angle B et la médiane partant de C. Menons C'H perpendiculaire à BC; l'angle C'CH = 30°, car $C'H = \frac{1}{2} AA' = \frac{1}{2} CC'$.

En égalant deux expressions de l'aire ABC, on trouve

$$\frac{1}{2} a \cdot AA' = \frac{1}{2} BB' (a + c) \sin \frac{B}{2};$$

d'où

$$\frac{1}{\sin \frac{B}{2}} = \frac{a + c}{a} = 1 + \frac{c}{a}. \qquad (1)$$

Dans le triangle BC'C,

$$\frac{BC'}{BC} = \frac{c}{2a} = \frac{\sin BCC'}{\sin BC'C} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin (30^\circ \mp B)}. \qquad (2)$$

De (1) et (2), on déduit

$$\frac{1}{\sin \frac{B}{2}} = 1 + \frac{1}{\sin (30^\circ \mp B)},$$

$$\sin (30^\circ \mp B) \left(1 - \sin \frac{B}{2}\right) - \sin \frac{B}{2} = 0. \qquad (3)$$

Le premier membre de (3) est une fonction continue de B; il est positif pour $B = 0$, et négatif pour $B = 30°$, quand on adopte $30° - B$. Donc l'équation admet au moins une valeur réelle de B, inférieure à 30°.

Si l'on pose $\sin\frac{B}{2} = x$, et qu'on écarte la racine $x = \frac{1}{2}$, l'égalité (3) se ramène à

$$8x^4 - 20x^3 + 10x^2 + 5x - 1 = 0.$$

Remarques. I. Menons C'E parallèle à BB' et rencontrant AC en E. Lorsqu'on donne la médiane CC' en grandeur et en direction, avec la condition $AA' = CC'$, le point E décrit une cubique. (Déprez).

II. Lorsqu'on donne la base BC et la condition $AA' = CC'$, le point A décrit une droite faisant avec BC un angle de 60°; la condition $AA' = BB'$ fait parcourir au point A une courbe représentée par l'équation (3), dans laquelle C et B sont les coordonnées polaires de A.

Question 522.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 144.)

Soient OA, OB *deux diamètres conjugués de l'ellipse de gorge d'un hyperboloïde. Trouver :* 1° *le lieu des projections de* A *sur les génératrices rectilignes passant par* B; 2° *le lieu des projetantes.* (H. Brocard.)

Solution par M. Mosnat (Toulon.) — 1° Les coordonnées des points A et B étant $(a\cos\varphi, b\sin\varphi, 0)$, $(-a\sin\varphi, b\cos\varphi, 0)$, les équations de la génératrice BG sont

$$(G)\qquad \begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\varphi - \sin\varphi, \\ \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\varphi + \cos\varphi; \end{cases}$$

celle du plan P perpendiculaire à (G) mené par A est :

$$(P)\qquad (x - a\cos\varphi)\,a\cos\varphi + (y - b\sin\varphi)\,b\sin\varphi + cz = 0.$$

Portant dans cette équation les valeurs de $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, tirées de (G), on trouve :

$$\left[ax\left(\frac{xz}{ac} + \frac{y}{b}\right) + by\left(\frac{yz}{bc} - \frac{x}{a}\right) + cz\left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right)\right]\left[1 + \frac{z^2}{c^2}\right]$$
$$= a^2\left(\frac{xz}{ac} + \frac{y}{b}\right)^2 + b^2\left(\frac{yz}{bc} - \frac{x}{a}\right)^2$$

ce qui représente une surface du 5e ordre, dont les sections, par des plans parallèles à *xoy*, sont des coniques. Le lieu des projections M de A sur BG est l'intersection de cette surface avec l'hyperboloïde. Le lieu des projections sur l'autre génératrice BG′ s'obtient en changeant z en $-z$.

2° La projetante AM est l'intersection du plan P et du plan ABG dont l'équation est :

$$\cos\varphi\left(\frac{y}{b}+\frac{x}{a}\right)+\sin\varphi\left(\frac{y}{b}-\frac{x}{a}\right)=1+\frac{z}{c}.$$

Le lieu des projetantes s'obtient en éliminant φ entre les équations de ces plans et la relation

$$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1.$$

Le lieu cherché est une surface réglée du 8e ordre. Son intersection avec l'hyperboloïde se compose du lieu précédent et de l'ellipse de gorge.

×Question 543.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 264.)

Démontrer que l'équation

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)=0, \tag{1}$$

entraîne les suivantes :

$$[\Sigma\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta+\gamma)]^2:\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos(\alpha+\beta+\gamma)=4, \tag{2}$$

$$[\Sigma\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta+\gamma)]:[\Sigma\sec\alpha-\sec(\alpha+\beta+\gamma)]=4, \tag{3}$$

$$\left[\frac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos(\alpha+\beta+\gamma)}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{-\sin(\alpha+\beta+\gamma)}\right]^{\frac{1}{3}}=1, \tag{4}$$

$$\left[\frac{\cos\beta\cos\gamma\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[\frac{\sin\beta\sin\gamma\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{-\sin\alpha}\right]^{\frac{1}{3}}=1. \tag{5}$$

(WOLSTENHOLME.)

Solution par M. I. BEYENS (Cadix). 1° Posons $\alpha+\beta+\gamma=\mu$; l'équation (1) peut s'écrire ainsi :

$$\sin(\mu-\gamma)+\sin(\mu-\alpha)+\sin(\mu-\beta)=0,$$

d'où la proportion

$$\frac{\Sigma\sin x}{\sin\mu}=\frac{\Sigma\cos x}{\cos\mu}. \tag{6}$$

Soit K la valeur de chacun des rapports. Si l'on fait le produit des deux membres de l'égalité (6), ou la somme des carrés des numérateurs et celle des dénominateurs, ou la somme des numérateurs et celle des dénominateurs après avoir multiplié les deux termes du premier rapport par $\sin\mu$ et ceux du second rapport par $\cos\mu$, on trouve, après des transformations faciles,

$$K^2 = \frac{\mathfrak{S}\sin\alpha \cdot \mathfrak{S}\cos\alpha}{\sin\mu\cos\mu} = \frac{\mathfrak{S}\sin 2\alpha}{\sin 2\mu}, \tag{7}$$

$$K^2 = \frac{\mathfrak{S}^2\sin\alpha + \mathfrak{S}^2\cos\alpha}{\sin^2\mu + \cos^2\mu} = 3 + 2\mathfrak{S}\cos(\beta - \gamma), \tag{8}$$

$$K = \frac{\sin\mu\mathfrak{S}\sin\alpha + \cos\mu\mathfrak{S}\cos\alpha}{\sin^2\mu + \cos^2\mu} = \mathfrak{S}\cos(\beta + \gamma). \tag{9}$$

Des égalités (8) et (9), on déduit encore

$$(K+1)^2 = 4(1 + \mathfrak{S}\cos\beta\cos\gamma), \tag{10}$$

$$(K-1)^2 = 4(1 - \mathfrak{S}\sin\beta\sin\gamma). \tag{11}$$

2° En changeant la somme des deux premiers termes de (1) en un produit, on obtient

$$\sin\tfrac{1}{2}(\mu+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha) + \sin\tfrac{1}{2}(\mu-\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha) = 0,$$

d'où l'on tire la proportion

$$\frac{-\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\mu} = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\mu}. \tag{12}$$

Désignons par L la valeur de chacun des rapports. En opérant comme ci-dessus, nous aurons

$$L^2 = \frac{-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{4\sin\mu}, \tag{13}$$

$$L^2 = \frac{\cos^2\frac{1}{2}\alpha\cos^2\frac{1}{2}\beta\cos^2\frac{1}{2}\gamma \pm \sin^2\frac{1}{2}\alpha\sin^2\frac{1}{2}\beta\sin^2\frac{1}{2}\gamma}{\cos^2\frac{1}{2}\mu \pm \sin^2\frac{1}{2}\mu}$$

$$= \frac{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma) \pm (1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)}{8(\cos^2\frac{1}{2}\mu \pm \sin^2\frac{1}{2}\mu)},$$

$$L^2 = \tfrac{1}{4}(1 + \mathfrak{S}\cos\beta\cos\gamma), \tag{14}$$

$$L^2 = \left(\frac{\mathfrak{S}\cos\alpha + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{4\cos\mu}\right), \tag{15}$$

$$L = \cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\mu - \sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma\sin\tfrac{1}{2}\mu$$

$$= \tfrac{1}{4}[\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)+\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)][\cos\tfrac{1}{2}(\mu-\gamma)+\cos\tfrac{1}{2}(\mu+\gamma)]$$

$$-\tfrac{1}{4}[\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)-\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)][\cos\tfrac{1}{2}(\mu-\gamma)-\cos\tfrac{1}{2}(\mu+\gamma)]$$

$$= \tfrac{1}{2}[\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\mu+\gamma)+\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\mu-\gamma)]$$

$$= \tfrac{1}{4}[\Sigma\cos(\beta+\gamma)+1]. \qquad (16)$$

3° La comparaison des égalités (9) et (16) ou (10) et (14) donne

$$(K+1)^2 = 16\,L^2. \qquad (17)$$

Dans cette relation, remplaçons K, L^2 par les seconds membres de (6), (15); il vient

$$\left(\frac{\Sigma\cos\alpha}{\cos\mu}+1\right)^2 = 4\frac{\Sigma\cos\alpha}{\cos\mu}+4\frac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos\mu}$$

ou

$$\left(\frac{\Sigma\cos\alpha}{\cos\mu}-1\right)^2 = 4\frac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos\mu}, \qquad (18)$$

ce qui est la formule (2).

En égalant les valeurs (14) et (15) de L^2, on trouve

$$\frac{\Sigma\cos\alpha}{\cos\mu}-1 = \Sigma\cos\beta\cos\gamma-\frac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos\mu}$$

$$= \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\,(\Sigma\,\text{séc}\,\alpha-\text{séc}\,\mu) \qquad (19)$$

Si l'on divise, membre à membre, les égalités (18) et (19), on obtient la formule (3).

Dans la relation (17), remplaçons K par le premier membre de (6), et L^2 par la valeur (13); ce qui donne

$$(\Sigma\sin\alpha+\sin\mu)^2 = -4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\mu. \qquad (20)$$

Si l'on égale les expressions (13) et (15) de L^2, on obtient

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos\mu}+\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\mu} = -\frac{\Sigma\cos\alpha}{\cos\mu} = -K. \qquad (21)$$

Les formules (18) et (20) peuvent être écrites ainsi :

$$\frac{\Sigma\cos\alpha}{\cos\mu}-1 = 2\left(\frac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos\mu}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\Sigma\sin\alpha}{\sin\mu}+1 = 2\left(-\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\mu}\right)^{\frac{1}{2}},$$

d'où, par soustraction, l'égalité (4).

Écrivons les relations (14) et (20) sous la forme

$$\frac{\mathfrak{S}\cos\alpha-\cos\mu}{\cos\alpha}=2\left(\frac{\cos\beta\cos\gamma\cos\mu}{\cos\alpha}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\mathfrak{S}\sin\alpha+\sin\mu}{\sin\alpha}=2\left(-\frac{\sin\beta\sin\gamma\sin\mu}{\sin\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En les ajoutant membre à membre et tenant compte de (1), on obtient la relation (5).

Question 622.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 216.)

Au moyen de la formule d'Euler

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots=\frac{\sin x}{x}, \tag{1}$$

vérifier la formule suivante, due à Cauchy :

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\frac{1}{6}\operatorname{tg}\frac{x}{6}+\frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{x}{8}+\cdots=$$

$$\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{3}{x}-\cot\frac{x}{3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{5}{x}-\cot\frac{x}{5}\right)\cdots \tag{2}$$

(E. Catalan.)

Solution par MM. Mosnat, Fr. Falisse *et* de Bőzóky. Prenant la dérivée logarithmique des deux membres de (1) et changeant les signes de tous les termes du résultat, on trouve

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{x}{8}+\cdots=\frac{1}{x}-\cot x. \tag{3}$$

Remplaçant dans l'égalité x successivement par $\frac{x}{3}, \frac{x}{5}, \cdots$ et divisant les nouvelles égalités par 3, 5, ...; il vient

$$\frac{1}{6}\operatorname{tg}\frac{x}{6}+\frac{1}{12}\operatorname{tg}\frac{x}{12}+\frac{1}{24}\operatorname{tg}\frac{x}{24}+\cdots=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{x}-\cot\frac{x}{x}\right), \tag{4}$$

$$\frac{1}{10}\operatorname{tg}\frac{x}{10}+\frac{1}{20}\operatorname{tg}\frac{x}{20}+\frac{1}{40}\operatorname{tg}\frac{x}{40}+\cdots=\frac{1}{5}\left(\frac{5}{x}-\cot\frac{x}{5}\right), \tag{5}$$

. . . . . .

Additionnons les relations (3), (4), (5), ... membre à membre, etc.

La démonstration, pour être mise à l'abri de tout reproche, exigerait certains développements.

Une démonstration, en quelque sorte inverse de la précédente, se trouve dans les *Mélanges mathématiques*, par M. E. CATALAN, t. III, p. 227.

QUESTIONS D'EXAMEN.

440. Par un point M donné dans le plan d'un angle droit XOY, mener une droite rencontrant OX, OY en des points N, P tels que

$$\overline{MN}^2 + \overline{MP}^2 = a^2.$$

Soient $MR = p$, $MS = q$ les perpendiculaires abaissées de M sur OX, OY et posons $RN = x$. On a

$$\overline{MN}^2 = p^2 + x^2, \quad PM : MN = q : x,$$

d'où l'équation du problème

$$x^4 - (a^2 - p^2 - q^2)\,x^2 + p^2 q^2 = 0,$$

et

$$x^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 - p^2 - q^2) + \sqrt{[a^2 - (p+q)^2]\,[a^2 - (p-q)^2]},$$

x^2 aura deux valeurs réelles positives, si $a > p + q$; dans ce cas, le problème admet quatre solutions, qui sont, deux à deux, symétriques par rapport à MR.

(Journal de BESSO et LUIGI.)

441. Dans un pentagone régulier, on peut découper six autres pentagones réguliers égaux. Évaluer l'aire de l'un de ces pentagones.

Les diagonales du pentagone donné ABCDE s'entrecoupent aux sommets d'un nouveau pentagone A'B'C'D'E'; les diagonales de ce dernier étant prolongées jusqu'à leur rencontre avec les côtés de ABCDE, on détermine cinq pentagones égaux à A'B'C'D'E'. Si A' et B' désignent les points de rencontre de EB avec AD et AC, on a

$$A'B' : DC = AA' : AD = \tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{5}),$$

AA' étant le plus petit segment de AD partagé en moyenne et extrême raison.

442. Soient A, B, C, D quatre points d'une hyperbole. Désignant par (AB) l'aire du parallélogramme que forment les parallèles aux asymptotes menées par les points A, B, on a la relation

$$\sqrt{(AB).(CD)} \pm \sqrt{(BC)\,(AD)} \pm \sqrt{(CA)\,(BD)} = 0. \quad \text{(CURTIS.)}$$

Soient

$$\left(x_1, \frac{1}{x_1}\right), \left(x_2, \frac{1}{x_2}\right), \left(x_3, \frac{1}{x_3}\right) \left(x_4, \frac{1}{x_4}\right)$$

les coordonnées des points A, B, C, D, l'équation de l'hyperbole étant $xy = 1$. On a

$$(AB) = (x_2 - x_1)\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) = \frac{(x_2 - x_1)^2}{x_1 x_2}, \quad \text{etc.}$$

la relation à vérifier est donc

$$(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (x_3 - x_2)(x_4 - x_1) + (x_1 - x_3)(x_4 - x_2) = 0.$$

442. Si les perpendiculaires élevées sur les côtés d'un triangle par les pieds des bissectrices intérieures correspondantes concourent en un même point, le triangle est isoscèle.

Si A', B', C' sont les pieds des bissectrices, la condition que les perpendiculaires élevées en ces points sur BC, CA, AB concourent en un même point, s'exprime par l'égalité

$$0 = S(BA'^2 - CA'^2) \equiv S\frac{a^2(b-c)}{b+c} \equiv \frac{(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

444. L'aire d'un triangle ABC est égale à $B\alpha \cdot C\alpha \cdot \cot\frac{1}{2}A$, α étant le point de contact de BC avec le cercle inscrit. (Russo.)

445. Si les diagonales AA', BB', CC' d'un hexagone AB'CA'BC' inscrit à une circonférence concourent en un même point, le produit des côtés de rang impair est égal à celui des côtés de rang pair. (Seauve.)

446. Construire deux droites x, y, telles que

$$x^4 + y^4 = a^4, \quad x^2 + y^2 = b^2,$$

a et b étant des longueurs données.

Posons

$$x^4 = b^2 u, \quad y^4 = b^2 v.$$

Alors

$$u + v = \frac{a^4}{b^2}, \quad u^2 + v^2 = b^2,$$

d'où aisément, u, v, x, y. (G. de Longchamps.)

447. Construire l'angle t tel que $a\sin t + b\cos t = c$, a, b, c désignant trois longueurs données.

Posons

$$c\sin t = x, \quad c\cos t = y.$$

Alors on a

$$ax + by = c^2, \quad x^2 + y^2 = c^2.$$

On trouvera x et y, puis t en cherchant l'intersection de la droite et de la circonférence représentées par ces deux équations. On peut aussi, au lieu de la droite, considérer la circonférence

$$x(x-a) + y(y-b) = 0$$

facile à construire. (G. de Longchamps.)

Autrement. Construire un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit a et b, puis chercher une droite x sur laquelle l'hypoténuse se projette suivant une longueur égale à c. L'angle du côté a avec l'axe x est l'angle demandé.

448. Sur chaque côté d'un triangle, comme diamètre, on décrit une circonférence; on mène les tangentes communes à ces circonférences prises deux à deux et on les limite à leurs points de contact. Le produit de ces trois tangentes est égal à $(p-a)(p-b)(p-c)$, a, b, c désignant les côtés du triangle, p son demi-périmètre. (G. Russo.)

449. Construire une circonférence qui passe par un point donné ou qui touche une droite donnée, et telle que l'axe radical de cette circonférence et d'une circonférence donnée soit une droite connue.

450. Soient AA', BB', CC' les hauteurs d'un triangle, H leur point de concours. On prend respectivement sur AC, AB les segments B'D = AB', C'E = AC'. Démontrer que les cinq points B, C, D, E, H appartiennent à une même circonférence.

QUESTIONS PROPOSÉES.

884. Trouver le lieu du point de contact de deux séries de circonférences, les unes tangentes à deux droites rectangulaires OX, OY, les autres tangentes à OX en un point fixe A. (H. Brocard.)

885. On donne une conique et deux points A, B pris sur la courbe. Démontrer qu'il existe deux points qui jouissent de la propriété suivante :

Une droite quelconque menée par l'un ou l'autre de ces points rencontre la conique en deux points P, Q tels que la somme des angles APB et AQB est constante.

Ces deux points sont le pôle et le milieu de la corde EF qui est vue, des points A et B, sous des angles droits. (G. Tarry.)

***886.** Si a, b, c désignent les côtés d'un triangle rectiligne, on a

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\gtrless 0.$$

(E. Catalan.)

CRITERIUM POUR LA FORMULE DE PAOLI;

par M. Éd Lucas, professeur au Lycée St-Louis, à Paris.

On sait que le problème fondamental de la partition des nombres revient à déterminer le nombre des solutions entières non négatives de l'équation

$$ax + by + cz + \cdots = n,$$

pour des valeurs données des nombres entiers $a, b, c, \ldots$, positifs et premiers entre eux. En désignant ce nombre par $\Psi(n)$, Euler a démontré, dans son *Algèbre*, que le coefficient de ξ^n dans le développement de

$$\frac{1}{(1-\xi^a)(1-\xi^b)(1-\xi^c)\cdots}$$

ordonné suivant les exposants croissants de ξ est précisément égal à $\Psi(n)$; mais la solution de cette question, c'est-à-dire de la détermination exacte du nombre $\Psi(n)$ n'était pas connue; et, en dehors de la formule de Paoli qui donne le résultat à une unité près, pour une équation à deux inconnues, on ne connait qu'une formule approximative donnée par Laguerre, dans le *Bulletin de la Société mathématique* (1877, t. V, pp. 76-78).

Nous allons exposer une méthode très simple, pour déterminer le nombre exact des solutions non négatives de l'équation

$$ax + by = c. \tag{1}$$

Nous poserons

$$c = abq + r,$$

q et r étant positifs et $0 \leqq r < ab$. De plus, soit (x_0, y_0) une première solution quelconque de l'équation (1); on sait que toutes les autres sont données par les formules

$$x = x_0 + bt; \quad y = y_0 - at.$$

On obtient d'ailleurs une première solution (x_0, y_0) par le développement de la fraction $(a : b)$ en fraction continue. En désignant par n le nombre des réduites, et par $(\alpha : \beta)$ l'avant-dernière réduite, on a

$$x_0 = (-1)^n c\beta, \quad y_0 = -(-1)^n c\alpha.$$

Ceci posé, considérons un système d'axes rectangulaires OX, OY et construisons la droite AB qui correspond à l'équation (1). Les valeurs

entières de t donnent sur cette droite des points équidistants qui représentent les solutions entières; la distance de deux points voisins est $\sqrt{a^2+b^2}$; la longueur du segment AB de la droite, intercepté par les axes, est $\frac{c}{ab}\sqrt{a^2+b^2}$. Par conséquent, d'après une formule donnée par Paoli, le nombre des solutions entières non négatives est q ou $(q+1)$, c'est-à-dire égal à l'un des deux quotients de c par ab, à une unité près, soit par défaut, soit par excès.

Si l'on construit la droite ayant pour équation

$$ax+by=c-ab,$$

on aperçoit tout de suite que le nombre des solutions entières non négatives de la nouvelle équation est moindre de 1 que pour l'ancienne; par conséquent, en appliquant q fois cette remarque, on trouve

$$\Psi(c)=q+\Psi(r)(*).$$

Plus généralement, *si c et c' désignent deux nombres non négatifs dont la différence égale mab, on a*

$$\Psi(c)-\Psi(c')=m.$$

On démontre de même cette autre proposition : *si c et c' désignent deux nombres non négatifs dont la somme égale sab, on a*

$$\Psi(c)+\Psi(c')=(s+1)\text{ ou }s,$$

suivant que c est ou n'est pas divisible par l'un des coefficients a ou b.

Mais, lorsque l'on suppose $0 \leqq r < ab$ et $r'=ab-r$, la relation précédente devient

$$\Psi(r)+\Psi(r')=2, \text{ ou } 1,$$

suivant que r est ou n'est pas divisible par l'un des coefficients; d'ailleurs $\Psi(r)$ est toujours l'un des nombres 1 ou 0, suivant que r est ou n'est pas divisible par l'un des coefficients.

Mais le nombre des valeurs totales de r est $(ab-1)$; celles qui sont divisibles par a ou b, sont en nombre $(a+b-1)$; il y a, par conséquent, $(a-1)(b-1)$ valeurs de r qui ne sont pas divisibles par a ou b; de là ce théorème démontré autrement par M. Cesàro dans son important mémoire *Sur diverses questions d'arithmétique* (p. 276):

(*) *Mathesis*, t. IX, p. 110; CATALAN, *Mélanges mathématiques*, t. I, p. 24.

Le nombre des valeurs nulles de $\Psi(r)$ *est égal à*

$$\tfrac{1}{2}(a-1)(b-1).$$

On en déduit facilement cette autre formule :

$$\Psi(0)+\Psi(1)+\cdots+\Psi(qab-1)=\frac{q}{2}(qab+a+b-1).$$

Mais il *restait à trouver le criterium* pour déterminer la valeur de $\Psi(r)$ pour une valeur donnée de r.

Considérons le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite ayant pour équation

$$ax+by=r;$$

la valeur de t qui correspond à ce point résulte de l'égalité

$$\frac{x_0+bt}{a}=\frac{y_0-at}{b}, \quad \text{d'où} \quad t=\frac{ay_0-bx_0}{a^2+b^2};$$

ou en substituant à $(x_0, y_0,)$ la solution donnée par les fractions continues

$$t=(-1)^{n-1}\frac{a\alpha+b\beta}{a^2+b^2}r;$$

cette valeur de t ne peut être entière, puisque (a^2+b^2) premier à $(a\alpha+b\beta)$ diviserait r qui est plus petit que lui, en exceptant le cas de $r=0$(*). Désignons par t_1 et $t_2=t_1+1$ les nombres entiers consécutifs qui comprennent t, et posons

$$(-1)^{n-1}(a\alpha+b\beta)r=t_1(a^2+b^2)+\rho_1,$$
$$(-1)^{n-1}(a\alpha+b\beta)r=t_2(a^2+b^2)-\rho_2,$$

ρ_1 et ρ_2 étant positifs et $<a^2+b^2$. Aux deux valeurs t_1 et t_2 correspondent les solutions

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{ar-b\rho_1}{a^2+b^2}, \\ y_1=\dfrac{br+a\rho_1}{a^2+b^2}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_2=\dfrac{ar+b\rho_2}{a^2+b^2}, \\ y_2=\dfrac{br-a\rho_2}{a^2+b^2}. \end{cases}$$

(*) En général, $\lambda x+\mu y$, $\lambda' x+\mu' y$ ont même plus grand commun diviseur que x et y, si $\lambda\mu'-\lambda'\mu=\pm 1$. Dans le texte, nous appliquons cette remarque à $ax+b\beta$, $a\alpha+b\delta$.

Une seule d'entre elles peut être positive : Donc *pour que l'équation*

$$ax + by = r$$

soit possible en nombres entiers, il faut et il suffit que l'un des nombres $ar - bp_1$, *et* $br - ap_2$ *ne soit pas négatif, ou que leur produit ne soit pas positif.* D'ailleurs, les formules précédentes donnent les deux solutions pour lesquelles $x^2 + y^2$ a les plus petites valeurs possibles.

Exemple. Soit l'équation $35x + 24y = 201$. On a

$$a = 35, \quad b = 24, \quad r = 201;$$
$$\alpha = 16, \quad \beta = 11, \quad n = 4;$$

d'où l'on tire

$$t_1 = -92, \quad \rho_1 = 68, \quad x_1 = 3, \quad y_1 = 4.$$

Note. Voir J. M. S., 1886, pp. 20-22, une autre note de M. Lucas.

SUR LA RÉVERSIBILITÉ DE LA TRANSFORMATION LINÉAIRE;

par M. Cl. Servais, répétiteur à l'Université de Gand.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 267.)

Outre les hypothèses que nous avons examinées, concernant les points doubles, on pourrait en imaginer d'autres faciles à écarter. Mais l'examen des différents cas ferait perdre à notre démonstration sa simplicité; c'est pourquoi nous proposons la suivante.

Si P et P' sont deux points correspondants, à la droite PP' correspond la droite P'P; à un point Q de PP' correspond doublement un point Q' de la même droite, et les couples de points QQ' déterminent une involution. Soient U et V les points doubles de cette involution. De même, à tout plan μ passant par PP', correspond doublement un plan μ' mené également par PP'; les couples de plans μ et μ' sont en involution; nous représenterons les plans doubles par σ et τ. Le plan σ est le support d'un système plan involutif; donc deux points homologues de σ sont alignés sur un point fixe S et séparés harmoniquement par S et une droite fixe s(*). La droite PP' passe nécessairement par S, car ses points se correspondent deux à deux dans le système σ; par conséquent S se confond, par exemple, avec U et s passe par V. De même, le plan τ est le support d'un système plan involutif, ayant un centre de perspective T et un axe de perspective t.

---

*) Voir *Mathesis*, t. VII, pp. 90-91.

Deux cas peuvent se présenter : 1° S et T sont réunis au point double U, s et t passent par V. Le plan (st) sera un plan double de la transformation. R étant un point quelconque de l'espace, la droite SR rencontre le plan (st) en un point double S′; donc la droite SS′ est sa propre homologue et le point R′ homologue du point R est situé sur SS′. Les couples de points R, R′ sont donc en ligne droite avec le point S, et séparés harmoniquement par S et (st). Ce cas est celui du *système perspectif involutif*.

2° Le point S est en U et le point T en V, alors les droites s et t passent respectivement par les points V et U. Par le point R menons une droite rencontrant les deux droites s et t aux points doubles S_1 et T_1, le point correspondant R′ sera situé sur cette droite et on aura

$$(S_1T_1RR') = -1.$$

Ce cas est celui du *système involutif gauche*.

ˣREVUE BIBLIOGRAPHIQUE(*).

Géométrie élémentaire récente, par J. Casey, professeur à l'Université catholique d'Irlande; traduit de l'anglais par Fr. Falisse; avec une préface de M. J. Neuberg. Gand, Hoste; Paris, Gauthier-Villars et Fils; 1890 (80 pages grand in-8°, avec 33 figures dans le texte). Prix : fr. 1 50.

Cette traduction du chapitre supplémentaire de *A Sequel to Euclid* du savant professeur de Dublin a paru dans *Mathesis* en janvier 1889; l'appendice inédit, en avril 1890. Sommaire. 1. Points isogonaux, isotomiques; antiparallèles, symédianes. 2. Deux figures directement semblables. 3. Cercles de Lemoine, de Tucker et de Taylor. 4-5. Trois figures semblables. Cercle de Brocard. Cercle des neuf points. 6 et 8. Polygones harmoniques. 7. Figures associées. La préface signale les principaux promoteurs de la géométrie récente.

Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre, par G. de Longchamps, professeur de mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne. Paris, Delagrave, 1890, (in-8° de XIV-366 pages). Prix : 6 francs.

Ouvrage extrêmement intéressant, touchant à une multitude de questions de géométrie théorique et de géométrie pratique. Nous le recommandons surtout aux élèves des classes scientifiques et des Écoles spéciales.

Première partie. Introduction. 1. Considérations sur les transversales. 2. Trans-

---

(*) Le temps et la place nous manquent pour donner des comptes rendus détaillés de tous les ouvrages envoyés à la rédaction; nous croyons donc utile de faire au moins connaître le sommaire des matières qui y sont traitées, sous la forme la plus brève possible.

versales et points réciproques. Théorèmes divers. 3. Problèmes fondamentaux. 4. Partage d'une droite en parties égales. 5. Tracé des coniques dont les sommets sont donnés. 6. Tracé des coniques (cas particuliers). 7. Tracé des coniques (cas généraux). 8. Rayon de courbure dans les coniques. 9 Tracé des cubiques : Cissoïde, cubique duplicatrice. 10. Strophoïde, trisectrice de Mac-Laurin et cubiques circulaires unicursales. 11. Les cubiques unicursales non circulaires : Folium de Descartes, serpentine, trident de Newton, courbe d'Agnesi, cubique mixte, cubique conchoïdale, conchoïdale circulaire, folium parabolique droit, le folium parabolique oblique. 12. Les quartiques unicursales : Folium double, limaçon de Pascal, lemniscate, folium droit, folium simple, quartiques pyriformes.

Seconde partie. Problèmes d'arpentage (applications à l'art de la guerre). 1. Les premières applications; la fausse équerre et le cordeau. 2. La largeur de la rivière. 3. Le problème de l'obstacle 4. La distance au point inaccessible. 5. Les problèmes du point inaccessible. 6. Les problèmes de la droite inaccessible. 7. Distance de deux points inaccessibles. 8. Les figures inaccessibles; le problème de la capitale. 9-10. Les problèmes d'artillerie. 11. Le point inaccessible dans l'espace. 12. Problèmes divers de géométrie pratique. 13. Exercices.

Nouveau Cours de Géométrie élémentaire, par L. Lecointe, professeur honoraire des athénées, etc. Paris, Lebègue et C^ie^; Bruxelles, Decq; Gand, Hoste; S^t^-Gilles, chez l'auteur, 1888 (Gr. in-8^o^ de XL-216 pages, 324 figures dans le texte). Prix : 8 francs.

Ouvrage très original dans la forme, parfois même un peu bizarre, où sont rapprochées les théories analogues de la géométrie plane et de la géométrie solide, dans l'ordre suivant (nous citons textuellement la préface) :

« A. Préliminaires et § 1 (ancien livre I) constituant le strict nécessaire en notions abstraites permettant d'étudier la théorie des plans combinés entre eux et avec des droites, ainsi que les angles solides, consignés dans le § 2 (ancien livre V). ».

« B. Les §§ 3, 4, 5, 6 et 7 traitent des polygones plans et des polyèdres considérés au point de vue de leurs propriétés, de leurs mesures, de leur similitude et de leur symétrie, et cela, sans étude préalable de la circonférence et du cercle (anciens livres III et VI). »

« C. Les §§ 8, 9, 10, 11, 12 traitent de tout ce qui se rapporte à la circonférence, au cercle, et au rapport π (anciens livres II et IV). »

« D. Enfin les §§ 13, 14, 15 se composent de la théorie des corps ronds : sphère, cylindre et cône, ainsi que des polyèdres réguliers. »

Nous sommes loin de partager les idées de l'auteur sur les points délicats de la géométrie élémentaire; mais, au point de vue pédagogique (en particulier sur le sens des théorèmes de mesure où l'on ne dit pas explicitement quelle est l'unité employée), son livre contient maintes bonnes remarques dont les jeunes professeurs pourront faire leur profit. En tête du livre, il y a une très bonne table analytique.

Traité de Géométrie descriptive pour l'enseignement secondaire classique, par E. Lebon, professeur au lycée Charlemagne, etc. Second volume, à l'usage des classes de mathématiques spéciales. Paris, Delalain (Un volume in-8° de VIII-347 pages avec 198 figures dans le texte et un atlas de 14 planches in-4°). Prix : 12 francs.

Nous avons indiqué le contenu du premier volume dans *Mathesis*, 1889, t. IX, pp. 79-80. Voici le sommaire des matières traitées dans le second, qui est aussi bien gradué que le premier :

1. Lignes et surfaces courbes (plan osculateur, plan tangent). 2. Cône et cylindre. 3. Contours apparents. 4. Surfaces de révolution. 5. Plans tangents aux cônes et aux cylindres. 6 Cône de révolution. 7. Plans tangents aux surfaces de révolution. 8. Sphère : problèmes divers. 9. Généralités sur les sections planes des surfaces courbes. 10. Généralités sur les sections planes des cylindres et des cônes. 11-12. Exemples. 13-14. Sections planes des surfaces de révolution. 15. Étude de l'hyperboloïde de révolution à une nappe. 16. Surfaces de révolution du 2^{me} et du 4^{me} ordre engendrées par une conique. 17. Propriétés relatives à l'intersection des surfaces courbes. 18. Généralités sur les intersections des cônes et des cylindres. 19 Intersection de deux cylindres. 20. Intersection d'un cylindre et d'un cône. 21. Intersection de deux cônes. 22. Intersection d'une surface de révolution avec un cylindre ou un cône. 23. Intersection de deux surfaces de révolution. 24. Intersection de trois surfaces. 25. Ombres des cylindres, des cônes et des surfaces de révolution. — Problèmes gradués à résoudre. Compositions pour l'École polytechnique et pour l'École centrale. — Appendice. 1. Surfaces réglées. 2. Sphère. 3. Ellipsoïde scalène. 4. Paraboloïde hyperbolique. 5. Hyperboloïde à une nappe. 6. Intersection de deux surfaces du second ordre. 7. Emploi d'un seul plan de projection.

« Les nombreux problèmes numériques à résoudre contenus dans ce volume ont été composés de manière à présenter les principales difficultés graphiques.... Les épures (de l'atlas) ont été gravées et tirées avec le plus grand soin afin de pouvoir servir de modèle de trait. »

Geometrische Konstruktions-Aufgaben, herausgegeben von Prof. Dr. H. Lieber in Stettin, und F. von Lühmann, in Königsberg, i. d. Neumark. Achte Auflage. Berlin, Simion, 1889 (VI-206 p. in-8°, avec une planche). Prix : 2 marcs 70.

Sommaire. I. Constructions de triangles et de quadrilatères, avec ou sans emploi des proportions, sans recourir ou en recourant aux cercles inscrits et exinscrits. II. Problèmes divers, à résoudre sans le secours des proportions, ou avec les proportions. III. Problèmes sur la circonférence. IV. Transformation et division des figures, figures inscrites et circonscrites. V. Problèmes à résoudre par l'algèbre. *Appendice.* 1. Problèmes à résoudre par l'emploi des coordonnées. 2. Problèmes de géométrie projective. 3. Lieux géométriques. 4. Problèmes sur le trapèze isoscèle.

Le livre contient environ *trois mille* problèmes gradués et classés sous environ cent cinquante titres distincts. La première édition a paru en 1870.

Stereometrische Aufgaben, herausgegeben von Prof. Dr. H. Lieber. Berlin, Simion, 1888 (VI-141 pages in-8°). Prix : 2 marcs 40.

Problèmes de *mesure* sur le prisme, le cube, la pyramide et le tronc de pyramide ; le tétraèdre, l'octaèdre et le dodécaèdre réguliers ; le cône, le cône tronqué, la sphère, l'octaèdre à faces isoscèles ; le cylindre ; les corps engendrés par la révolution des quadrilatères et des polygones réguliers, le théorème de Guldin.

Trigonometrische Aufgaben, herausgegeben von Prof. Dr. H. Lieber und F. von Lühmann. Dritte Auflage. Berlin, Simion, 1889 (VII-298 p. in-8° et une planche). Prix : 4 marcs.

Recueil extrêmement riche de questions graduées sur la trigonométrie plane rangées en cinq sections : 1. Angles auxiliaires. 2. Problèmes sur les triangles. 3. Problèmes sur les quadrilatères. 4. Problèmes divers. 5. Applications à la mesure des hauteurs, des distances et des parallaxes. Un appendice contient : 1° Une table de 131 triangles rectangles à côtés commensurables, avec calcul des angles, de la hauteur et des deux segments formés sur l'hypoténuse par le pied de la hauteur. 2° Une table de 54 triangles scalènes à côtés commensurables pour lesquels sont calculés les éléments suivants : les trois hauteurs, les trois médianes, une bissectrice, les segments qu'elle forme sur le côté opposé, les rayons du cercle circonscrit, du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits, les segments formés par l'une des hauteurs sur le côté auquel elle est perpendiculaire, l'aire du triangle, les trois angles, les angles formés par les médianes avec les côtés opposés. — Les solutions, quand elles sont données ou esquissées, sont analytiques ; en général, elles débutent, autant que possible, par la recherche des angles inconnus. La première édition de ce livre a paru en 1874.

Synthetische Beweise planimetrischer Sätze von W. Fuhrmann, Professor am königl. Realgymnasium auf der Burg in Königsberg, Ostpreussen. Berlin, Simion, 1890 (XXIV-190 pages in-8°, avec 14 planches).

L'auteur de cet ouvrage a eu pour but : 1° de faire pour les théorèmes de géométrie ce que Petersen a réalisé pour les problèmes dans son petit livre : ***Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques***, c'est-à-dire de donner un exposé systématique des méthodes de démonstration en planimétrie ; 2° de faire connaître les principaux résultats de la géométrie récente qu'il appelle *géométrie brocardienne*. Voici les principales subdivisions de l'ouvrage.

I. *Méthodes*. 1. Préliminaires et principes. 2. But et objet des théorèmes ; différentes sortes de preuves. 3. Quelques règles générales relatives aux démonstrations ; procédés auxiliaires.

II. *Exemples*. 1. Principes, parallèles, triangles isocèles, égalité des triangles, angles inscrits. 2. Triangles et cercles inscrit ou ex-inscrits ; application des proportions, aires, longueurs positives ou négatives. 3. Utilisation de tous les procédés auxiliaires : fonctions trigonométriques, rapports harmoniques, projectivité, correspondance des figures. 1° Théorèmes divers. 2° Droite de Simson. 3° Quadrila-

tère complet. 4° Quadrilatères divers. 5° Triangles ayant entre eux certaines relations. 6° Transversales réciproques. 7° Symédianes et point de Lemoine. 8° Cercles associés au triangle. 9° Triangle ayant pour sommets les symétriques par rapport aux côtés d'un triangle des milieux des arcs du cercle circonscrit sous-tendus par ces côtés.

Appendice. I. Propriétés fondamentales et élémentaires de la géométrie brocardienne (pp. 115-156). II. Propositions de la géométrie brocardienne relatives à certaines coniques. 1. Paraboles de Artzt et Kiepert. 2. Hyperbole de Kiepert (157-190).

Si l'on en excepte le chapitre relatif aux méthodes (21 pages), on peut dire que le livre de M. Fuhrmann est consacré principalement à la géométrie du triangle.

Complementi d'algebra per agli allievi degli Istituti tecnici (2° biennio) del Prof. G. Z. Reggio, Preside dell' Istituto Tecnico di Treviso. Torino, Roma, Milano, Firenze, Ditta G. B. Paravia e Comp. 1889 (VII-253 pp. in-12). Prix : fr. 3-50.

Sommaire. I. *Calcul combinatoire*. 1. Arrangements, permutations, combinaisons, binôme. 2. Applications : probabilités, déterminants. 3. Exercices.

II. *Nombres et grandeurs*. 1. Nombres réels, entiers, fractionnaires, négatifs, irrationnels. 2. Grandeurs et rapports. 3. Imaginaires. 4. Exercices.

III. *Variable et limite*. 1. Variables, limites, théorèmes sur les limites. 2. Les nombres irrationnels considérés comme limites. 3. Applications :

$$\lim\{[(1+x)^{\lambda}-1]:x\}, \quad \lim[\sin x : x],$$

pour $x=0$,

$$\lim(1+x^{-1})^{x}$$

pour $x=\infty$. 3. Fonctions continues et leur représentation géométrique. 4. Fractions continues. 5. Exercices.

IV. *Équations et inégalités*. 1. Équations du premier, du second degré (compléments); équations binômes. 2 Analyse indéterminée du premier degré. 3. Inégalités; maxima et minima. 4. Expressions qui prennent une forme indéterminée. 5. Exercices.

L'auteur, comme on le voit, touche à toutes les questions délicates relatives aux irrationnelles et aux limites. Il n'a pas toujours réussi à le faire avec une entière rigueur, comme l'a fait remarquer, avec raison, M. Viaggi, dans un compte rendu publié, en 1889, dans le *Journal de Besso*. Cependant, malgré ce défaut, le livre est recommandable, comme introduction à une étude approfondie de ces questions qui y sont traitées au point de vue de l'enseignement moyen.

Kort begrip der Rekenkunde door E. Gelin, vertaald door P. Kerkhofs. Brussel, Schepens; Namen, Charlier; Gent, Siffer; Huy, chez l'auteur, 1890 (400 p. in-12, cartonné). Prix : 3 francs .

Traduction flamande du *Précis d'Arithmétique* de M. l'abbé Gelin. Il est subdivisé en quatre parties, dont chacune est accompagnée d'un choix de problèmes de récapitulation. Les définitions et les règles qu'il est le plus nécessaire d'inculquer dans

la mémoire des élèves sont imprimées en caractères gras ; les numéros qui peuvent être omis par ceux qui ont besoin d'un cours moins étendu d'arithmétique sont marqués d'un astérisque. Nous avons déjà signalé la première partie (*Mathesis*, IX, p. 160); elle est consacrée aux nombres entiers; la seconde traite des fractions et des mesures; la troisième des problèmes ou applications usuelles de l'arithmétique; la quatrième des racines, des proportions, des progressions et des logarithmes.

Les problèmes de récapitulation du *Précis* flamand de M. l'abbé Gelin occupent quatre-vingt-dix pages; nous espérons qu'ils seront introduits également dans la prochaine édition du *Précis* français.

SUR LA DÉVELOPPANTE DE LA CHAINETTE ;

par M. E. Cesáro, à Palerme.

Toute développante de chaînette rencontre sous un angle constant une infinité de circonférences égales ayant leurs centres sur une droite.

Cherchons une courbe qui rencontre sous l'angle $\frac{1}{2}\pi - \theta$ une infinité de circonférences égales, dont les centres O sont alignés sur une droite. Les projections du rayon OM sur la tangente et sur la normale à la courbe inconnue ont évidemment des longueurs constantes, a et $b = a \operatorname{tg} \theta$. Soient s et ρ l'arc et le rayon de courbure de la *développée* de (M), φ l'inclinaison du rayon du cercle sur la ligne des centres. Puisque $d\varphi$ est l'angle de contingence de (M), la distance MM′ de deux points de (M), infiniment voisins, est $s d\varphi$. La figure *rigide* OM passe donc à la position O′M′ par une *translation* $s d\varphi$ et une *rotation* $d\varphi$. On sait que, par l'effet de ces mouvements, les coordonnées de O par rapport à deux axes orthogonaux, fixes dans le plan, éprouvent les variations $(s - b)\, d\varphi$ ou $s d\varphi$ (pour un choix convenable de l'origine des arcs) et $a d\varphi$, d'où il suit que $(a : s)$ est la tangente trigonométrique de l'inclinaison de la tangente à (M), en M, sur la ligne des centres. Cette inclinaison est d'ailleurs égale à $\theta - \varphi$. Donc $s = a \cot(\theta - \varphi)$, d'où, par dérivation,

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{a}{\sin^2(\theta - \varphi)},$$

c'est-à-dire

$$\rho = a + \frac{s^2}{a}.$$

On sait que cette équation caractérise une *chaînette*. La courbe cherchée est donc *parallèle à une tractrice*.

QUESTIONS D'ARITHMOLOGIE.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 214.)

74. Si l'on a $a+b+c=0$ et que l'on pose $S_n = a^n + b^n + c^n$, on a les relations

1° $\frac{1}{2} S_2 = -(ab+bc+ca) = a^2 - bc = b^2 + bc + c^2$.

2° $S_3 = 3abc$.

3° $S_4 = \frac{1}{2} S_2^2$.

4° $\frac{1}{5} S_5 = \frac{1}{3} S_3 \cdot \frac{1}{2} S_2$.

5° $S_6 = \frac{1}{4} S_4 S_2 + \frac{1}{3} S_3^2$.

6° $\frac{1}{7} S_7 = \frac{1}{6} S_4 S_3 = \frac{1}{6} S_2 S_5 = \frac{1}{4} abc\, S_2^2$.

7° $\frac{1}{8} S_8 = \frac{1}{16} S^4 + \frac{1}{15} S_3 S_5$.

8° $S_9 = \frac{7}{10} S_2 S_4 + \frac{1}{5} S_3 S_6 = \frac{3}{8} S_3 S_2^3 + \frac{1}{9} S_3^3$.

9° $\frac{1}{2} S_{10} = (\frac{1}{2} S_2)^2 + 6 (\frac{1}{5} S_5)^2$.

10° $(\frac{1}{7} S_7)^2 = (\frac{1}{5} S_5)^2 S_4$.

11° $(\frac{1}{5} S_5)^2 = \frac{1}{3} S_3 \cdot \frac{1}{7} S_7$.

12° $(\frac{1}{5} S_5)^2 (\frac{1}{7} S_7)^2 \cdot (\frac{1}{11} S_{11}) = (\frac{1}{7} S_7)^5 + (\frac{1}{5} S_5)^7$.

13° $a^2 b + b^2 c + c^2 a = a^2 c + b^2 a + c^2 b = -(ab+bc+ca)^2 = -\frac{1}{4} S_3^2$.

14° $7\, S_3 S_4 = 5\, S_7 S_2$.

Plusieurs de ces relations sont déjà anciennes. Nous avons transcrit les formules 3 — 9 et 14 du J. M. E. (1887, p. 179 et 1888, pp. 36 et 44); l'identité 10 est due à M. Edwards (*Ed. Times*, question 6113); les identités 11 et 12 ont été signalées par M. Catalan (*Mél. Math.*, t. III, p. 53).

Pour vérifier ces formules, on peut calculer les sommes S_n relatives à l'équation $x^3 + px + q = 0$, dont a, b, c sont les racines.

On peut transformer ces formules en remplaçant a, b, c par les expressions $\beta - \gamma, \gamma - \alpha, \alpha - \beta$, dont la somme = 0.

75. Soit n un nombre entier supérieur à 2; si l'un des nombres $2^n - 1$, $2^n + 1$ est premier, l'autre ne l'est pas.

Si $2^n - 1$ est premier, n est nécessairement un nombre premier impair; alors $2^n + 1$ est un multiple de 3. Si $2^n + 1$ est premier, n est une puissance de 2 et $2^n - 1$ est une différence de deux carrés. (DE ROCQUIGNY.)

76. La différence de deux cubes consécutifs, de même parité, n'est jamais une puissance exacte.

Soit $N = (a+1)^3 - (a-1)^3 = 2(3a^2 + 1)$. Si N est une puissance exacte, a est impair; soit $a = 2b + 1$. Alors $N = 8(3b^2 + 3b + 1)$; comme $8 = 2^3$ et que $3b^2 + 3b + 1$

est impair, $3b^2 + 3b + 1$ doit être un cube ; mais ce nombre est la différence de deux cubes, etc. (DE ROCQUIGNY.)

77. Le produit

$$(1 \cdot 2 + 3)(4 \cdot 5 + 6)(7 \cdot 8 + 9)\ldots$$

est une somme de deux carrés.

Le n^e facteur $= (3n - 2)(3n - 1) - 3n = (3n - 1)^2 + 1$. (DE ROCQUIGNY.)

78. Si l'on partage les nombres impairs en groupes de la manière suivante :

1, 3;
5, 7, 9, 11;
13, 15, 17, 19, 21, 23; etc.,

le n^e groupe a pour somme $4n^3$.

COROLLAIRE. La somme des n premiers cubes est égale au carré de la somme des n premiers nombres entiers. (DE ROCQUIGNY et GILLET.)

79. On forme le tableau :

1;
2, 3, 4;
3, 4, 5, 6, 7;
. . . . . .
n, $n+1$, $n+2$, ... $3n-2$.

La somme des termes d'une ligne horizontale est un carré impair.

COROLLAIRE. Le $(3n - 2)^e$ nombre triangulaire est la somme d'un triangulaire et d'un carré impair, et aussi la somme de trois triangulaires.

80. La somme des n premiers carrés étant retranchée de la somme des n carrés suivants, le reste est un cube parfait. (DE ROCQUIGNY.)

81. La somme des n^e termes des n progressions arithmétiques

1, 3, 5, ...
1, 5, 9, ...
1, 7, 13, ...
. . . . . .

composées chacune de n termes est exprimée par un triangulaire.

(DE ROCQUIGNY.)

82. La somme des carrés de trois ou cinq nombres en progression arithmétique n'est jamais un carré.

Si le terme du milieu et la raison avaient un facteur commun, on pourrait supprimer ce facteur commun à tous les termes de la progression. 1° Soit

$$s \equiv (x-d)^2 + x^2 + (x+d)^2 = 3x^2 + 2d^2.$$

Si

$$d = \mathcal{M}\, 3 \pm 1, \quad \text{on a} \quad 3x^2 + 2d^2 = \mathcal{M}.\ 3.+2$$

et s n'est pas un carré; si

$$d = \mathcal{M}.\ 3, \quad \text{on a} \quad x = \mathcal{M}.\ 3 \pm 1,$$

et s est divisible par 3 sans qu'il le soit par 3^2. 2° Soit

$$s \equiv (x-2d)^2 + (x-d)^2 + x^2 + (x+d)^2 + (x+2d)^2 = 5\,(x^2 + 2d^2).$$

Si s était un carré, $x^2 + 2d^2$ serait de la forme $5y^2$; comme

$$x^2 = \mathcal{M}\, 5 \quad \text{ou} \quad \mathcal{M}\, 5 \pm 1, \quad 2d^2 = \mathcal{M}\, 5 \quad \text{ou} \quad \mathcal{M}\, 5 \pm 2,$$

$x^2 + 2d^2$ n'est divisible par 5 que lorsque x et d le sont, etc.

83. Mettre les expressions

$$(a+1)^5 - (a-1)^5, \quad (a+1)^5 - (a-1)^5, \quad (a+1)^7 - (a-1)^7, \quad (a+1)^9 - (a+1)^9,$$

sous la forme d'une somme de cinq carrés.

Les décompositions cherchées sont

$$4a^2 + a^2 + a^2 + 1 + 1;$$
$$(2a^2 + 3a)^2 + (2a^2 - 3a)^2 + (a^2 + 1)^2 + (a^2)^2 + 1;$$
$$(3a^3 - a)^2 + (2a^3 + 4a)^2 + (a^3 + 5a)^2 + (5a^2 + 1)^2 + (5a^2 - 1)^2;$$
$$(4a^4 + 18a^2)^2 + (4a^3 - 8a)^2 + (a^4 + 2a^3 - 2a + 1)^2 + 4a^4 + (a^4 - 2a^2 + 2a + 1)^2.$$

Les deux premières expressions sont aussi des sommes de trois carrés (*Mathesis*, t. VI, p. 79). (DE ROCQUIGNY.)

84. Mettre la différence de deux cubes consécutifs sous la forme d'une somme de quatre carrés.

$$(2n+1)^3 - (2n)^3 = (3n+1)^2 + n^2 + n^2 + n^2. \quad \text{(DE ROCQUIGNY.)}$$

85. Mettre $3(x^2 + x^4 + x^6)$ sous la forme d'une somme de quatre carrés ou de quatre cubes.

Les décompositions sont

$$(3x^2)^3 + 3(3x^3 - x)^3, \quad 1 + (x^2 - x)^3 + (x^2 + x)^3 + (x^2 - 1)^3.$$

(DE ROCQUIGNY.)

86. Le nombre $x^4 + 4y^4$, égal à un produit de deux facteurs entiers (CATALAN) est aussi une somme de quatre carrés.

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$$
$$= (y^2 - x^2)^2 + (y^2 + xy)^2 + (y^2 + xy)^2 + y^4. \text{ (DE ROCQUIGNY.)}$$

87. Quel que soit le nombre entier n, l'un des nombres

$$3^{3n} + 2^{3n}, \quad 3^{3n} - 2^{3n}$$

est divisible par 35.

Si n est impair, $3^{3n} + 2^{3n}$ est divisible par $3^3 + 2^3$. Si $n = 2^p.n'$, où n' est un impair, $3^{3n} - 2^{3n}$ admet le facteur $3^{3n'} + 2^{3n'}$. (DE ROCQUIGNY.)

88. Démontrer que la somme

$$1 + 3^2 + 3^4 + \cdots + 3^{2(n-1)}$$

est de la forme

$$1 + 2 + 3 + \cdots + p.$$

Cette somme est la moitié du produit de deux nombres entiers consécutifs.

(CHRISTIE.)

89. Si le nombre $3^m + 1$ est divisible par 10, $3^{m \pm 4n} + 1$ le sera également.

Les chiffres terminaux des puissances de 3 ont pour période 1, 3, 9, 7; donc m est de la forme $4p + 2$. (BROCARD, N. A. M., 1877 (2), XVI, p. 191.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 296.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 248.)

Soit C ***une courbe quelconque. On fait tourner d'un même angle et dans le même sens les tangentes à*** C ***autour des points où elles rencontrent une droite fixe. On cherche l'enveloppe*** C′ ***de ces tangentes, dans leurs nouvelles positions. Établir les relations générales existant entre*** C ***et*** C′, ***et les appliquer à quelques cas particuliers. Montrer, en outre, les analogies de*** C′ ***avec la conchoïde de*** C, ***par rapport à un point fixe.*** (E. CESÀRO.)

Soient OX la droite fixe, M et M′ deux points correspondants de C et C′, T le point de OX où se coupent les tangentes menées en M et M′. Par hypothèse, l'angle MTM′ a une valeur constante α. Nous nous proposons de déduire le point M′ du point M.

Le centre instantané de rotation de l'angle invariable MTM′ est à

l'intersection I de la perpendiculaire élevée en T sur OX, avec la normale menée en M à C. En projetant I sur TM', on obtient le point de contact de cette droite avec son enveloppe. Lorsque l'angle α varie, le lieu des points M' qui correspondent à une même tangente de C, est la circonférence décrite sur TI comme diamètre.

On parvient au même résultat par la méthode des limites. Soient NSN' une seconde position de l'angle MTM', et P, P' les points de rencontre de MT avec NS, de M'T avec N'S. Les quatre points P, P', T, S sont sur une même circonférence; lorsque M' tend vers M, cette ligne a pour limite la circonférence passant par M, M', T et touchant OX en T.

Voici une méthode analytique, dont le principe est emprunté à MM. Nicolaïdès et Dyrion (N. A. M., 1868, p. 176, et N. C. M., t. I, p. 84); elle est identique, au fond, avec la méthode des coordonnées axiales que M. d'Ocagne a développée et que M. Cesáro a appliquée à la question 296 (N. A. M., 1884, p. 545 et 1885, p. 259). Soit t une droite qui se meut d'après des conditions données et enveloppe une certaine courbe C; on peut la représenter par l'équation

$$(x - a)\cos\theta + y\sin\theta = 0, \qquad (1)$$

θ étant un paramètre variable, et l'abscisse à l'origine a étant une fonction connue de θ. Dérivons l'équation (1) deux fois de suite par rapport à θ; il vient

$$-(x - a)\sin\theta + y\cos\theta = a'\cos\theta, \qquad (2)$$

$$(x - a)\cos\theta + y\sin\theta = 2a'\sin\theta - a''\cos\theta. \qquad (3)$$

Le point de contact M de t avec C satisfait aux deux équations (1) et (2); donc l'équation (2) représente la normale en M à C. Pour la même raison, le point de contact ω de la normale avec la développée de C (ou le centre de courbure de C) est déterminé par les équations (2) et (3), et le rayon de courbure ρ est la distance des deux parallèles représentées par (1) et (3), de sorte que $\rho = 2a'\sin\theta - a''\cos\theta$.

Faisons tourner la droite t de l'angle α, autour du point où elle rencontre OX; soient t' une nouvelle position, M' le point où t' touche son enveloppe C', ω' le centre de courbure de C' en M'. Les équations (1), (2), (3) seront remplacées par celles-ci :

$$(x - a)\cos(\theta + \alpha) + y\sin(\theta + \alpha) = 0 \qquad (1')$$

$$-(x - a)\sin(\theta + \alpha) + y\cos(\theta + \alpha) = a'\cos(\theta + \alpha), \qquad (2')$$

$$(x - a)\cos(\theta + \alpha) + y\sin(\theta + \alpha) = 2a'\sin(\theta + \alpha) - a''\cos(\theta + \alpha). \qquad (3')$$

L'équation (2') représente la normale M'ω'; on voit facilement qu'elle passe par un point fixe I, indépendant de la valeur de α et ayant pour coordonnées $x = a$, $y = a'$. L'équation (3') représente la normale à la développée de C'; cette droite passe également par un point fixe I', qui ne varie pas avec α et dont les coordonnées sont $x = a - a''$, $y = 2a'$. Le lieu de ω' est, évidemment, la circonférence qui a pour diamètre la droite II'. Le rayon de courbure M'ω' a pour valeur

$$\begin{aligned} \rho &= 2a' \sin(\theta + \alpha) - a'' \cos(\theta + \alpha) \\ &= (2a' \sin\theta - a'' \cos\theta)\cos\alpha + (2a' \cos\theta + a'' \sin\theta)\sin\alpha \\ &= \rho_1 \cos\alpha + \rho_2 \sin\alpha ; \end{aligned} \qquad (4)$$

ρ_1, ρ_2 sont les rayons de courbure des courbes qui correspondent aux hypothèses : 1° $\alpha = 0$ (courbe donnée C); 2° $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ (*transformée orthotangentielle* de C). La formule (4) admet l'interprétation suivante : *Si, sur les normales aux différentes courbes* C', *on porte, à partir de leur point de concours* I, *une longueur égale au rayon de courbure correspondant, l'extrémité de cette longueur décrit une circonférence.* Ce théorème résulte également de ce que les lieux des points M', ω' sont deux circonférences passant par I.

Lorsque C' est une courbe de la classe m, C est, généralement, de la classe $2m$, car de chaque point T de OX, on peut mener m tangentes à C' correspondant aux m tangentes de C issues du même point T; de plus, OX est une tangente $m$tuple, correspondant à chacune des m tangentes de C qui font avec OX l'angle α.

Pour d'autres détails, nous renvoyons à l'article, déjà cité, de M. Cesáro, et à un autre du même auteur, N. A. M., 1889, (3), VIII, p. 116.

M. Déprez a traité la question 296 par les coordonnées parallèles et par les coordonnées axiales; il l'a également étendue aux lignes sphériques. (J. N.)

Question 494.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 280.)

Déterminer le triangle équilatéral maximum ou minimum circonscrit à une ellipse donnée.

Solution par M. Brocard. Voici le procédé qui me paraît le plus simple pour traiter ce problème par le calcul : Placer l'ellipse donnée dans un angle ZOU de 60°, de manière qu'elle en touche les côtés et que

la tangente perpendiculaire à la bissectrice OX de cet angle soit à une distance maximum ou minimum de O.

L'équation de l'ellipse rapportée aux axes rectangulaires OX, OY étant

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0, \tag{1}$$

la courbe sera tangente aux droites OZ, OU représentées par les équations $y = \pm \frac{x}{\sqrt{3}}$, si l'on a les relations

$$DE - 2BF = 0, \tag{2}$$

$$D^2 - 4AF + 3(E^2 - 4CF) = 0. \tag{3}$$

Le diamètre conjugué avec OZ a pour équation

$$2Ay + Bx + D = 0. \tag{4}$$

Éliminant y entre (1) et (4), on obtient

$$(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF = 0; \tag{5}$$

les valeurs de x sont les abscisses des points de contact des tangentes parallèles à OZ.

Il reste à exprimer que les axes de l'ellipse (1) ont des longueurs données $2a$ et $2b$. Pour cela, on peut identifier l'équation (1) avec la suivante

$$a^2[(y-\beta)\cos\varphi - (x-\alpha)\sin\varphi]^2 + b^2[(y-\beta)\sin\varphi + (x-\alpha)\cos\varphi]^2 = a^2b^2.$$

Les valeurs ainsi obtenues pour A, B, ... étant substituées dans les équations (2), (3), (5), on trouve

$$\alpha\beta = c^2 \sin\varphi\cos\varphi, \tag{6}$$

$$\alpha^2 + 3\beta^2 = 3(a^2 + b^2) - 2(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi), \tag{7}$$

$$(x-\alpha)^2 - (b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi) = 0. \tag{8}$$

Si l'on élimine φ entre (6) et 7), il vient

$$4\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 + 3\beta^2 - a^2 - 3b^2)(3a^2 + b^2 - \alpha^2 - 3\beta^2) \tag{9}$$

L'équation (9) représente le lieu du centre de l'ellipse mobile à l'intérieur de l'angle ZOU ou, si l'ellipse est fixe, le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes faisant l'angle de 60°.

L'égalité (8) donne

$$x = \alpha \pm \sqrt{b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi}. \tag{10}$$

Pour trouver le maximum ou le minimum de x, nous pouvons observer que pour $\varphi = 0$ et $\varphi = 90°$, α prend les valeurs extrêmes $\sqrt{a^2 + 3b^2}$,

$\sqrt{3a^2+b^2}$, qui, dans l'équation (9), correspondent à $\beta = 0$, et que le maximum et le minimum de $b^2 \sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi$ ont lieu également pour $\varphi = 0$, $\varphi = 90^\circ$. On peut ainsi conclure que les quatre expressions

$$\delta_1 = \sqrt{a^2+3b^2}+a, \quad \delta_2 = \sqrt{a^2+3b^2}-a,$$
$$\delta_3 = \sqrt{3a^2+b^2}+b, \quad \delta_4 = \sqrt{3a^2+b^2}-b,$$

représentent les valeurs cherchées de x; elles correspondent à des triangles dont un sommet est sur un axe de l'ellipse et dont le côté opposé est la tangente à l'une ou l'autre extrémité de cet axe.

On pourrait résoudre les équations (6) et (7) par rapport à α et β, et porter la valeur obtenue pour α dans la formule (10); x serait ainsi exprimé en fonction d'une seule variable φ. La discussion *complète* de cette expression de x nous paraît présenter de grandes difficultés.

Solution par M. Arthur Thiré (Ouro-Preto). Soient MNP un triangle équilatéral de surface maxima ou minima, circonscrit à l'ellipse ε, et soit M'N'P' un triangle équilatéral circonscrit, infiniment voisin de MNP. Ces deux triangles peuvent être considérés comme étant égaux, et une rotation infiniment petite autour d'un certain point I fait coïncider l'un avec l'autre. Ce point I est à l'intersection des normales menées à ε aux points de contact des côtés du triangle MNP.

D'après cela, il faut circonscrire à ε un triangle équilatéral tel, que les normales menées aux points de contact des côtés concourent en un même point I. On aperçoit immédiatement les solutions suivantes: Les sommets de l'ellipse étant indiqués par A, B, A', B', soient C_1, C_2 les points de AA' ayant pour abscisses $\pm\sqrt{a^2+3b^2}$, et soient C_3, C_4 les points de BB' ayant pour ordonnées $\pm\sqrt{b^2+3a^2}$; ce sont les points des axes AA', BB' d'où l'on voit l'ellipse sous l'angle de 60°. Les tangentes menées de C_1 à ε forment avec la tangente en A' le triangle équilatéral $C_1D_1E_1$, et avec la tangente en A le triangle $C_1G_1H_1$; les tangentes menées de C_2 forment avec les tangentes menées en A et A' respectivement les triangles $C_2D_2E_2$, $C_2G_2H_2$; les tangentes menées de C_3 forment avec les tangentes menées en B' et B les triangles $C_3D_3E_3$, $C_3G_3H_3$; enfin soient $C_4D_4E_4$, $C_4G_4H_4$ les triangles ayant pour côtés les tangentes partant de C_4 et la tangente menée, soit en B, soit en B'.

Désignons par CDE un triangle équilatéral circonscrit à l'ellipse ε et tel, que le centre de celle-ci est intérieur au triangle. Si CDE se transporte d'une manière *continue* autour de la courbe en restant constamment cir-

conscrit, il passe par un maximum en $C_1D_1E_1$ et $C_3D_3E_3$, et par un minimum en $C_2D_2E_2$, $C_4D_4E_4$.

Soit CGH un triangle équilatéral circonscrit à l'ellipse ε et tel que cette courbe touche le côté GH intérieurement et les côtés CG, CH extérieurement. Si ce triangle se transporte d'une manière continue en restant circonscrit à ε, il passe par un maximum en $C_2G_2H_2$ et $C_4G_4H_4$, et par un minimum en $C_1G_1H_1$ et $C_3G_3H_3$.

Pour démontrer ces propositions, nous observons d'abord que les triangles $C_1D_1E_1$, $C_1G_1H_1$, .. sont les seuls triangles équilatéraux satisfaisant à la condition que les normales menées à ε aux points de contact de leurs côtés avec cette courbe concourent en un même point I. En effet, il doit partir de ce point I trois normales réelles à ε ou trois tangentes à la développée ε′ de ε, formant un faisceau régulier; I est donc intérieur à la développée, par exemple dans la partie limitée par OA, OB et le *premier quadrant* de cette courbe. Alors deux des tangentes menées de I à ε′ touchent le premier quadrant, une troisième le second quadrant, une 4e le quatrième quadrant; il est facile de voir que trois de ces tangentes ne peuvent jamais être les rayons d'un faisceau régulier, à moins que I ne soit situé sur AA′ ou sur BB′.

Il nous reste à démontrer que le triangle $C_1D_1E_1$ est plus grand que $C_2D_2E_2$ et que $C_1G_1H_1$ est plus petit que $C_2G_2H_2$; ou que $C_1A' > C_2B'$, $C_1A < C_2B$. La première inégalité revient à

$$\sqrt{a^2+3b^2}+a>\sqrt{3a^2}+b^2+b, \quad a-b>\sqrt{3a^2+b^2}-\sqrt{a^2+3b^2};$$

les deux membres de la dernière inégalité étant positifs, nous pouvons élever au carré, ce qui donne

$$2\sqrt{(3a^2+b^2)(a^2+3b^2)}>3a^2+3b^2+2ab,$$

et en élevant de nouveau au carré, $(a-b)^4>0$. L'inégalité $C_1A<C_2B$ se ramène à celle-ci :

$$a-b>\sqrt{a^2+3b^2}-\sqrt{3a^2+b^2},$$

dont le second membre est négatif.

Le problème analogue pour le triangle équilatéral inscrit dans un ellipse a été traité par M. Hemming dans les *Nouvelles Annales*, 1884, (2) III, p. 131.

Question 581.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 207.)

Une ellipse tourne dans son plan autour de son foyer F. ***Elle coupe en*** D ***une droite fixe*** Fx. ***Sur la normale en*** D, ***on porte une longueur*** DN ***égale au demi-diamètre*** CE ***conjugué avec*** CD. ***Le lieu de*** N ***est une circonférence.***

Solution par MM. STUYVAERT ***et*** DÉPREZ. Soient (X, Y), (X′, Y′), (X″, Y″), les coordonnées des points D, N, E par rapport aux axes principaux CX, CY de l'ellipse. Les droites DN, CE étant égales et rectangulaires, leurs projections sur CX, CY sont réciproquement égales; d'où

$$X' - X = \pm Y'', \quad Y' - Y = \pm X''.$$

Or, d'après des formules de Chasles,

$$X'' = \frac{b}{a}X, \quad X'' = -\frac{a}{b}Y;$$

par conséquent

$$X' = \frac{a \pm b}{a}X, \quad Y' = \frac{b \pm a}{b}Y. \tag{1}$$

Prenons seulement le signe supérieur, qui convient au cas où le segment DN est extérieur à l'ellipse.

Les droites Fx et une perpendiculaire Fy ayant pour équations

$$y = \frac{Y}{X - c}(x - c), \quad y = -\frac{X - c}{Y}(x - c),$$

les distances β, α de N à ces droites ont pour expressions

$$\beta = \frac{Y'(X - c) - Y(X' - c)}{\sqrt{Y^2 + (X - c)^2}}, \quad \alpha = \frac{Y'Y + (X' - c)(X - c)}{\sqrt{Y^2 + (X - c)^2}}.$$

Observant que le dénominateur est égal à FD, et introduisant les valeurs (1), on trouve

$$\beta = \frac{cY}{b}, \quad \alpha - (a + b) = -\frac{cX}{a}; \tag{2}$$

si l'on fait la somme des carrés des égalités (2), on obtient, pour le lieu de N :

$$[\alpha - (a + b)]^2 + \beta^2 = c^2,$$

car α, β sont les coordonnées de N par rapport aux axes Fx, Fy.

Question 638.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 280.)

On divise un arc de cercle AB ***de rayon égal à l'unité, en m parties égales*** AC, CD, ... ***Sur la corde*** AB, ***on construit un triangle*** ACG ***semblable à un triangle donné. Trouver la limite de*** $\overline{OG}^m$ ***lorsque m croît indéfiniment.***

Solution par MM. Servais, Klompers, Keelhoff, Mac-Mahon (Ithaca, U. S. A.) ***et*** Molenbroek. Soient ω, α, β, γ les angles AOB, CAG, ACG, AGC. Prenons sur OA la longueur OK = OG. En supposant le triangle ACG tourné vers l'intérieur du cercle, nous aurons

$$OG = 1 - AK = 1 - AG\frac{\sin AGK}{\sin AKG} = 1 - AC\frac{\sin\beta \sin AGK}{\sin\gamma \sin AKG}.$$

Représentons par r le dernier terme; nous pourrons écrire

$$\lim \overline{OG}^m = \lim (1-r)^m = \lim [(1-r)^{\frac{1}{r}}]^{mr} = e^{-\lim mr},$$

$$\lim mr = \lim 2m \sin\frac{\omega}{m} \cdot \lim \frac{\sin\beta \sin AGK}{\sin\gamma \sin AKG},$$

$$\lim 2m \sin\frac{\omega}{2m} = \omega, \quad \lim AKG = 90^\circ, \quad \lim AGK = \alpha,$$

les directions GK et AC ayant pour limite une perpendiculaire à OA. Par conséquent,

$$\lim mr = \frac{\omega \sin\alpha \sin\beta}{\sin\gamma}, \quad \lim \overline{OG}^m = e^{\frac{-\omega \sin\alpha \sin\beta}{\sin\gamma}}.$$

Lorsque le triangle ACG est tourné vers l'extérieur du cercle, la limite cherchée est l'inverse de la précédente.

×Question 672.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 24.)

Étudier la variation de la fraction $\dfrac{x^2 - 2ax + 3b}{x^2 + ax - 2b}$, ***a et b ayant des valeurs réelles quelconques.***

Solution par MM. Sohie, Denys ***et*** Decamps. Égalant la fraction à m et résolvant l'équation par rapport à x, on obtient

$$x = \frac{a(m+2) \pm \sqrt{(a^2+8b)m^2 + 4(a^2+b)m + 4(a^2-3b)}}{2(1-m)}.$$

Les valeurs de m qui annulent le radical sont

$$m_1 = -\frac{2}{a^2+8b}(a^2+b+\sqrt{b(25b-3a^2)}),$$

$$m_2 = -\frac{2}{a^2+8b}(a^2+b-\sqrt{b(25b-3a^2)}).$$

Les hypothèses fondamentales à examiner se rapportent aux signes des quantités

$$\delta = a^2+8b, \quad \delta' = b(25b-3a^2).$$

1° $b < -\frac{a^2}{8}$. Alors $\delta < 0$, $\delta' > 0$, et m peut varier entre m_2 (*minimum*) et m_1 (*maximum*).

2° $b = -\frac{a^2}{8}$. m peut varier de $-\frac{11}{7}$ (*minimum*) à $+\infty$.

3° $b = 0$. La fraction proposée se réduit à $\frac{x-2a}{x+a}$ et peut passer par toutes les valeurs, pourvu que a ne soit pas nul.

4° $b > 0$ et $< \frac{3a^2}{25}$. Comme $\delta > 0$ et $\delta' < 0$, m peut passer par toutes les valeurs.

5° $b = \frac{3a^2}{25}$. La fraction proposée, après l'introduction de cette valeur de b, prend la forme

$$\frac{\left(x-\frac{a}{5}\right)\left(x-\frac{9a}{5}\right)}{\left(x-\frac{a}{5}\right)\left(x+\frac{6a}{5}\right)} = \frac{x-\frac{9a}{5}}{x+\frac{6a}{5}}.$$

Elle prend donc toutes les valeurs, pourvu que a soit différent de zéro.

6° $b > \frac{3a^2}{5}$. On a $\delta > 0$, $\delta' > 0$; m peut varier de $-\infty$ à m_2 (*maximum*) et de m_1 (*minimum*) à $+\infty$.

Voir *Mathesis*, II, 5; III, 19; VI, 153; N. A. M., 1869, 81; 1881, 144.

×Question 682.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 95.)

Résoudre complètement l'équation

$$(x^3-3qx+p^3-3pq)^3-4(px+q)^3=0. \quad \text{(E. Catalan).}$$

Solution par M. J. G. Darboux (Lycée Louis-le-Grand, Paris). L'équa-

tion étant symétrique en x et p, on est conduit à prendre $x+p$ comme inconnue auxiliaire. Remarquons en outre que

$$x^3+p^3=(x+p)^3-3px(x+p),$$

et nous pourrons écrire l'équation sous la forme

$$[(x+p)^3-3(px+q)(x+p)]^2=4(px+q)^3.$$

Posons $px+q=z^2$, extrayons la racine carrée des deux membres, et divisons par z^3; il vient

$$\left(\frac{x+p}{z}\right)^3-3\left(\frac{x+p}{z}\right)=2.$$

Cette équation en $\frac{x+p}{z}$ admet la racine simple 2 et la racine double -1. Donc les équations

$$x+p=2\sqrt{px+q}, \qquad x+p=-\sqrt{px+q}$$

donnent, la première les racines simples, la seconde les racines doubles de la proposée. On a donc

$$x_1=p+2\sqrt{q}, \qquad x_2=p-2\sqrt{q},$$

$$x_3=x_4=-\frac{p}{2}+\sqrt{q-\tfrac{3}{4}p^2}, \qquad x_5=x_6=-\frac{p}{2}-\sqrt{q-\tfrac{3}{4}p^2}.$$

La seule condition pour que les six racines soient réelles, est $q>\frac{3}{4}p^2$.

Ont résolu la même question MM. Anderson, Brocard, Denys, François, Joachimescu (Bucharest) et un abonné.

×Question 682.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 95.)

Si m, n, p, r sont des nombres entiers quelconques, le nombre

$$N=(13p-4^n r)\,10^{6m+n}+r$$

est divisible par 13. (Christie.)

Il serait plus simple de dire que le nombre

$$N'=4^n.10^{6m+n}-1$$

est divisible par 13. Or,

$$N'=40^n.10^{6m}-1, \quad 40=\mathcal{M}.\,13+1, \quad 10^6=\mathcal{M}.\,13+1.$$

La proposition est donc évidente. (Un abonné.)

Ont résolu la même question : MM. Anderson, Bellens, Denys, Decamps, François, Russo. Solution un peu différente de M. Cristesco.

QUESTIONS D'EXAMEN.

451. On mène des normales aux extrémités d'une corde d'une ellipse. Trouver le lieu des points de rencontre de ces normales quand la corde se déplace parallèlement à elle même.

452. Lieu d'un point d'où l'on voit les côtés opposés d'un rectangle sous des angles égaux ou supplémentaires.

Equation :

$$\frac{\frac{y+b}{x-a}-\frac{y-b}{x-a}}{1+\frac{y^2-b^2}{(x-a)^2}}=\pm\frac{\frac{y+b}{x+a}-\frac{y-b}{x+a}}{1+\frac{y^2-b^2}{(x+a)^2}}.$$

Le lieu complet se compose d'une droite, d'une circonférence et d'une hyperbole équilatère.

453. On donne deux droites OR, OS et un point A sur OR. Un cercle quelconque ω, qui touche OR en A, rencontre OS en B et C; les tangentes en B et C à ce cercle se coupent en D. Trouver 1° les lieux des centres des cercles inscrits et exinscrits au triangle ABC; 2° le lieu du centre du cercle inscrit au triangle DBC et celui du centre du cercle exinscrit situé dans l'angle BDC. (Concours de Philosophie, 1888.)

1° L'angle AOB = ABC − ACB = 2ω AI, I étant le centre du cercle inscrit; donc, puisque ωA est fixe (perpendiculaire à OR), les bissectrices AI, AK de l'angle BAC sont fixes; 2° ces bissectrices rencontrent la circonférence ABC aux centres des deux cercles considérés.

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**574** (Tome VII, p. 148). Lorsque n est impair

$$C_{2n,n}+10\,C_{2n-2,n-1}=\mathcal{M}(n+2).$$ (Catalan.)

687. Les rayons vecteurs MF, MF′ d'un point d'une ellipse rencontrent la courbe une seconde fois en P, P′. Trouver 1° Le lieu du pôle de la corde PP′; 2° Le lieu du point de rencontre de la corde PP′ avec la tangente menée en M; 3° Le lieu du point de rencontre des perpendiculaires élevées en F sur FM, et en F′ sur F′M. (H. Brocard.)

×**688.** On donne le système

$$a\sin(x-\alpha)\sin(y-z)+b\sin(y-\beta)\sin(z-x)+c\sin(z-\gamma)\sin(x-y)=0,$$
$$a\cos(x-\alpha)\sin(y-z)+b\cos(y-\beta)\sin(z-x)+c\cos(z-\gamma)\sin(x-y)=0.$$

En déduire les valeurs de $y-z$, $z-x$, $x-y$. (J. Neuberg.)

SUR L'INTERVERSION DES DÉRIVATIONS PARTIELLES;

par M. G. PEANO, à Turin.

Soient $f(x, y)$ une fonction de deux variables, f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}, ses dérivées partielles. Il s'agit de prouver que, moyennant certaines conditions, on a $f''_{xy} = f''_{yx}$. M. MANSION (*Résumé du Cours d'Analyse infinitésimale*, page 63) le prouve pour les fonctions élémentaires. Dans la démonstration ordinaire (SCHWARZ, *Archives des sciences physiques et naturelles de Genève*, 1873, t. 48, p. 38; SERRET, *Calcul différentiel*, 1879, page 76; LIPSCHITZ, *Lehrbuch der Analysis*, 1880, II, p. 270; JORDAN, *Cours d'Analyse*, I, 1882, p. 31; etc.), on suppose :

a) L'existence des dérivées f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}.

b) La continuité de f''_{xy} et de f''_{yx} pour les valeurs considérées des variables.

M. SCHWARZ a aussi prouvé que l'existence et la continuité de f''_{yx} sont des conséquences de l'existence et de la continuité de f'_x, f'_y, f''_{xy}.

Je me propose dans cette note de réduire au minimum les conditions nécessaires à la démonstration du théorème.

THÉORÈME. *Si $f''_{xy}(x, y)$ existe aux environs de $x = x_0$, $y = y_0$, et est continue pour $x = x_0$ et $y = y_0$ et si $f'_y(x, y_0)$ existe aux environs de $x = x_0$, alors $f''_{yx}(x_0, y_0)$ existe aussi, et l'on a $f''_{yx}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0)$.*

Démonstration. Soit ε une quantité positive aussi petite qu'on le veut. Posons

$$f''_{xy}(x_0 + h, y_0 + k) = f''_{xy}(x_0, y_0) + \alpha \qquad (1)$$

Puisque $f''_{xy}(x, y)$ est continue pour $x = x_0$ et $y = y_0$, on peut déterminer une quantité positive ρ telle que, si $\operatorname{mod} h \leqq \rho$, $\operatorname{mod} k \leqq \rho$, on ait $\operatorname{mod} \alpha \leqq \varepsilon$. Intégrons (1) par rapport à k, de 0 à k; on aura

$$f'_x(x_0 + h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + h, y_0) = k f''_{xy}(x_0, y_0) + k\alpha' \qquad (2)$$

où α', l'une des valeurs de α, ne sera pas, en valeur absolue, supérieure à ε; autrement dit, $\operatorname{mod} \alpha' \leqq \varepsilon$.

Intégrons (2) par rapport à h, de 0 à h; nous trouverons la formule bien connue :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0) \\ = hk f''_{xy}(x_0, y_0) + hk\alpha'', \end{aligned} \qquad (3)$$

et puisque α'' est une des valeurs de α', on aura mod $\alpha'' \leqq \varepsilon$. On déduit de là

$$\frac{f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0+h, y_0)}{k} - \frac{f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)}{k} = hf''_{xy}(x_0, y_0) + h\alpha'' \qquad (4)$$

Passons à la limite, pour $k=0$. Puisque $f'_y(x, y_0)$ existe, on a

$$\lim_{k=0} \frac{f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0+h, y_0)}{k} = f'_y(x_0+h, y_0),$$

$$\lim_{k=0} \frac{f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)}{k} = f'_y(x_0, y_0).$$

Donc α'' aura aussi une limite α''', en valeur absolue, égale ou inférieure à ε. On a ainsi

$$f'_y(x_0+h, y_0) - f'_y(x_0, y_0) = hf''_{xy}(x_0, y_0) + h\alpha''' \qquad (5)$$

ou

$$\frac{f'_y(x_0+h, y_0)-f'_y(x_0, y_0)}{h} = f''_{xy}(x_0, y_0) + \alpha''', \qquad (6)$$

et pour toutes les valeurs de h égales ou inférieures à ρ, en valeur absolue, α''' est, en valeur absolue, égale ou inférieure à ε. Donc, par la définition des limites, on a

$$\lim_{h=0} \frac{f'_y(x_0+h, y_0) - f'_y(x_0, y_0)}{h} = f''_{xy}(x_0, y_0).$$

Ainsi il est prouvé que $f''_{yx}(x_0, y_0)$ existe et que sa valeur est

$$f''_{xy}(x_0, y_0).$$

Dans ce théorème, en supposant l'existence de f''_{xy}, on suppose implicitement celle de f'_x. Si l'on applique la proposition démontrée aux couples (x, y) de la variété V définie par les conditions $x_0 - h < x < x_0 + h$, $y_0 - k < y_0 < k$, on a le théorème :

Si, dans V, f'_x, f'_x, f''_{xy} ***existent et si la dernière est continue, on a, dans la même variété,*** $f''_{yx} = f''_{xy}$.

Il y a effectivement des fonctions qui satisfont aux hypothèses énoncées, et pour lesquelles f'_x et f'_y sont discontinues (*).

(*) Au point de vue de l'enseignement, au lieu de l'égalité (1), on pourrait peut-être prendre avec avantage une double inégalité de la forme

$$m < f''_{xy}(x_0+h, y_0+k) < M,$$

m et M désignant deux quantités quelconques entre lesquelles $f''_{xy}(x_0+h, y_0+k)$ est compris. (P. M.)

×NOTES MATHÉMATIQUES.

×**10.** ***Note sur la question*** 682(*) (Extrait d'une lettre de M. E. CATALAN).

La solution, très ingénieuse, due à M. J. G. Darboux, ne peut faire connaître comment l'auteur de la question a rencontré l'équation

$$(x^3 - 3qx + p^3 - 3pq)^2 - 4(px + q)^3 = 0(**). \qquad (1)$$

Le voici. Il n'est pas difficile de vérifier que l'on a, ***identiquement***,

$$4(ab + bc + ca)^3 - (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2 =$$
$$(a^2 + b^2 + c^2 + bc + ca + ab)^2 (-a^2 - b^2 - c^2 + 2bc + 2ca + 2ab). \quad (2)$$

Changeant a en x, et posant

$$b + c = p, \quad bc = q, \qquad (3)$$

on transforme l'identité (2) en

$$(x^3 - 3qx + p^3 - 3pq)^2 - 4(px + q)^3 =$$
$$(x^2 + px + p^2 - q)^2 (x^2 - 2px + p^2 - 4q). \qquad (4)$$

Ainsi, la proposée (1) peut être remplacée par

$$(x^2 + px + p^2 - q)^2 (x^2 - 2px + p^2 - 4q) = 0, \text{ etc.} \qquad (5)$$

×**11.** ***Sur le quadrilatère inscriptible.*** Dans un quadrilatère inscriptible $abcd$, on a évidemment

$$abc + acd = abd + bcd$$

ou, en remplaçant chaque aire par sa valeur en fonction du produit des trois côtés et du rayon du cercle circonscrit,

$$ab.bc.ca + ac.cd.ad = ab.bd.ad + bc.cd.bd. \qquad (1)$$

Cette relation est celle qui donne l'expression du rapport des diagonales du quadrilatère en fonction de ses côtés.

Transformons par rayons vecteurs réciproques les sommets du quadrilatère et la circonférence circonscrite en prenant pour pôle de transformation un point arbitraire O de l'espace. Pour avoir la transformée de la relation (1) il suffit de remplacer chaque ligne ab qui y entre, par $AB : (OA.OB)$; A, B, C, D étant les points correspondants à a, b, c, d, on trouve ainsi, après quelques réductions,

$$AB.BC.CA.(OD)^2 + AC.CD.AD.(OB)^2$$
$$= AB.BD.AD.(OC)^2 + BC.CD.BD.(OA)^2 \qquad (2)$$

(*) Voir *Mathesis*, juin 1890, p. 150.

(**) *Sur quelques formules relatives aux triangles rectilignes*, p. 14 (Mém. in-8° de l'Ac. de Belg., XLIV).

pour relation entre les distances mutuelles de cinq points dont quatre A, B, C, D sont sur une circonférence. On peut encore écrire cette relation

$$ABC(OD)^2 + ACD(OB)^2 = ABD(OC)^2 + BCD(OA)^2.$$

On peut tirer de (2) plusieurs relations spéciales, en supposant A, B, C, D en ligne droite, O sur la circonférence ou sur la droite, ou encore D à l'infini (D'après MANNHEIM, *Messenger of Mathematics* (2) XIX, pp. 178-180, avril 1890).

12. ***Expression de e en produit infini.*** On a

$$Q_n = P_n - \frac{n}{1}P_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}P_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}P_{n-3} + \cdots + (-1)^n,$$

P_n désignant le nombre $1.2.3\ldots n$ de permutations de n lettres, Q_n le nombre de ces permutations où aucune lettre n'est à sa place naturelle (*Mathesis*, t. I, p. 27) (*). On peut écrire cette égalité sous la forme

$$R_n = \frac{Q_n}{P_n} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \cdots + \frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots n}.$$

Mais

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

Donc

$$\lim R_n = \frac{1}{e}.$$

On peut mettre R_n sous forme de produit. On trouve par un calcul direct

$$R_2 = \frac{1}{2}, \quad R_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}, \quad R_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8}, \quad R_5 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{44}{45},$$

$$R_6 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{44}{45}\cdot\frac{265}{264},$$

et ainsi de suite. Les facteurs du numérateur, à partir du second, sont alternativement plus petits ou plus grands d'une unité que ceux du dénominateur; un facteur de rang n, du dénominateur est égal à $(n+1)$ fois le facteur de rang $(n-1)$, du numérateur. Cette loi est générale. En effet, soient pour $n-1$ pair, par exemple,

$$R_n = R_{n-1}\frac{a-1}{a} = R_{n-1} - \frac{R_{n-1}}{a}, \quad R_{n+1} = R_n\frac{b+1}{b} = R_n + \frac{R_n}{b}.$$

(*) M. SEELHOF appelle ces permutations, permutations *absolues*; M. NEUBERG, permutations *discordantes* ou *sans rencontre*.

D'après la définition de R_n, on a

$$R_n - R_{n-1} = -\frac{1}{1.2...n}, \quad R_{n+1} - R_n = \frac{1}{1.2...(n+1)};$$

par suite,

$$\frac{R_{n-1}}{a} = \frac{1}{1.2...n}, \quad \frac{R_n}{b} = \frac{1}{1.2...(n+1)}; \quad \text{d'où} \quad \frac{R_n}{R_{n-1}} = \frac{b}{a(n+1)}.$$

Mais

$$\frac{R_n}{R_{n-1}} = \frac{a-1}{a}.$$

Donc enfin,

$$\frac{a-1}{a} = \frac{b}{a(n+1)}, \quad \text{ou} \quad b = (n+1)(a-1).$$

Si

$$\frac{R_{n+2}}{R_{n+1}} = \frac{c-1}{c},$$

on trouve de même

$$c = (n+2)(b+1).$$

Par suite

$$c - 1 = (n+1)(b+1) + b = (n+1)(a+b),$$

ce qui donne une loi de formation directe pour les termes du numérateur.

On a donc

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{44}{45} \cdot \frac{265}{264} \cdots$$

Cette dernière formule est due à M. Hermès (*Archives de Grunert, continuées par Hoppe*, 2e série, t. I, p. 103-105). La formule $e^{-1} = \lim R_n$ est de Laplace (*Théorie analytique des probabilités*, troisième édition, p. 217-224) comme l'a signalé M. Lampe (*Archives*, etc., t. 70, p. 439-443). M. Sanio a retrouvé le théorème de Laplace (id. p. 224) et en a donné ensuite une démonstration ainsi que M. Seelhof (Ib., 2e série, t. I, p. 105-107; 97-102).

×13. *Sur l'inégalité* $x - \sin x < \frac{1}{4}x^3$ (par J. Smeets, directeur de l'institut Bodson à Liège; voir *Mathesis*, t. X, pp. 58-60, 112-113). On a

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2};$$

$$\cos \frac{x}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{4} > 1 - \frac{x^2}{8}, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{x}{2};$$

donc

$$\sin x > \left(1 - \frac{x^2}{8}\right) x, \quad \sin x > x - \frac{x^3}{4} + \frac{x^5}{64}, \quad x - \sin x < \frac{x^3}{4} - \frac{x^5}{64}. \quad (1)$$

Remarque. L'inégalité

$$\frac{x^3}{4} - \frac{x^5}{64} < \frac{x^3}{6}$$

équivaut à $x > 2, 3$; par suite, comme on cherche une limite supérieure de la différence $x - \sin x$ dans l'hypothèse de $x < \frac{1}{6}\pi$, la limite $\frac{1}{6}x^3$ est plus avantageuse que celle qui résulte de l'inégalité (1). (J. N.)

CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

(2 juin 1890; de 10 h. ½ à 4 h. ½).

On donne une quadrique S, *une conique* C, *et un point* O *sur la surface* S. *On joint le point* O *aux trois sommets d'un triangle, conjugué par rapport à* C : *les trois droites obtenues coupent la quadrique en trois points* M, N, P.

1° *Démontrer que le plan* MNP *passe par un point fixe*, A, *lorsque le triangle, conjugué par rapport à* C, *est variable.*

2° *Trouver le lieu décrit par ce point, lorsque la conique varie en passant constamment par quatre points fixes.*

3° *Trouver le lieu qu'il décrit, lorsque la conique est inscrite à un quadrilatère fixe.*

1. Prenons pour axes coordonnés trois diamètres conjugués du cône ayant pour sommet O et pour base la conique C. Soient

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 \quad (1)$$

l'équation de ce cône, et

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = Cx + C'y + C''z \quad (2)$$

l'équation de la quadrique S. Soit aussi

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 1 \quad (3)$$

l'équation du plan MNP. Le cône ayant pour sommet O et pour base la courbe définie par les équations (2) et (3), sera lui-même représenté par l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = (Cx + C'y + C''z)(\alpha x + \beta y + \gamma z).$$

Soit T ce cône. Dans son équation, remplaçons x, y, z, par $\frac{x'}{\sqrt{a}}, \frac{y'}{\sqrt{b}}, \frac{z'}{\sqrt{c}}$, et supposons que la relation entre x', y', z', obtenue par cette substitution, représente une surface rapportée à trois axes rectangulaires. Supposons aussi que les points M, N, P, aient pour coordonnées, respectivement x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3.

Les trois droites OM, ON, OP sont trois diamètres conjugués du cône. On en déduit les trois relations suivantes :

$$ax_1x_2 + by_1y_2 + cz_1z_2 = 0, \quad ax_1x_3 + by_1y_3 + cz_1z_3 = 0,$$
$$ax_2x_3 + by_2y_3 + cz_2z_3 = 0,$$

et, par la transformation précédemment indiquée

$$x'_1x'_2 + y'_1y'_2 + z'_1z'_2 = 0, \quad x'_1x'_3 + y'_1y'_3 + z'_1z'_3 = 0,$$
$$x'_2x'_3 + y'_2y'_3 + z'_2z'_3 = 0,$$

Ceci prouve qu'aux trois droites OM, ON, OP, situées sur le cône T correspondent, sur le cône transformé, trois droites rectangulaires. Donc le *premier invariant* de l'équation de ce cône doit être nul. De là la relation :

$$\frac{A}{a} + \frac{A'}{b} + \frac{A''}{c} = \frac{C\alpha}{a} + \frac{C'\beta}{b} + \frac{C''\gamma}{c}.$$

On en conclut que le plan (3) passe par le point qui a pour coordonnées

$$x = \frac{Cbc}{Abc + A'ca + A''ab},$$
$$y = \frac{C'ca}{Abc + A'ac + A''ab}, \qquad (4)$$
$$z = \frac{C''ab}{Abc + A'ca + A''ab}.$$

Remarque. Ces expressions montrent que, si la conique C varie de telle sorte qu'un triangle fixe lui soit conjugué, le point A se meut dans un plan fixe. En effet, on pourra prendre pour axes coordonnés les trois droites qui joignent le point O aux trois sommets; ces trois droites seront des diamètres conjugués du cône (1), et les coordonnées du point A se présenteront encore sous la forme (4). Mais l'élimination de a, b, c, entre ces trois équations homogènes, conduit au résultat suivant :

$$\frac{A}{C}x + \frac{A'}{C'}y + \frac{A''}{C''}z = 1. \qquad (5)$$

Cette remarque est confirmée par les deux dernières parties de la question.

2. En effet, si la conique se meut en passant par quatre points fixes, les diagonales du quadrilatère complet déterminé par ces quatre points forment un triangle qui est sans cesse conjugué par rapport à la conique variable. Supposons donc que les axes coordonnés passent par ces trois points; l'équation du cône ayant pour sommet le point O et pour base la conique C sera de la forme (1), mais les coefficients a, b, c, seront de la forme suivante :

$$a = a_1 + a_2\lambda, \quad b = b_1 + b_2\lambda, \quad c = c_1 + c_2\lambda,$$

a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 désignant des constantes, λ un paramètre variable. Les coordonnées du point A seront des fonctions rationnelles de λ, fonctions qui ont pour dénominateur un même polynôme du second degré :

$$A(b_1+b_2\lambda)(c_1+c_2\lambda)+A'(c_1+c_2\lambda)(a_1+a_2\lambda)+A''(a_1+a_2\lambda)(b_1+b_2\lambda),$$

et dont les numérateurs sont également du second degré. Le lieu du point A est donc une conique.

Nous connaissons déjà l'une de ses équations, savoir l'équation (5); l'autre va nous montrer que cette conique passe par les trois sommets du triangle de son plan qui, par rapport au point O, est en perspective avec le triangle conjugué fixe. En effet, des équations (4) résultent les deux proportions suivantes :

$$\frac{a_1+a_2\lambda}{\left(\frac{C}{x}\right)} = \frac{b_1+b_2\lambda}{\left(\frac{C'}{y}\right)} = \frac{c_1+c_2\lambda}{\left(\frac{C''}{z}\right)}$$

et, par l'élimination de λ :

$$\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{\frac{Cb_2}{x} - \frac{C'a_2}{y}} = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{\frac{C'c_2}{y} - \frac{C''b_2}{z}}$$

ou bien :

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\,x\,(C'c_2z - C''yb_2) = (b_1c_2 - b_2c_1)\,z\,(Cb_2y - C'a_2x).$$

Cette équation représente un cône ayant pour sommet le point O, et passant par les trois axes de coordonnées, ce qui démontre l'énoncé.

3. Toutes les coniques inscrites dans un quadrilatère fixe ont encore un triangle conjugué qui leur est commun. Il suffit, pour s'en assurer, de transformer, par polaires réciproques, le réseau des coniques qui ont

un triangle conjugué commun. Le triangle qu'on trouve est encore formé par les trois diagonales du quadrilatère complet circonscrit (conséquence indirecte du théorème de Brianchon). On peut donc encore choisir les axes de coordonnées de manière que l'équation du cône (1) ne change pas de forme, et que les expressions des coordonnées du point A se présentent sous la forme (4). Mais ici les coefficients de l'équation tangentielle du cône (1) seront des fonctions linéaires d'un paramètre λ. Or l'équation d'un plan tangent au cône étant

$$ux + vy + wz = 0,$$

l'équation tangentielle est

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = 0.$$

Donc

$$\frac{1}{a} = a_1 + a_2\lambda, \quad \frac{1}{b} = b_1 + b_2\lambda, \quad \frac{1}{c} = c_1 + c_2\lambda.$$

Si donc on met les équations (4) sous la forme

$$x = \frac{\dfrac{C}{a}}{\dfrac{A}{a} + \dfrac{A'}{b} + \dfrac{A''}{c}}, \quad y = \frac{\dfrac{C'}{b}}{\dfrac{A}{a} + \dfrac{A'}{b} + \dfrac{A''}{c}}, \quad z = \frac{\dfrac{C''}{c}}{\dfrac{A}{a} + \dfrac{A'}{b} + \dfrac{A''}{c}},$$

on en conclut que les expressions des coordonnées du point A sont des fonctions rationnelles de λ, fonctions dont le dénominateur est un même polynôme du premier degré, et dont les numérateurs sont aussi du premier degré. Le lieu est donc une droite.

Remarques. L'équation (5) montre que la position du plan, dans lequel se meut le point A, ne dépend nullement de la position du plan de la conique C, mais uniquement des directions des trois droites que nous avons prises pour axes de coordonnées. Donc, tous les triangles qui sont en perspective par rapport au point O, donnent, pour le lieu géométrique du point A, le même plan. Dans les deux dernières parties du problème, tous les quadrilatères qui sont en perspective par rapport au point O, donnent la même conique et la même droite.

De plus, les trois axes de coordonnées étant fixes, il y a une infinité de surfaces S qui donnent lieu au même plan (5). Elles sont tangentes entre elles, au point O, et passent par trois points fixes, situés sur les trois droites fixes Ox, Oy, Oz.

V. Jamet,
Professeur au lycée de Marseille.

Les deux premières parties de cette question ont été traitées, sous une forme un peu différente, par O. HESSE (*Journal de Crelle*, t. 18). Lorsque la conique C varie en formant un *réseau*, le point A engendre une *surface de Steiner* (ou *surface romaine*). Au sujet de cette surface, le lecteur peut consulter les *Œuvres de Steiner*, t. II, pp. 723 et 741, et les articles de MM. KUMMER, WEIERSTRASS, SCHRÖTER, CLEBSCH et CREMONA, dans le *Journal de Crelle*, t. 64 et 67. (J. N.)

SUR L'ENNÉAGONE RÉGULIER;

par M. A. DENYS, à Avennes

Considérons l'ennéagone régulier convexe ABCDEFGHI et les deux ennéagones réguliers étoilés dont les côtés sont AC et AE. Les côtés de ces polygones seront désignés par c, c', c''; leurs apothèmes OK, OL, OM par a, a', a''; le rayon OA par R.

1. *Le côté de l'ennéagone convexe est égal à la différence des côtés des deux ennéagones étoilés.*

En effet, le quadrilatère inscrit ACDG donne

$$AD.CG = AC.DG + AG.CD,$$

d'où, à cause de

$$AD = DG = AG,$$

$$c = c'' - c'. \qquad (1)$$

2. *Le cube du côté du triangle équilatéral est égal au triple produit des côtés des trois ennéagones réguliers inscrits à la même circonférence.*

Représentons par d le côté du triangle équilatéral. L'égalité (1) donne

$$c^2 + 2cc' + c'^2 = c''^2. \qquad (2)$$

Des quadrilatères inscrits ACEH, ABCD, on déduit

$$c''^2 = c'd + c'^2, \quad c'^2 = cd + c^2; \qquad (3)$$

d'où, en additionnant,

$$2cc' + c'^2 = c'd + cd;$$

puis, en divisant par $cc'd$:

$$\frac{2}{d}+\frac{c'}{cd}=\frac{1}{c}+\frac{1}{c'}. \qquad (4)$$

On a aussi, dans le quadrilatère inscrit ADEF,

$$c''c' = cd + c''c, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{c}=\frac{c''+d}{c''c'},$$

ou encore

$$\frac{c'}{cd}=\frac{c'(c''+d)}{c''c'd}=\frac{1}{d}+\frac{1}{c''}. \qquad (5)$$

De (4) et (5), on conclut

$$\frac{3}{d}=\frac{1}{c}+\frac{1}{c'}-\frac{1}{c''}, \qquad (6)$$

de sorte que le côté du triangle équilatéral est une moyenne harmonique entre les côtés des trois ennéagones, pourvu que l'on considère le plus grand de ces côtés comme négatif.

Écrivons l'égalité (6) ainsi :

$$\frac{3}{d}=\frac{c+c'}{cc'}-\frac{1}{c''}=\frac{c''}{cc'}-\frac{1}{c''}=\frac{c''^2-cc'}{cc'c''},$$

et observons que le quadrilatère ABEG donne

$$c''^2 = cc' + d^2; \qquad (7)$$

nous trouvons alors

$$d^2 = 3cc'c''.$$

3. *L'apothème de l'ennéagone régulier convexe est égal à la somme des apothèmes des ennéagones réguliers étoilés.*

Soit A′ le point diamétralement opposé à A ; on a

$$a=\tfrac{1}{2}\,A'B, \quad a'=\tfrac{1}{2}\,A'C=\tfrac{1}{2}\,A'H, \quad a''=\tfrac{1}{2}\,A'E.$$

Le triangle BHE étant équilatéral, on a

$$A'B = A'H + A'E, \quad \text{d'où} \quad a = a' + a''. \qquad (8)$$

4. *Le cube de l'apothème du triangle équilatéral est égal au produit des apothèmes des trois ennéagones réguliers inscrits dans la même circonfé-*

rence(*). D'après un théorème connu (Voir CATALAN, *Théorèmes et Problèmes de Géométrie*, 6e édition, p. 265),

$$A'B.A'C.A'D.A'E = R^4;$$

d'où, à cause de $A'D = R$,

$$aa'a'' = \tfrac{1}{8} R^3.$$

5. *La somme des carrés des côtés des trois ennéagones est égale au sextuple du carré du rayon.* En effet, la relation (1) donne

$$c''^2 = c^2 + c'^2 + 2cc'; \tag{9}$$

et, si l'on élimine cc' entre (7) et (9), on trouve

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 2d^2 = 6R^2. \tag{10}$$

6. *La somme des carrés des apothèmes est égale à trois fois la moitié du carré du rayon.* Dans la formule (10), remplaçons c^2, c'^2, c''^2 par leurs valeurs $4(R^2 - a^2)$, $4(R^2 - a'^2)$, $4(R^2 - a''^2)$, etc.

7. L'aire du triangle ABA′ a pour mesure $\frac{1}{2} AB.A'B = \frac{1}{4} AA'.IB$; donc

$$ac = Rc', \quad a'c' = Rc'', \quad a''c'' = Rc;$$

d'où, à cause de $c'' = c + c'$,

$$a'c' = ac + a''c'', \quad \frac{c}{a''} = \frac{c'}{a} + \frac{c''}{a'}. \tag{11}$$

De (1) et (7), on conclut

$$ac = (c'' - c')(a'' + a') = a''c'' - a''c' + a'c'' - a'c',$$

et en combinant avec la formule (11), on trouve

$$2ac = a'c'' - a''c'. \tag{12}$$

On tire facilement, de (11) et (12),

$$3ac = (c'' + c')(a' - a'').$$

(*) Les propriétés des apothèmes des trois ennéagones ont déjà été signalées par M. F. RITTER (Congrès de Monpellier, 1879); voir aussi la *Notice historique* de M. Laisant, présentée au congrès de Toulouse, 1887).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 517.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 96.)

Une droite AB, ***de longueur donnée*** l, ***se meut entre deux axes rectangulaires*** OX, OY. ***On construit le rectangle*** AOBC, ***et l'on projette*** C ***en*** D ***sur*** AB. ***Trouver le lieu du point de rencontre*** M ***de*** AB ***avec la symétrique de la droite*** OD ***par rapport à la bissectrice de l'angle*** XOY ***et en déterminer la tangente, le rayon de courbure, etc.*** (Fr. Falisse.)

Solution par M. Brocard. Posons ***angle*** BAO $= \theta$. Les coordonnées de D seront

$$x_1 = \mathrm{BD}\cos\theta = \mathrm{BC}\cos^2\theta = l\cos^3\theta, \quad y_1 = \mathrm{DA}\sin\theta = \mathrm{CA}\sin^2\theta = l\sin^3\theta;$$

les droites OM et AB ont donc pour équations

$$x = y\,\mathrm{tg}^3\,\theta, \quad \frac{y}{\sin\theta} + \frac{x}{\cos\theta} = l. \tag{1}$$

En éliminant θ, on trouve pour l'équation du lieu de M,

$$(xy^{-\frac{1}{3}} + yx^{-\frac{1}{3}})\,(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = l;$$

et, en coordonnées polaires,

$$\rho = \frac{l\sqrt[5]{\sin\omega\cos\omega}}{(\cos^{\frac{4}{3}}\omega + \sin^{\frac{4}{3}}\omega)\sqrt{\cos^{\frac{2}{3}}\omega + \sin^{\frac{2}{3}}\omega}}.$$

Les coordonnées de M, déduites des équations (1), sont

$$x = \frac{l\cos^4\theta\sin\theta}{\sin^4\theta + \cos^4\theta}, \quad y = \frac{l\sin^4\theta\cos\theta}{\sin^4\theta + \cos^4\theta}.$$

On en tire

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}^3\,\theta\,\frac{\mathrm{tg}^6\,\theta - 3\,\mathrm{tg}^2\,\theta + 4}{4\,\mathrm{tg}^6\theta + 3\mathrm{tg}^4\theta - 1}.$$

Le rayon de courbure R se déduit de la formule

$$\mathrm{R} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

On obtient une expression fort compliquée.

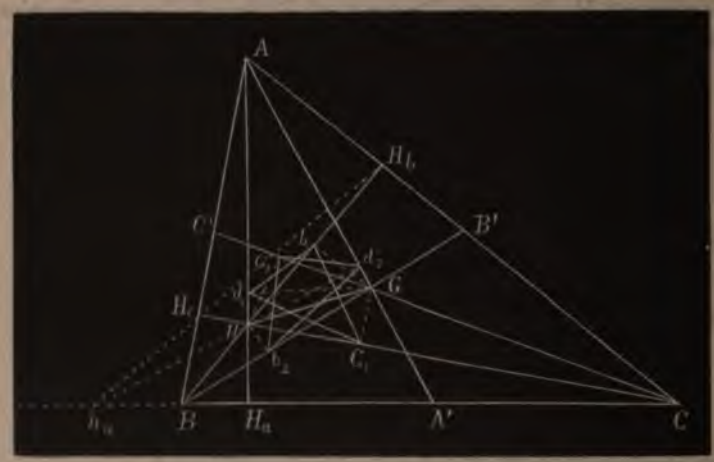
Nous engageons nos lecteurs à chercher, pour la normale et le rayon de courbure, une construction fondée sur des considérations cinématiques. (J. N.)

×Question 548 (*).

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 280.)

On joint le sommet A *d'un triangle* ABC *au centre de gravité* G *et à l'orthocentre* H. *Démontrer que les droites* AG, AH *rencontrent la circonférence décrite sur* GH *comme diamètre en deux points qui sont en ligne droite avec le point de Lemoine* K. (H. Brocard.)

Soient A′, B′, C′ les milieux des côtés du triangle ABC, et H_a, H_b, H_c les pieds des hauteurs. La circonférence décrite sur GH comme diamètre coupe les hauteurs aux points a_1, b_1, c_1 et les médianes en a_2, b_2, c_2; les



premiers points sont les projections de G sur les hauteurs de ABC, les autres celles de H sur les médianes.

1. *Le triangle* $a_1b_1c_1$ *est inversement semblable à* ABC, *et le triangle* $a_2b_2c_2$ *est inversement semblable au triangle médian de* ABC (triangle dont les côtés sont parallèles aux médianes de ABC). Cela résulte de ce que les faisceaux H $(a_1b_1c_1)$, G $(a_2b_2c_2)$, ont leurs centres sur la circonférence (GH) et que leurs rayons sont les hauteurs ou les médianes de ABC.

(*) Nous attirons l'attention des amateurs de la géométrie récente du triangle sur les propositions que nous réunissons dans la solution de la question 548. M. Tucker appelle le cercle qui a pour diamètre la distance GH, *cercle orthocentroïdal*; nous emploierons le terme de « *cercle* (GH) ». Les paraboles du n° 10 ont été étudiées par M. Brocard, en 1886, dans les *Mémoires de l'Académie de Montpellier*. Dans la figure, il faut remplacer C_1 et C_2 par c_1 et c_2.

2. *Soient* h_a, h_b, h_c, *les intersections des côtés homologues des triangles* ABC, $H_aH_bH_c$. *Les droites* Ha_2, Hb_2, Hc_2 *passent respectivement par* h_a, h_b, h_c. En effet, la circonférence décrite sur AH comme diamètre passe par H_b, H_c, a_2, et les tangentes en H_b, H_c concourent en A′; car, l'angle $BH_bA' = H_bBA' = HAH_b$. Par conséquent, Aa_2 est divisé harmoniquement par A′ et sa polaire H_bH_c; et comme AH est divisé de la même manière par H_a et H_bH_c, les droites BC, H_bH_c, Ha_2 concourent en un même point h_a

3. *L'axe orthique* $h_ah_bh_c$ *est l'axe radical du cercle circonscrit à* ABC, *du cercle des neuf points et du cercle* (GH). En effet, H_bH_c et Ha_2 sont deux cordes d'un même cercle, et pareillement que H_bH_c et BC; donc

$$h_aH.h_aa_2 = h_aH_c.h_aH_b = h_aB.h_aC. \qquad (1)$$

Le point h_c est donc d'égale puissance par rapport aux trois cercles ABC, $H_aH_bH_c$, (GH); les points h_b, h_c jouissent de la même propriété.

4. *Les circonférences* BHC, CHA, AHB *passent, respectivement par* a_2, b_2, c_2. Cela résulte de l'égalité (1).

5. *Le point* a_2 *appartient aux* CIRCONFÉRENCES ADJOINTES (AB), (AC), *qui passent par* A *et touchent* BC *respectivement en* B, C.

En effet, dans le quadrilatère inscriptible BHa_2C, l'angle $Ba_2H = BCH_c$; d'où *angle* $Aa_2B = \frac{1}{2}\pi + BCH_c = \pi - B$.

6. *Le cercle d'Apollonius, qui a pour diamètre la distance des pieds* D, D′ *de la bissectrice intérieure et de la bissectrice extérieure de l'angle* BAC, *passe par* a_2.

Car BC divise harmoniquement DD′, et A′B est une tangente au cercle ABa_2, de sorte que

$$\overline{A'B}^2 = A'D.A'D' = A'a_2.A'A.$$

COROLLAIRE. $a_2B : a_2C = AB : AC$.

7. *Les droites* a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 *sont les symédianes des deux triangles* $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$; *ces triangles et le triangle* ABC *ont même point de Lemoine.*

Le triangle $a_1b_1c_1$, inversement semblable à ABC, est directement semblable à AH_bH_c. Or AA′ est une symédiane de AH_bH_c, et à cause du quadrilatère inscrit $a_1b_1a_2H$, l'angle $b_1a_1a_2 = b_1Ha_2 = CAA'$; donc a_1a_2 est une symédiane de $a_1b_1c_1$.

La circonférence circonscrite au triangle ABC est rencontrée par les médianes AG, BG, CG en des points P, Q, R, et par les symédianes AK, BK, CK en des points P′, Q′, R′ tels, que les droites PP′, QQ′, RR′

sont parallèles aux côtés BC, CA, AB. Comme les circonférences ABC et BHa_2C, et les droites AA', P'A' sont symétriques par rapport à BC, les points a_2 et P' le sont également, et a_2P' est parallèle à Aa_1. On en conclut que les lignes homologues AP' et a_1a_2 des triangles semblables ABC, $a_1b_1c_1$ se coupent dans le même rapport; leur point d'intersection est donc le centre de similitude des deux triangles, et comme il est situé également sur les symédianes, il coïncide avec leur point de Lemoine K.

8. *Les points a_2, b_2, c_2 sont les symétriques, par rapport aux côtés correspondants du triangle* ABC, *des points de rencontre des symédianes de ce triangle avec la circonférence circonscrite.*

Ces points sont aussi les inverses, par rapport au triangle ABC, *des sommets du second triangle de Brocard.*

La première propriété vient d'être démontrée. Pour établir la seconde, rappelons que le sommet A_2 du second triangle est le sommet de deux triangles semblables A_2AB, A_2CA; les lignes AA_2, Aa_2 sont isogonales par rapport à l'angle BAC, et l'angle $a_2BC = a_2HC = BAa_2 = A_2AC = A_2BA$, de sorte que les lignes Ba_2, BA_2 sont également isogonales.

9. *Les deux droites δ, δ' qui divisent les trois hauteurs* AH_a, BH_b, CH_c *d'un triangle* ABC *en parties proportionelles, sont perpendiculaires et passent par le point de Lemoine.*

Les triangles symétriquement semblables ABC, $a_1b_1c_1$ ayant pour point double K, les angles AKa_1, BKb_1, CKc_1, $P'Ka_2$, . . ont même bissectrice intérieure et même bissectrice extérieure, qui divisent les droites Aa_1, Bb_1, Cc_1, $P'a_2$, ..., additivement et soustractivement, dans le rapport de deux lignes homologues. Soient S, S' les points où ces bissectrices coupent AH; nous aurons

$$\frac{AS}{Sa_1} = \frac{AS'}{a_1S'} = \frac{2R}{HG},$$

R désignant le rayon du cercle ABC. Cette relation, à cause de $Aa_1 = \frac{1}{3}AH_a$, peut se transformer en celles-ci

$$\frac{AS}{SH_a} = \frac{2R}{R + \frac{1}{3}HG} = \frac{MN}{HN}, \quad \frac{AS'}{H_aS'} = \frac{2R}{R - \frac{1}{3}HG} = \frac{MN}{MH},$$

M et N étant les extrémités du diamètre HG de la circonférence ABC.

10. *Soit* A''B''C'' *le triangle anticomplémentaire de* ABC, *et soient α, β, γ les sommets des trois triangles isocèles équivalents* $\alpha B''C''$, $\beta C''A''$,

$\gamma A''B''$. *Les côtés du triangle* $\alpha\beta\gamma$ *enveloppent trois paraboles* π_a, π_b, π_c, *ayant pour foyers les points* a_2, b_2, c_2.

En effet, les triangles $H_aB''C''$, $H_bC''A''$, $H_cA''B''$ étant équivalents, les points α, β, γ divisent les hauteurs AH_a, BH_b, CH_c en parties proportionnelles; donc la droite $\beta\gamma$ enveloppe une parabole π_a, touchant les deux hauteurs BH_b, CH_c, les bissectrices de l'angle BAC, le côté BC, et les droites H_bH_c, b_1c_1, δ, δ'. Le point d'intersection K des tangentes rectangulaires δ, δ', et l'orthocentre du triangle circonscrit BHC appartiennent à la directrice; donc la symédiane AK de ABC est cette directrice. Les circonférences circonscrites aux triangles BHC, H_bHH_c, b_1Hc_1, h_aH_cC, h_aH_bB formés par trois tangentes passent par le foyer a_2. Les droites $A\beta$, $A\gamma$ sont isogonales; les points de contact de BH_b, CH_c avec π_a sont situés sur le rayon AO du cercle ABC; les points de contact de BC, CA, AB, avec π_a, π_b, π_c, appartiennent à la transversale inverse de $h_ah_bh_c$.

11. *L'axe d'homologie des triangles* ABC, $\alpha\beta\gamma$ *enveloppe une parabole, inscrite au triangle* ABC *et touchant l'axe orthique; la directrice est* HK.

Soient α_1, β_1, γ_1 les intersections des côtés homologues de ABC, $\alpha\beta\gamma$. La droite $\beta\gamma$ marque sur les tangentes HB_b, BC de π_a des ponctuelles semblables; de même, la droite $\alpha\beta$ détermine sur les tangentes BH_b, BA de π_c des ponctuelles semblables. On en déduit que la droite $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ marquant sur BC, CA, AB des ponctuelles semblables, enveloppe une parabole inscrite dans le triangle ABC. Cette courbe touche la droite $h_ah_bh_c$, axe d'homologie de ABC et $H_aH_bH_c$; elle touche également les droites δ, δ', représentant deux triangles *aplatis* $\alpha\beta\gamma$. La directrice est donc la droite HK passant par l'orthocentre du triangle circonscrit ABC et par le point d'intersection des tangentes rectangulaires δ, δ'. — Le foyer de la parabole est à l'intersection de la circonférence ABC avec les isogonales des droites menées par A, B, C perpendiculairement à HK. (J. N.)

Solution par M. E. Cesàro. Soit PQR un triangle inscrit à une hyperbole équilatère. On démontre aisément que la circonférence décrite sur PQ comme diamètre rencontre PR et QR en deux autres points, en ligne droite avec le pôle de PQ. Si l'on suppose que l'hyperbole soit l'hyperbole de Kiepert d'un triangle, le point R peut coïncider successivement avec les sommets du triangle, et les points P, Q, peuvent être le barycentre et l'orthocentre : alors le pôle de PQ est précisément le point de Lemoine. On voit que le théorème de M. Brocard peut être

généralisé en remplaçant le barycentre, l'orthocentre, le point de Lemoine, respectivement par deux points quelconques, P et Q, de l'hyperbole de Kiepert, et par le pôle de PQ.

La question 548 a été aussi résolue par MM. Verniory, Beyens et Déprez.

×Question 549.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 280.)

On prend sur le côté CA ***d'un triangle*** ABC ***un point*** D, ***et sur le côté*** CB ***un point*** E; ***les droites*** AE, BD ***se coupent à l'intérieur du triangle en un point*** F. ***Comment faut-il choisir les points*** D, E ***pour que :*** 1° ***le triangle*** DEF ***soit maximum;*** 2° ***pour que la somme des triangles*** AFD, BFE ***soit maximum.***

Cette question a été résolue par MM. Déprez et Verniory. Nos honorables correspondants ont employé les règles du calcul différentiel; voici une solution plus élémentaire.

1° Posons $CE = \lambda \cdot CB$, $CD = \mu CA$. Des égalités

$$\frac{FDE}{ADE} = \frac{FE}{AE}, \quad \frac{ADE}{ACE} = \frac{AD}{AC}, \quad \frac{ACE}{ABC} = \frac{CE}{CB},$$

on déduit par multiplication,

$$\frac{FDE}{ABC} = \frac{FE}{AE}(1-\mu)\lambda. \tag{1}$$

Le triangle AEC coupé par la transversale BFD donne

$$\frac{AF}{FE} \cdot \frac{BE}{BC} \cdot \frac{CD}{DA} = 1, \quad \text{d'où} \quad \frac{AF}{FE} = \frac{1-\mu}{(1-\lambda)\mu}. \tag{2}$$

Désignant le premier membre de (1) par $\varkappa$, on conclut, de (1) et (2):

$$\varkappa = \frac{\mu\lambda(1-\mu)(1-\lambda)}{1-\mu\lambda} = \frac{\mu\lambda(1-\mu-\lambda+\mu\lambda)}{1-\mu\lambda}. \tag{3}$$

On voit que pour une valeur donnée du produit $\mu\lambda$, le maximum de $\varkappa$ correspond au minimum de la somme $\mu+\lambda$ et, par suite, à $\lambda = \mu$. La droite cherchée DE est donc parallèle à AB, et le problème est ramené à chercher le maximum de la quantité

$$\varkappa = \frac{\mu^2(1-\mu)^2}{1-\mu^3} = \frac{\mu^2(1-\mu)}{1+\mu}.$$

Pour éviter l'emploi des dérivées, nous cherchons le maximum de la fraction (3) dans l'hypothèse de λ constant, ou celui de l'expression

$$v = \frac{\mu(1-\mu)}{1-\mu\lambda}. \tag{4}$$

Résolvant l'égalité (4) par rapport à μ, on obtient

$$2\mu = \lambda v + 1 \pm \sqrt{(\lambda v+1)^2 - 4v}.$$

Donc le maximum de v correspond à

$$\lambda v + 1 = 2\sqrt{v}, \quad \mu = \sqrt{v}, \tag{5}$$

d'où en éliminant v et remplaçant λ par μ

$$\mu^3 - 2\mu + 1 = 0, \quad \text{ou} \quad (\mu-1)(\mu^2+\mu-1) = 0.$$

L'hypothèse $\mu = 1$ étant inadmissible et μ étant positif, on a

$$\lambda = \mu = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi, les points D, E divisent CA, CB en moyenne et extrême raison.

2° Soit U la somme des triangles AFD et BFE, divisée par ABC; on trouve facilement

$$U = \frac{\lambda(1-\mu)^2 + \mu(1-\lambda)^2}{1-\lambda\mu}.$$

Comme $U = 1$ pour $\lambda = 0$, $\mu = 1$ ou $\lambda = 1$, $\mu = 0$, la sécante cherchée DE se confond avec CB ou CA.

Si l'on impose la condition que DE soit parallèle à AB, on a

$$U = \frac{\mu(1-\mu)}{1+\mu},$$

et le maximum de U est donné par

$$U = 3 - 2\sqrt{2}, \quad \mu = \sqrt{2} - 1. \tag{J. N.}$$

M. Dépaux a indiqué les lieux suivants se rattachant à la même figure.

1° Si la surface DEF est constante, le point F décrit une cubique, et la droite EF enveloppe une courbe de la 4e classe.

2° Si la somme des carrés des côtés du triangle DEF est constante, le lieu de F est du 6e ordre.

3° Supposons l'angle de Brocard du triangle DEF donné; alors le point F décrit une courbe du 6e ordre.

Question 641.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 88.)

Appelons, avec M. Neuberg, faisceau direct et faisceau rétrograde de Brocard les deux groupes de trois lignes (Aω, Bω, Cω), (Aω′, Bω′, Cω′), *ω étant le point direct de Brocard* (*angle* ωAC = ωBA = ωCB; *coordonnées normales* $b : c$, $c : a$, $a : b$), *ω′ le point rétrograde.*

Faisons tourner le faisceau direct dans le sens ACB *d'un angle* λ *autour de* ω, *et le faisceau rétrograde dans le sens* ABC *du même angle* λ *autour de* ω′. *Alors*

ωA *vient couper* BC, CA, AB *respectivement en* ω_{aa}, ω_{ab}, ω_{ac};
ωB » » ω_{ba}, ω_{bb}, ω_{bc};
ωC » » ω_{ca}, ω_{cb}, ω_{cc};
ω′A » » ω'_{aa}, ω'_{ab}, ω'_{ac}.
. . . . . .

On sait que ω_{ab}, ω_{bc}, ω_{ca}, ω'_{ba}, ω'_{cb}, ω'_{ac} *sont sur un cercle de Tucker. Démontrer* 1° *que* ω_{aa}, ω'_{aa}, ω_{bb}, ω'_{bb}, ω_{cc}, ω'_{cc} *sont sur une conique;* 2° *que les droites* $\omega_{ac}\omega'_{ab}$, $\omega_{cb}\omega'_{ca}$, $\omega_{ba}\omega'_{bc}$ *sont respectivement parallèles à* BC, AB, CA; 3° *que si* ω_λ *est le centre d'homothétie de* ABC *et du triangle formé par les droites du n°* 2, *les coordonnées normales de* ω_λ *sont*

$$\frac{1}{a}\,\frac{\cot\lambda - \cot A}{\cot\lambda - \cot(A-\omega)}, \quad \text{etc.}$$

4° *Trouver le lieu de* ω_λ. (E. Lemoine.)

Solution par M. Déprez. 1° Le prolongement de Aω fait avec ωC, ωB les angles C, A; donc

$$\textit{angle}\ C\omega\omega_{aa} = C + \lambda, \quad B\omega\omega_{aa} = A - \lambda.$$

Par conséquent

$$\frac{C\omega_{aa}}{\omega\omega_{aa}} = \frac{\sin(C+\lambda)}{\sin\omega}, \quad \frac{B\omega_{aa}}{\omega\omega_{aa}} = \frac{\sin(A-\lambda)}{\sin(B-\omega)};$$

il en résulte

$$\frac{C\omega_{aa}}{B\omega_{aa}} = \frac{\sin(C+\lambda)\sin(B-\omega)}{\sin(A-\lambda)\sin\omega}.$$

De même,

$$\frac{C\omega'_{aa}}{B\omega'_{aa}} = \frac{\sin(A-\lambda\ \sin\omega}{\sin(B+\lambda)\sin(C-\omega)}.$$

On voit facilement que le produit des six rapports dans lesquels les points ω_{aa}, ω'_{aa}, ω_{bb}, ω'_{bb}, ω_{cc}, ω'_{cc} partagent les côtés du triangle ABC, est égal à $+1$; ces points appartiennent donc à une même conique.

2° Les triangles $\omega A\omega_{ac}$, ωAB donnent

$$\frac{A\omega_{ac}}{A\omega} = \frac{\sin\lambda}{\sin(A-\omega-\lambda)}, \quad \frac{A\omega}{c} = \frac{\sin\omega}{\sin A};$$

d'où

$$A\omega_{ac} = \frac{c\sin\lambda\sin\omega}{\sin(A-\omega-\lambda)\sin A},$$

$$B\omega_{ac} = A\omega_{ac} + c = c\,\frac{\sin(A-\omega-\lambda)\sin A + \sin\lambda\sin\omega}{\sin(A-\omega-\lambda)\sin A}.$$

Soit δ_a la distance de ω_{ac} à BC, on a

$$\delta_a = B\omega_{ac}\,.\sin B = \frac{bc}{a}\,\frac{\sin(A-\omega-\lambda)\sin A + \sin\lambda\sin\omega}{\sin(A-\omega-\lambda)}.$$

On trouve la même valeur pour la distance de ω'_{ab} à BC; donc la droite $\omega_{ac}\omega'_{ab}$ est parallèle à BC.

3° On peut écrire

$$\delta_a = \frac{bc}{a}\,\frac{\sin(A-\omega)\cos\lambda\sin A + \sin\lambda\,[-\cos(A-\omega)\sin A + \sin\omega]}{\sin(A-\omega)\cos\lambda - \cos(A-\omega)\sin\lambda}.$$

Or,

$$\sin\omega = \sin(\omega - A + A) = -\sin(A-\omega)\cos A + \cos(A-\omega)\sin A;$$

d'où l'on déduit

$$\delta_a = \frac{bc\sin A}{a}\,\frac{\cot\lambda - \cot A}{\cot\lambda - \cot(A-\omega)}.$$

Les coordonnées de ω_λ sont proportionnelles à δ_a, δ_b, δ_c.

4° Soient x, y, z ces coordonnées, ρ un facteur de proportionnalité ; nous avons

$$x = \rho\,\frac{\cot\lambda - \cot A}{a[\cot\lambda - \cot(A-\omega)]}, \text{ etc.}$$

Écrivons ainsi :

$$ax\cot\lambda - \rho\cot\lambda + \rho\cot A = ax\cot(A-\omega), \text{ etc.}$$

et résolvons le système de ces équations par rapport à $\cot\lambda$, $\rho\cot\lambda$, ρ; nous aurons en désignant les déterminants par leur première ligne,

$$\cot\lambda = \frac{\begin{vmatrix} a\omega\cot(A-\omega) & 1 & \cot A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a\omega & 1 & \cot A \end{vmatrix}}, \quad -\rho\cot\lambda = \frac{\begin{vmatrix} a\omega & a\omega\cot(A-\omega) & \cot A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a\omega & 1 & \cot A \end{vmatrix}},$$

$$\rho = \frac{\begin{vmatrix} a\omega & 1 & a\omega\cot(A-\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a\omega & 1 & \cot A \end{vmatrix}}.$$

Entre ces égalités, il est facile d'éliminer ρ et λ; l'équation du lieu de ω_1 est donc

$$\begin{vmatrix} a\omega\cot(A-\omega) & 1 & \cot A \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a\omega & 1 & a\omega\cot(A-\omega) \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} a\omega & a\omega\cot(A-\omega) & \cot A \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a\omega & 1 & \cot A \end{vmatrix} = 0.$$

Ce lieu est du 3e ordre.

Question 654.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 172.)

Trouver pour x une valeur entière qui rende carrés parfaits les binômes $4x+5$, $5x+4$.

Solution par M. Emmerich. Posons

$$4x+5=u^2, \quad 5x+4=v^2, \tag{1}$$

d'où, en éliminant x,

$$5u^2-4v^2=9.$$

Tout carré parfait étant de la forme $\mathcal{M}.\ 9$ ou $\mathcal{M}.\ 3+1$, u et v doivent être divisibles par 3; soit donc $u=3\alpha$, $v=3\beta$, d'où

$$5\alpha^2-4\beta^2=1, \tag{2}$$

$$(2\beta+\alpha\sqrt{5})(2\beta-\alpha\sqrt{5})=-1,$$

$$(2\beta+\alpha\sqrt{5})^{2p+1}(2\beta-\alpha\sqrt{5})^{2p+1}=-1. \tag{3}$$

Or, $(2\beta+\alpha\sqrt{5})^{2p+1}$ est de la forme $2B+A\sqrt{5}$, et alors, nécessairement, $(2\beta-\alpha\sqrt{5})^{2p+1}=2B-A\sqrt{5}$; la relation (3) devient

$$5A^2-4B^2=1.$$

Par conséquent, si (α,β) est une solution de (2), les nombres (A, B) forment également une solution. Prenons pour (α, β) la solution $(1, 1)$; alors

$$2B+A\sqrt{5}=(2+\sqrt{5})^{2p+1}, \quad 2B-A\sqrt{5}=(2-\sqrt{5})^{2p+1},$$

Les valeurs correspondantes de u, v, x seront

$$u=\frac{3}{2\sqrt{5}}[(\sqrt{5}+2)^{2p+1}-(\sqrt{5}-2)^{2p+1}],$$

$$v=\frac{3}{4}[(\sqrt{5}+2)^{2p+1}-(\sqrt{5}-2)^{2p+1}],$$

$$x=\frac{1}{80}[(9+4\sqrt{5})^{2p+1}+(9-4\sqrt{5})^{2p+1}-82].$$

Il est facile de voir que cette valeur de x est entière.

Solution par M. Déprez. Pour résoudre l'équation (2), à laquelle conduit la question précédente, je développe $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ en fraction continue; les réduites sont $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{10}{17}$, $\frac{161}{144}$, $\frac{344}{515}$. Les deux termes d'une réduite de rang impair sont des valeurs admissibles de β et α.

Autre solution par MM. Verniory et François. MM. Brocard et de Bözóky signalent les formules qui résolvent, séparément, chacune des équations (1):

$$x=n^2+n-1, \quad x=5p^2\pm 4p.$$

Pour trouver la première formule, on peut observer que u doit être impair, ce qui conduit à poser $u=2n+1$; pour la seconde, on a, nécessairement, $v=5p\pm 2$.

QUESTIONS D'EXAMEN.

École Polytechnique de Paris (7 juin 1890). On donne, dans un plan, une hyperbole équilatère H, dont l'équation par rapport à ses axes pris pour axes de coordonnées est $x^2-y^2=a^2$. D'un point M du plan, ayant pour coordonnées $x=p$, $y=q$, on mène des normales à cette courbe. On demande :

1° De faire passer par les pieds de ces normales une nouvelle hyperbole équilatère, dont les normales en ces points soient concourantes, et de déterminer leur point de concours;

2° En désignant par K une hyperbole équilatère satisfaisant à cette condition, dans quelle région du plan doit être placé le point M pour qu'il y ait une hyperbole K correspondant à ce point;

3° Quelle ligne doit décrire le point M pour que l'hyperbole K soit égale à l'hyperbole H.

Nota. — On conservera les notations indiquées.

Ecole Normale de Paris (16 juin 1890). I. Entre les coordonnées xy d'un point A et les coordonnées u, v d'un point B, on établit les relations

$$x=\frac{u^3+\lambda uv^2}{u^2+v^2}, \quad y=\frac{v^3+\lambda vu^2}{u^2+v^2},$$

où λ est un nombre positif donné.

Après avoir déduit de ces relations l'équation qui relie les coefficients angulaires α, β des droites qui joignent l'origine aux points A, B, on montrera que, en général, à chaque point A correspondent trois positions du point B : ces points B_1, B_2, B_3 peuvent-ils être réels et distincts ? Où le point A doit-il se trouver pour qu'il en soit ainsi ? Sur quel lieu doit-il être situé pour que deux de ces points, B_2 et B_3, par exemple, soient confondus ? Si le point A décrit ce lieu, quels sont les lieux décrits par les points confondus B_2, B_3 et par le point B_1 ?

II. Étant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy, on prend sur l'axe des x un point fixe A, sur l'axe des y un point fixe B, et l'on mène par le point O une parallèle à la droite AB. On considère un système de trois cercles assujettis à avoir même axe radical et à être tangents, le premier en A à l'axe des x, le second en B à l'axe des y, le troisième en O à la parallèle à AB.

Démontrer que l'axe radical des trois cercles passe par un point fixe.

Trouver le lieu des points communs à ces trois cercles; on indiquera quelle est en général la forme de cette courbe, et l'on examinera en particulier le cas où l'angle en A du triangle OAB est égal à $\frac{1}{6}\pi$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

***685** (Tome VIII, p. 56). Les constantes A, B, C, a, b, c étant données, déterminer les constantes A_1, B_1, C_1, de façon que l'expression

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\frac{A_1}{(x-a)^2}+\frac{B_1}{(x-b)^2}+\frac{C_1}{(x-c)^2}$$

soit le carré d'une fonction rationnelle en x. A quelle condition le problème est-il possible ? Les constantes a, b, c sont supposées différentes.

686. Étant donné un cercle O, on abaisse d'un point M de sa circonférence une perpendiculaire MP sur un rayon fixe OA, puis on prolonge PM de $MN = n.OP$. 1° Le lieu de N est une ellipse; 2° Trouver les axes de cette courbe; 3° Construire la tangente en N. (KEELHOFF.)

***687**. Rendre calculable par logarithmes, l'expression

$$b\left(\operatorname{tang}\frac{A}{2}+\operatorname{tang}\frac{B}{2}\right)+c\left(\operatorname{tang}\frac{A}{2}+\operatorname{tang}\frac{C}{2}\right);$$

A, B, C sont les angles d'un triangle rectiligne; b, c, les côtés opposés.

(E. CATALAN.)

Rectifications. Page 141, ligne dernière, lire $(3x^2)^2+3(x^3-x)^2$, au lieu de $(3x^2)^3+3(3x^3-x)^3$. Page 147, ligne dernière, lire 1864, au lieu de 1881. Page 149, ligne 4, lire *corde* AC, au lieu de *corde* AB.

SUR L'EMPLOI DES COORDONNÉES BARYCENTRIQUES;

par M. E. Cesáro, professeur à l'Université de Palerme.

Introduction. M. E. Cesáro a publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1887, pp. 215-242 des *Remarques sur la Géométrie du triangle*, dans lesquelles il fait un grand usage des moments d'inertie. Plusieurs abonnés nous ayant demandé des éclaircissements sur l'emploi, en géométrie, d'une théorie appartenant en apparence à la mécanique et étrangère à leurs études, nous faisons précéder le présent article d'une courte introduction.

Le *moment d'inertie* d'un point A, de masse μ, par rapport à un axe MU est le produit μp^2 de cette masse par le carré de la distance p de A à MU. Le *moment d'inertie d'un système de points* $A_1, A_2, \ldots$, chargés des masses $\mu_1, \mu_2, \ldots$ est la somme des moments d'inertie de ces points; si on le représente par $(\mu_1 + \mu_2 + \cdots)\rho^2$, ρ est le *rayon de gyration* du système $A_1A_2\ldots$ par rapport à l'axe MU.

Portons sur MU une longueur $MP = k^2 : \rho$, k étant une constante. Lorsque l'axe MU tourne autour du point M, le point P engendre une surface du second ordre, qui est *la quadrique d'inertie* du système $A_1A_2\ldots$ par rapport au point M.

M. E. Cesáro ne considère que trois points A_1, A_2, A_3, et prend pour μ_1, μ_2, μ_3 les masses qui, placées en A_1, A_2, A_3 ont pour centre de gravité un point donné M. Si l'axe MU tourne autour de M dans le plan $A_1A_2A_3$, P décrit une courbe du second ordre, qui porte le nom de *conique d'inertie* du point M.

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x, y) les coordonnées des points A_1, A_2, A_3, P par rapport à deux axes rectangulaires MX, MY, et soit α l'angle UMX. Si l'on suppose $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$, on trouve facilement

$$\rho^2 = \Sigma\mu_1 (y_1 \cos\alpha - x_1 \sin\alpha)^2, \quad x = \frac{k^2}{\rho}\cos\alpha, \quad y = \frac{k^2}{\rho}\sin\alpha.$$

d'où, en éliminant $\cos\alpha$, $\sin\alpha$,

$$\Sigma\mu_1 (xy_1 - yx_1)^2 = k^4.$$

Posons

$$A = \Sigma\mu_1 x_1^2, \quad B = \Sigma\mu_1 y_1^2, \quad C = \Sigma\mu_1 x_1 y_1;$$

et nous aurons pour équation de la conique d'inertie

$$Ay^2 - 2Cxy + Bx^2 = k^4.$$

Pour simplifier, orientons les axes des coordonnées de manière que $C = 0$ et prenons $k^4 = AB$; MX et MY seront les *axes principaux d'inertie* des masses μ_1, μ_2, μ_3, et la conique sera représentée par

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1.$$

Pour construire la courbe, il suffit de connaître les points P_1, P_2, P_3 où elle rencontre respectivement les droites MA_1, MA_2, MA_3. Soient B_1, B_2, B_3 les points de

rencontre de MA_1, MA_2, MA_3 avec A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, et p, q les distances des points A_2, A_3 à MA_1. On a

$$MP_1 = \frac{k^2}{\sqrt{\mu_2 p^2 + \mu_3 q^2}}.$$

Les coordonnées barycentriques μ_1, μ_2, μ_3 sont égales aux rapports des aires MA_2A_3, MA_3A_1, MA_1A_2 à l'aire $A_1A_2A_3$; p et q sont les hauteurs des triangles MA_1A_2, MA_3A_1. Par conséquent

$$\mu_2 p^2 + \mu_3 q^2 = \frac{MA_3A_1}{A_1A_2A_3}\left(\frac{2MA_1A_2}{MA_1}\right)^2 + \frac{MA_1A_2}{A_1A_2A_3}\left(\frac{2MA_3A_1}{MA_1}\right)^2$$

$$= \frac{4MA_3A_1 \cdot MA_1A_2 \cdot MA_2A_3}{A_1A_2A_3} \cdot \frac{MA_1A_2 + MA_3A_1}{MA_2A_3} \cdot \frac{1}{\overline{MA_1}^2} = 4\mu_1\mu_2\mu_3\sigma^2 \cdot \frac{_1M}{MB_1} \cdot \frac{1}{\overline{MA_1}^2},$$

et si l'on prend $k^2 = 2\sigma\sqrt{\mu_1\mu_2\mu_3}$, il vient $MP_1^2 = -MA_1 \cdot MB_1$.

D'après cela, si l'on construit la conique Γ conjuguée par rapport au triangle $A_1A_2A_3$ et ayant pour centre M, les carrés des rayons de cette courbe dirigés suivant MA_1, MA_2, MA_3 sont égaux à $-\overline{MP_1}^2$, $-\overline{MP_2}^2$, $-\overline{MP_3}^2$; donc la conique d'inertie ne diffère de la courbe Γ que par les signes des carrés des axes principaux.

(J. N.)

Lorsqu'on représente un point M, mobile dans un plan, comme barycentre de trois masses variables μ_1, μ_2, μ_3, appliquées aux points fixes A_1, A_2, A_3, il peut être utile de considérer la ***conique d'inertie*** du système des masses coordonnées, et de rapporter la figure aux axes de cette conique. C'est en associant de cette manière les coordonnées cartésiennes aux coordonnées barycentriques qu'on facilite souvent l'étude de certaines questions, surtout de celles qui intéressent la ***Géométrie récente du triangle***.

Soient x_i, y_i les coordonnées de A_i par rapport à deux axes orthogonaux quelconques, issus de M, de sorte que

$$\Sigma\mu_1 x_1 = 0, \quad \Sigma\mu_1 y_1 = 0, \tag{1}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\mu_1}{x_2y_3 - x_3y_2} = \frac{\mu_2}{x_3y_1 - x_1y_3} = \frac{\mu_3}{x_1y_2 - x_2y_1} = \frac{1}{2\sigma}, \tag{2}$$

pourvu qu'on prenne égale à 1 la somme des masses coordonnées, et qu'on désigne par σ l'aire du triangle fondamental $A_1A_2A_3$. Posons, en outre,

$$\Sigma\mu_1 x_1^2 = A, \quad \Sigma\mu_1 y_1^2 = B, \quad \Sigma\mu_1 x_1 y_1 = C. \tag{3}$$

Les égalités (1) et (3) donnent aisément

$$\begin{cases} 2\sigma\mu_1 x_1 = A(y_2 - y_3) - C(x_2 - x_3), \\ 2\sigma\mu_1 y_1 = C(y_2 - y_3) - B(x_2 - x_3), \end{cases} \tag{4}$$

et deux autres couples de relations analogues. On en déduit

$$\begin{cases} 2\sigma\mu_1(Cx_1 - Ay_1) = (AB - C^2)(x_2 - x_3), \\ 2\sigma\mu_1(Bx_1 - Cy_1) = (AB - C^2)(y_2 - y_3), \end{cases} \tag{5}$$

etc. Il est utile de remarquer l'identité

$$AB - C^2 = 4\sigma^2\mu_1\mu_2\mu_3, \tag{6}$$

qu'on obtient sans peine au moyen des relations (2). Les côtés du triangle partagent le plan en sept régions, dont trois renferment les centres des cercles ex-inscrits. D'après (6), la conique d'inertie *est une hyperbole* lorsque M est situé dans l'une des trois régions dont il s'agit. Elle *est une ellipse* pour toute autre position de M; mais l'ellipse n'est *réelle* que pour les points *intérieurs* au triangle.

Si l'on pose

$$2\sigma\nu_1 = (y_2 - y_3)x - (x_2 - x_3)y + x_2y_3 - x_3y_2,$$

les formules (2) et (5) permettent d'écrire

$$(AB - C^2)\frac{\nu_1}{\mu_1} = (Bx_1 - Cy_1)x + (Ay_1 - Cx_1)y + AB - C^2. \tag{7}$$

L'équation de A_2A_3 est $\nu_1 = 0$, ou bien, en vertu du dernier résultat, et en orientant les axes de manière que $C = 0$,

$$\frac{xx_1}{A} + \frac{yy_1}{B} + 1 = 0.$$

Donc *les côtés du triangle sont les antipolaires des sommets opposés, par rapport à toutes les coniques d'inertie du plan*. Remarquons, en passant, que ν_1, ν_2, ν_3 satisfont aux relations

$$\Sigma\nu_1 = 1, \quad \Sigma\nu_1x_1 = x, \quad \Sigma\nu_1y_1 = y;$$

ce sont donc les coordonnées barycentriques de (x, y), de sorte que $\nu_1 = 0$ est tout aussi bien l'équation cartésienne que l'équation barycentrique du côté A_2A_3.

Si l'on fixe ν_1, ν_2, ν_3, l'équation

$$\frac{\nu_1}{\mu_1} + \frac{\nu_2}{\mu_2} + \frac{\nu_3}{\mu_3} = 0 \tag{8}$$

représente une conique circonscrite au triangle fondamental, et admettant pour *pôle d'homologie* le point défini par les masses ν_1, ν_2, ν_3; mais, si μ_1, μ_2, μ_3 sont fixes, et que l'on prenne pour origine le point M représenté

par ces coordonnées, l'équation (8) devient, en vertu de (7), pour C = 0,

$$\frac{xx_0}{A}+\frac{yy_0}{B}+1=0,$$

x_0 et y_0 étant les coordonnées du *barycentre* G, et l'on sait, d'autre part, qu'elle doit représenter la *polaire trilinéaire* de M. Donc *la polaire trilinéaire d'un point n'est autre que l'antipolaire du barycentre par rapport à la conique d'inertie correspondante.* Cette corrélation entre les points et les droites du plan est semblable à celle qui existe entre les *axes instantanés de rotation* et les *centres de percussion* correspondants.

L'orientation des coniques d'inertie est régie par une loi fort simple. Une hyperbole équilatère, de centre (ξ, η), peut être représentée par l'équation

$$xy=\eta x+\xi y. \qquad (9)$$

Écrivons que cette équation est vérifiée par les coordonnées des sommets du triangle, puis ajoutons les trois égalités obtenues, après les avoir multipliées par μ_1, μ_2, μ_3, respectivement. Il vient C = 0. Donc *les axes de la conique d'inertie de* M *sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole équilatère* $MA_1A_2A_3$. Il en résulte immédiatement que *le lieu des points, pour lesquels les coniques d'inertie ont une orientation donnée, est une hyperbole équilatère circonscrite au triangle fondamental.* Lorsque M coïncide avec G on retrouve une propriété connue : *les axes de l'ellipse de Steiner sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole de Kiepert.* On peut ajouter que *toute conique d'inertie, orientée comme l'ellipse de Steiner, a son centre sur l'hyperbole de Kiepert.*

Soit H le quatrième point commun à deux hyperboles équilatères, circonscrites au triangle fondamental. Il est clair que ces hyperboles sont différemment orientées, sans quoi elles ne sauraient avoir plus de deux points réels communs. Par suite, la conique d'inertie de H a deux systèmes d'axes principaux. Elle en a donc une infinité : c'est un cercle. Il faut, dès lors, que toute hyperbole équilatère circonscrite passe par H. Enfin ce point H n'est autre que l'*orthocentre.* On exprime, en effet, que les hauteurs du triangle contiennent l'origine, en écrivant

$$x_1x_2+y_1y_2=x_2x_1+y_2y_1=x_1x_2+y_1y_2,$$

ou bien, en vertu de (5),

$$\frac{x_i^2-y_i^2}{x_iy_i}=\frac{A-B}{C}, \quad (i=1, 2, 3).$$

En général, cela exige qu'on ait $C = 0$, $A = B$. Les résultats qui précèdent sont fort connus; mais il nous a paru intéressant de montrer comment on peut les établir, non sans élégance, par la considération des coniques d'inertie. Nous venons également de mettre en évidence que l'orthocentre est le seul point, abstraction faite des sommets, qui jouisse de la propriété d'avoir un *cercle d'inertie*. C'est pourquoi nous pensons qu'il doit y avoir avantage, pour l'étude des propriétés du triangle, à placer l'origine en H, tout en laissant arbitraire l'orientation des axes.

Déterminons les coordonnées du centre de l'hyperbole équilatère $MA_1A_2A_3$. En écrivant que les coordonnées des sommets vérifient l'équation (9), on obtient trois relations qui, multipliées une fois par μ_1x_1, μ_2x_2, μ_3x_3, et une autre fois par μ_1y_1, μ_2y_2, μ_3y_3, donnent par addition

$$B\xi = \Sigma\mu_1x_1y_1^2, \quad A\eta = \Sigma\mu_1x_1^2y_1. \tag{10}$$

Cela étant, on a, par l'emploi des relations (4),

$$\Sigma\mu_1x_1y_1^2 = -\frac{B}{2\sigma}\Sigma x_1y_1(x_2 - x_3) = -\frac{B}{A}x_1x_2x_3,$$

$$\Sigma\mu_1x_1^2y_1 = \frac{A}{2\sigma}\Sigma x_1y_1(y_2 - y_3) = -\frac{A}{B}y_1y_2y_3.$$

Donc

$$\xi = -\frac{x_1x_2x_3}{A}, \quad \eta = -\frac{y_1y_2y_3}{B}.$$

Remarquons encore, en employant les relations (4) et (5), que la somme $\mu_1x_1^3 + \cdots$ peut être mise sous la forme suivante :

$$\frac{A}{2\sigma}\Sigma x_1^2(y_2 - y_3) = -\frac{A}{2\sigma}\Sigma y_1(x_2^2 - x_3^2) = \frac{A}{B}\Sigma\mu_1y_1^2(3x_0 - x_1).$$

On trouve ainsi, d'après les relations (10),

$$\Sigma\mu_1x_1^3 = A(3x_0 - \xi), \quad \Sigma\mu_1y_1^3 = B(3y_0 - \eta). \tag{11}$$

C'est par des calculs analogues qu'on parvient aux formules

$$\Sigma\mu_1x_1^3y_1 = 3A\eta x_0, \quad \Sigma\mu_1x_1y_1^3 = 3B\xi y_0,$$
$$\Sigma\mu_1x_1^2y_1^2 = \tfrac{3}{2}(B\xi x_0 + A\eta y_0) + \tfrac{1}{2}AB, \text{ etc.},$$

souvent utiles.

Soient (α, β) et R le centre et le rayon de la circonférence circonscrite au triangle fondamental. On a

$$x_1^2 + y_1^2 = 2(\alpha x_1 + \beta y_1) + R^2 - (\alpha^2 + \beta^2). \tag{12}$$

Si l'on multiplie cette égalité par μ_i, et qu'on l'ajoute aux égalités analogues, relatives aux deux autres sommets, il vient

$$A + B = R^2 - (\alpha^2 + \beta^2). \qquad (13)$$

Donc *le rayon polaire de gyration, en un point quelconque, égale en module la tangente menée par ce point à la circonférence circonscrite.* Les hyperboles d'inertie sont donc situées dans l'angle *aigu* ou dans l'angle *obtus* de leurs asymptotes, suivant que leur centre est *intérieur* ou *extérieur* au cercle circonscrit. Enfin *le lieu des centres des hyperboles équilatères d'inertie est la circonférence circonscrite au triangle fondamental.* Les axes d'une hyperbole sont les bissectrices de l'angle que MA_i forme avec la perpendiculaire abaissée par M sur le côté opposé à A_i $(i = 1, 2, 3)$.

La relation (12), multipliée une fois par $\mu_i x_i$, et une autre fois par $\mu_i y_i$, donne, par addition aux relations analogues,

$$2A\alpha = \Sigma \mu_i x_i (x_i^2 + y_i^2), \quad 2B\beta = \Sigma \mu_i y_i (x_i^2 + y_i^2),$$

c'est-à-dire, en vertu de (10) et (11),

$$(A - B)\xi = A(3x_0 - 2\alpha), \quad (A - B)\eta = -B(3y_0 - 2\beta). \qquad (14)$$

Pour $A = B$ on retrouve un résultat connu : le centre du cercle circonscrit est le *point complémentaire* de l'orthocentre. De même, pour $A + B = 0$,

$$2\xi = 3x_0 - 2\alpha, \quad 2\eta = 3y_0 - 2\beta,$$

et l'on voit que, si M appartient à la circonférence $A_1A_2A_3$, l'hyperbole équilatère $MA_1A_2A_3$ a son centre au milieu de MH. On peut dire aussi que *le barycentre du quadrilatère formé par les points communs d'une circonférence et d'une hyperbole équilatère est sur le diamètre commun des deux courbes, à égale distance de leurs centres.* Le premier énoncé permet de retrouver immédiatement la proposition connue : *le lieu des centres des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle* est complémentaire de la circonférence circonscrite. C'est la *circonférence des neuf points.*

Si l'on veut que la conique représentée par l'équation (9) touche A_2A_3, il faut écrire, pour $A = B$,

$$\xi^2 x_1^2 + \eta^2 y_1^2 - 2\xi\eta x_1 y_1 + 2A(\xi x_1 + \eta y_1) + A^2 = 0.$$

Multiplions cette égalité par μ_i, puis ajoutons-la aux égalités analogues, relatives aux autres côtés. Il vient

$$\xi^2 + \eta^2 + A = 0.$$

Donc *le lieu des centres des hyperboles équilatères inscrites à un triangle* est une circonférence de centre H et de rayon $\sqrt{-A}$. C'est la *circonférence autopolaire* du triangle : son anticomplémentaire est la *circonférence de Longchamps*. Évidemment ces lignes ne sont *réelles* que pour les triangles *obtusangles*.

Enfin les formules (14) donnent encore, par élimination de A et B,

$$\frac{\xi}{3x_0 - 2\alpha} + \frac{\eta}{3y_0 - 2\beta} = 1.$$

Donc *les projections de l'orthocentre sur les axes d'inertie de* M *sont en ligne droite avec le centre de l'hyperbole équilatère* $MA_1A_2A_3$. Il est évident que la droite en question contient aussi le pôle de MH, conjugué harmonique du centre sur le segment intercepté par les axes de la conique d'inertie. En particulier, pour M coïncidant avec G, on voit que les projections de l'orthocentre sur les axes de l'ellipse de Steiner sont séparées harmoniquement par le centre de l'hyperbole de Kiepert et par le *point de Lemoine*, pôle de GH par rapport à l'hyperbole.

D'après (13) et (14) l'équation du *cercle circonscrit* est

$$x^2 + y^2 = ax + by + (A + B)\left(\frac{\xi x}{A} + \frac{\eta y}{B} + 1\right), \qquad (15)$$

(a, b) étant l'anticomplémentaire de (ξ, η). L'équation (15) doit donc être vérifiée pour $x = a$, $y = b$, et, par suite, on doit avoir

$$\frac{a\xi}{A} + \frac{b\eta}{B} + 1 = 0. \qquad (16)$$

L'équation du *cercle des neuf points* se déduit de (15) en remplaçant x et y par $3x_0 - 2x$, $3y_0 - 2y$. Pour $A = B$, les deux équations dont il s'agit deviennent

$$x^2 + y^2 = 3(xx_0 + yy_0) + 2A, \quad x^2 + y^2 = \tfrac{3}{2}(xx_0 + yy_0) + \tfrac{1}{2}A. \qquad (17)$$

Il en résulte, par élimination de $x^2 + y^2$, l'équation

$$xx_0 + yy_0 + A = 0,$$

qui représente la polaire trilinéaire de H. Donc *la polaire trilinéaire de l'orthocentre est l'axe radical du cercle circonscrit et du cercle des neuf points*. On a vu que la dernière courbe est le lieu des centres des hyperboles équilatères *circonscrites* au triangle fondamental, et que le lieu des centres des hyperboles équilatères *inscrites* est la circonférence autopo-

laire du triangle. Les équations (17) font voir que *les trois circonférences* dont il vient d'être question *ont même axe radical.* Cette droite est l'*axe orthique.*

L'interprétation géométrique de la relation (16) est aisée. Elle conduit à regarder l'antipolaire de (a, b) par rapport à la conique d'inertie comme une généralisation de la *droite de Simson.* Remarquant, en effet, que l'équation de l'antipolaire en question est

$$\frac{ax}{A}+\frac{by}{B}+1=0,$$

on trouve que *les diamètres de la conique d'inertie, conjugués aux directions des droites qui joignent* (a, b) *aux sommets du triangle, rencontrent les côtés correspondants en trois points d'une droite, passant par* (ξ, η). On peut d'ailleurs, dans cet énoncé, échanger entre eux les points (a, b) et (ξ, η). Lorsque M est sur la circonférence $A_1A_2A_3$, le point (a, b) lui est diamétralement opposé, et le point (ξ, η) est au milieu de MH. Il en résulte que la droite joignant (a, b) au sommet A, par exemple, est perpendiculaire à MA_1, et, par suite, la direction conjuguée est perpendiculaire à A_2A_3. On trouve donc, comme cas particulier de la proposition énoncée en dernier lieu, que *les projections de* M *sur les côtés sont sur une droite,* qui passe par le milieu de MH. Autre cas particulier : Si M coïncide avec H, deux directions conjuguées quelconques sont perpendiculaires entre elles. Il en résulte que *les parallèles menées par l'orthocentre à trois droites, issues des sommets et concourant sur la circonférence circonscrite, rencontrent les côtés opposés en trois points d'une droite.*

On généralise le dernier résultat en cherchant *le lieu des points* P, *tels que les parallèles menées par* M *à* PA_1, PA_2, PA_3, *rencontrent les côtés correspondants sur une droite.* On trouve facilement que ce lieu est représenté par l'équation

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}-3\left(\frac{xx_0}{A}+\frac{yy_0}{B}\right)+2, \qquad (18)$$

vérifiée par les coordonnées des sommets. Cette équation prouve que *la conique d'inertie de* M *est homothétique à la conique circonscrite, dont le centre est le complémentaire de* M. Par exemple, *la conique d'inertie du point de Steiner est homothétique à l'hyperbole de Kiepert.*

Afin de généraliser d'autres résultats, obtenus plus haut, nous allons

d'abord chercher l'équation générale des coniques circonscrites à $MA_1A_2A_3$. L'équation

$$px^2 + qy^2 + kxy = (2pu + kv)\,x + (2qv + ku)\,y \qquad (19)$$

peut représenter, pour des valeurs convenables de p, q, k, une des coniques considérées, ayant son centre en (u, v). Écrivons que l'équation (19) est vérifiée par les coordonnées des sommets, puis multiplions par μ_1, μ_2, μ_3 les égalités obtenues, et additionnons. Il vient $pA + qB = 0$, ce qui autorise à prendre

$$p = \frac{1}{A}, \quad q = -\frac{1}{B}.$$

Si, au lieu de multiplier par μ_i, on multiplie par $\mu_i x_i$, ou par $\mu_i y_i$, on obtient

$$k(u - \xi) + q(2v - b) = 0, \quad k(v - \eta) + p(2u - a) = 0.$$

En développant le premier membre, et en tenant compte de la relation (16), on trouve que (u, v) doit vérifier l'équation

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = \frac{3}{2}\left(\frac{xx_0}{A} + \frac{yy_0}{B}\right) + \frac{1}{2}, \qquad (20)$$

qui représente une conique, dont le centre est aux $\frac{3}{4}$ de MG. Du reste, par le changement de x et y en $\frac{1}{2}(3x_0 - x)$ et $\frac{1}{2}(3y_0 - y)$, l'équation (20) se transforme en (18). Donc la conique (20) est la ligne complémentaire de la conique (18). On en déduit facilement que ***les milieux des côtés et des diagonales d'un quadrilatère appartiennent à une même conique, lieu des centres des coniques circonscrites au quadrilatère.*** Le centre de la conique est le barycentre du quadrilatère. Il y aurait encore à considérer la conique représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + 1 = 0.$$

C'est la ***conique autopolaire*** de centre M, ***concourant avec les coniques*** (18) ***et*** (20) ***sur la polaire trilinéaire de*** M. D'après l'équation (13), ***les circonférences orthoptiques de toutes les coniques autopolaires d'un triangle rencontrent orthogonalement la circonférence circonscrite.***

Il est clair que la polaire trilinéaire de M est le ***lieu des pôles d'homologie*** de toutes les coniques circonscrites à $MA_1A_2A_3$. Si M appartient à l'ellipse de Steiner, son complémentaire se trouve sur l'ellipse qui touche les côtés du triangle en leurs milieux. On sait que cette courbe est le lieu

des centres des coniques circonscrites à $GA_1A_2A_3$. Donc, dans le cas considéré, la conique (18) passe par G, et, par suite, il en est de même de la conique (20). Il y a plus : les deux coniques se touchent en G, et leur tangente commune en ce point est la polaire trilinéaire de M. Par exemple, si M est le point de Steiner, son complémentaire est le centre de l'hyperbole de Kiepert. En conséquence, *la polaire trilinéaire du point de Steiner touche l'hyperbole de Kiepert au barycentre.* Elle passe, en outre, par le point de Lemoine, pôle d'homologie de la circonférence circonscrite.

On sait que les anticomplémentaires du centre et du pôle d'homologie d'une conique sont en correspondance *isotomique*. Si le centre parcourt la conique (20), le pôle se meut sur la polaire trilinéaire de M. Donc tout point de l'anticomplémentaire de cette droite a son conjugué isotomique sur la conique (18). Autrement dit : *la transformée isotomique d'une conique circonscrite est l'anticomplémentaire de la polaire trilinéaire de l'anticomplémentaire du centre.* On sait aussi, d'après M. Neuberg, que la même droite est la *polaire trilinéaire du conjugué isotomique du pôle d'homologie.* Par exemple, si l'on fait coïncider M avec H, on voit que la transformée isotomique de la circonférence circonscrite est l'*anticomplémentaire de l'axe orthique*, ou la *polaire trilinéaire du conjugué isotomique du point de Lemoine.* C'est la *droite de Longchamps*, transversale réciproque de la *droite de Lemoine.* Rappelons que ces droites sont les polaires, par rapport à l'ellipse de Steiner, des anticomplémentaires du point de Lemoine et de son conjugué isotomique, point commun aux hyperboles de Kiepert du triangle fondamental et de son *premier triangle de Brocard.*

Le nombre des applications qu'on peut faire des propositions qui précèdent est incalculable. Bornons-nous à considérer, parmi les coniques circonscrites, la circonférence, l'ellipse de Steiner, l'hyperbole de Kiepert, dont les transformées isotomiques sont la droite de Longchamps, la droite à l'infini, la tangente en G à l'hyperbole. La première conique rencontre les deux autres aux points de Steiner et de Tarry, respectivement. On trouve, par application des propositions démontrées, en s'aidant de quelques calculs, que *le conjugué isotomique du point de Tarry est le centre de l'hyperbole de Kiepert du premier triangle de Brocard.* De même, *le conjugué isotomique du point de Steiner est à l'infini sur la droite de Longchamps.* Prenons, maintenant, parmi les « *Exercices divers* » de la *Géométrie élémentaire récente*, de M. Casey, celui qui porte le n° 152 : *les points de Brocard ont leurs conjugués isotomiques sur une droite*

parallèle à la droite de Longchamps. On peut dire que les conjugués dont il s'agit sont en ligne droite avec le conjugué isotomique du point de Steiner. Conséquemment ***le point de Steiner et les points de Brocard sont sur une même hyperbole, circonscrite au triangle fondamental.*** Ajoutons que cette conique rencontre l'hyperbole de Kiepert au point L, centre d'homologie du triangle fondamental et du triangle formé par les milieux des côtés du premier triangle de Brocard. L est diamétralement opposé au point de Steiner sur la conique considérée. On trouve ensuite, par une transformation simple, que ***le point de Lemoine d'un triangle et les points de Brocard de son premier triangle de Brocard sont situés sur une même hyperbole circonscrite à ce dernier triangle, et ayant pour centre un point de l'hyperbole de Kiepert du triangle fondamental.*** Ce point n'est autre que L. De même, sachant que les ***centres isogones*** sont aux extrémités du diamètre de l'hyperbole de Kiepert, qui passe par le point de Lemoine, on en déduit que ***les anticomplémentaires des centres isogones sont en ligne droite avec le point de Steiner et le conjugué isotomique de l'orthocentre;*** puis, par une transformation isotomique, que ***les anticomplémentaires des centres isogones ont leurs conjugués isotomiques sur une hyperbole équilatère circonscrite,*** dont une asymptote est parallèle à la ***droite d'Euler.*** Le centre et le pôle d'homologie de l'hyperbole sont, respectivement, le complémentaire et le conjugué isotomique des pôles trilinéaires de la droite des centres isogones, et de la droite anticomplémentaire; etc. etc.

Les éléments qu'on a pris l'habitude de nommer ***remarquables*** ne sont pas tels par eux-mêmes, mais bien par les relations qu'ils ont entre eux. Aussi peut-on appliquer toute proposition, relative aux liaisons d'un système quelconque d'éléments, à tout autre système, dont les éléments présentent les mêmes liaisons. A ce point de vue, il serait juste d'appeler ***conique de Steiner associée au point*** M la conique (18), c'est-à-dire la conique circonscrite, dont le centre est le complémentaire de M. De même, on peut appeler ***hyperbole de Kiepert associée à*** M l'hyperbole (9), c'est-à-dire l'hyperbole équilatère circonscrite, passant par M. Ces deux courbes ont en commun avec la circonférence circonscrite deux points diamétralement opposés, à savoir le point (a, b), ***point de Steiner associé à*** M, et le ***point de Tarry associé à*** M, dont les coordonnées sont

$$x = \frac{A + B}{A}\xi, \quad y = \frac{A + B}{B}\eta.$$

Ce dernier point est diamétralement opposé à l'orthocentre sur l'hyperbole de Kiepert correspondante : c'est ce qu'on vérifie sans peine en remarquant que les coordonnées de l'orthocentre sont

$$x = \frac{A - B}{A}\xi, \quad y = -\frac{A - B}{B}\eta.$$

Peut-être devrait-on appeler *point de Lemoine associé à* M le pôle de MH par rapport à l'hyperbole de Kiepert correspondante. Ses coordonnées sont

$$x = \frac{A - B}{A + B}\xi, \quad y = -\frac{A - B}{A + B}\eta;$$

etc. Par exemple, si l'on remplace le barycentre par le point de Steiner, on doit remplacer l'ellipse de Steiner par l'hyperbole de Kiepert, — l'hyperbole de Kiepert par une autre hyperbole équilatère circonscrite, dont le centre est complémentaire du point de Tarry, — le point de Tarry par le point de Steiner, — le point de Steiner par le point de Tarry, — le point de Lemoine, par un point à l'infini, etc. etc.

Les avantages de la méthode qu'on vient d'exposer sont dûs à la liberté qu'on a de déplacer l'origine et d'orienter les axes de manière à pouvoir utiliser, dans les calculs, toutes les simplifications qui dérivent de la relation $C = 0$. Il faut cependant renoncer au dernier avantage dans les questions de Géométrie infinitésimale, où il importe de diriger les axes suivant la tangente et la normale à la trajectoire de l'origine. On sait que les dérivées des coordonnées de tout point fixe, par rapport au chemin s de l'origine, sont

$$x' = \frac{y - \rho}{\rho}, \quad y' = -\frac{x}{\rho},$$

ρ étant le rayon de courbure. On obtient donc, en dérivant (2),

$$\frac{\mu_1'}{y_2 - y_3} = \frac{\mu_2'}{y_3 - y_1} = \frac{\mu_3'}{y_1 - y_2} = \frac{1}{2\sigma};$$

puis, en utilisant (5),

$$\frac{d}{ds}(AB - C^2) = 3(Bx_0 - Cy_0). \tag{21}$$

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de trouver la trajectoire d'un point, *animé d'une vitesse constamment parallèle à sa polaire trilinéaire.* L'équation de la polaire trilinéaire de M est

$$(Bx_0 - Cy_0)x + (Ay_0 - Cx_0)y + AB - C^2 = 0. \tag{22}$$

Il faut que $Bx_0 - Cy_0$ soit nul, et, par suite, que $AB - C^2$ soit constant. Donc, d'après l'identité (6), ***les trajectoires cherchées sont les cubiques représentées par l'équation*** $\mu_1\mu_2\mu_3 = const.$ De même, si l'on veut considérer une courbe ***dont chaque point est sur la polaire trilinéaire du centre de courbure correspondant,*** on peut prendre la développée pour ligne fondamentale, et il faut alors que l'équation (22) soit vérifiée pour $x = -s$, $y = 0$. Par suite, en vertu de la relation (21),

$$\frac{d}{ds}\log(AB - C^2) = \frac{3}{s},$$

d'où

$$\mu_1\mu_2\mu_3 = \left(\frac{s}{a}\right)^3.$$

Les lignes cherchées sont donc des développantes de courbes, dont l'***arc varie proportionnellement à la moyenne géométrique des coordonnées barycentriques du point décrivant.***

Supposons, pour finir, qu'on veuille étudier la correspondance entre une ligne quelconque (M) et sa transformée par polarité trilinéaire, c'est-à-dire l'enveloppe (N) de la polaire trilinéaire de M. La dérivation de (8) donne

$$\frac{\nu_1}{\mu_1^2}(y_2 - y_3) + \frac{\nu_2}{\mu_2^2}(y_3 - y_1) + \frac{\nu_3}{\mu_3^2}(y_1 - y_2) = 0.$$

On déduit de là, et de (8),

$$\frac{\nu_1}{\mu_1^2 y_1} = \frac{\nu_2}{\mu_2^2 y_2} = \frac{\nu_3}{\mu_3^2 y_3} = \frac{1}{h},$$

en désignant par h la somme $\mu_1^2 y_1 + \cdots$. Les coordonnées barycentriques de N sont donc proportionnelles aux carrés des coordonnées de M, et aux distances des sommets à la tangente à (M), en M. Par conséquent, les coordonnées cartésiennes du même point sont

$$x = \frac{1}{h}\Sigma\mu_i^2 x_i y_i, \quad y = \frac{1}{h}\Sigma\mu_i^2 y_i^2.$$

Si on leur applique les formules

$$\frac{\partial x}{ds} = x' - \frac{y - \rho}{\rho}, \quad \frac{\partial y}{ds} = y' + \frac{x}{\rho},$$

qui donnent les composantes δx, δy du déplacement de (x, y) dans le plan, ρ étant le rayon de courbure, on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{\delta x}{ds} = \dfrac{3(Ay_0 - Cx_0)}{2\sigma^2 h^2}\left[y_1y_2y_3 + \dfrac{AB - C^2}{2\rho}\right], \\ \dfrac{\delta y}{ds} = \dfrac{3(Cy_0 - Bx_0)}{2\sigma^2 h^2}\left[y_1y_2y_3 + \dfrac{AB - C^2}{2\rho}\right]. \end{cases}$$

On a vu que, lorsque (M) est une conique circonscrite, (N) se réduit à un point, de sorte que δx et δy doivent être constamment nuls. Il en résulte que la courbure des coniques circonscrites satisfait à la relation

$$2\rho y_1y_2y_3 + AB - C^2 = 0.$$

En particulier pour toute hyperbole équilatère on a, à l'orthocentre, $A = 2\rho\eta$, η étant la distance du centre à la tangente. Nous laissons au lecteur le soin d'interpréter géométriquement ces relations. Il nous suffit d'avoir montré, dans cet article comme dans d'autres(*), que l'emploi simultané des coordonnées barycentriques et des coordonnées cartésiennes, prises par rapport à des axes mobiles, permet d'atteindre rapidement certains résultats, qui ne se présentent pas aussi naturellement à celui qui les cherche par les méthodes ordinaires.

SURFACE ET VOLUME DU TORE;

par M. l'abbé E. Gelin, professeur au Collège Saint-Quirin, à Huy.

1. On appelle **tore**, ou **anneau rond**, *le corps engendré par un cercle tournant autour d'un axe extérieur, situé dans son plan.*

Il semble que la mesure de la surface et du volume de ce corps devrait faire partie de l'enseignement élémentaire de la géométrie, au même titre que la mesure de la surface et du volume du cylindre, du cône et de la sphère. L'omission n'est peut-être due qu'à l'absence d'une démonstration indépendante de la théorie du *centre des moyennes distances* et du *théorème de Guldin*, lesquels ne font pas, jusqu'ici, partie de l'enseignement mathématique élémentaire.

Nous nous proposons, dans cette Note, d'exposer la mesure de la sur-

(*) « *Remarques sur la trisectrice du triangle* » (Nouv. Ann. de Math., 1887). « *Sur la pentatomie triangulaire* » (ibid., 1888).

face et du volume du tore par un procédé analogue à celui qui sert à établir la mesure de la surface et du volume de la sphère, c'est-à-dire en partant du polygone régulier tournant autour d'un axe extérieur, situé dans son plan.

Nous établirons d'abord plusieurs théorèmes connus, mais qui ne font pas partie du texte des *Éléments de Géométrie* de Legendre.

2. Théorème I. *Lorsqu'une droite* AB *est partagée en deux segments* AC, BC, *proportionnels à* m *et* n, *si, des points* A, B, C, *on abaisse, sur un axe quelconque* XY, *situé dans le même plan que la droite, les perpendiculaires* AA', BB', CC', *on a*

$$(m+n)\,CC' = m.BB' + n.AA'. \qquad (1)$$

Menons la diagonale AB', qui coupe CC' en D. Les triangles semblables ACD et ABB', B'C'D et AA'B' donnent

$$\frac{CD}{BB'} = \frac{AC}{AB} = \frac{m}{m+n}, \quad \frac{DC'}{AA'} = \frac{B'C'}{A'B'} = \frac{BC}{AB} = \frac{n}{m+n},$$

d'où

$$(m+n)\,CD = m.BB', \quad (m+n)\,DC' = n.AA',$$

et, en ajoutant, la relation (1).

3. Théorème II. *Les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point, appelé* centre de gravité *du triangle. Ce point est situé aux deux tiers de chaque médiane, à partir du sommet correspondant. Sa distance à un axe quelconque, situé dans le plan du triangle, est la moyenne arithmétique des distances des trois sommets au même axe.*

Soit le triangle ABC. Menons les médianes AM et BN, qui se coupent au point G, et tirons MN. Cette droite MN est parallèle à AB et égale à la moitié de AB. Dès lors, les triangles semblables ABG, MNG donnent

$$\frac{MG}{AG} = \frac{NG}{BG} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Donc les médianes du triangle ABC se coupent mutuellement dans le rapport de 1 à 2, et, par suite, en un même point, appelé *centre de gravité* du triangle.

Soit maintenant XY un axe quelconque, situé dans le plan du triangle. Abaissons, sur cet axe, les perpendiculaires AA', BB', CC', MM', GG'. On a (2)

$$3GG' = AA' + 2MM', \quad 2MM' = BB' + CC',$$

d'où, en ajoutant

$$3GG' = AA' + BB' + CC', \quad \text{ou} \quad GG' = \frac{AA' + BB' + CC'}{3}.$$

4. Théorème III. *Si, des sommets d'un polygone régulier de* n *côtés, on abaisse des perpendiculaires sur un axe extérieur, situé dans son plan, la somme de ces perpendiculaires est égale à* n *fois la perpendiculaire abaissée du centre du polygone sur le même axe.*

1° *Le nombre des côtés du polygone régulier est pair.* Soit l'hexagone régulier ABCDEF. Abaissons, du centre O et des sommets A, B, C, D, E, F, les perpendiculaires OO', AA', BB', CC', DD', EE', FF' sur l'axe XY. On a

$$AA' + DD' = 2OO', \quad BB' + EE' = 2OO', \quad CC' + FF' = 2OO',$$

d'où, en ajoutant,

$$AA' + BB' + CC' + DD' + EE' + FF' = 6\,OO'.$$

2° *Le nombre des côtés du polygone régulier est impair.* Soit le pentagone régulier ABCDE. Abaissons, du centre O et des sommets A, B, C, D, E, les perpendiculaires OO', AA', BB', CC', DD', EE' sur l'axe XY. Joignons le sommet A au milieu M du côté opposé CD, et abaissons la perpendiculaire MM' sur XY. En posant OA = R, OM = r, on a (2)

$$(R + r)\,OO' = R.MM' + r.AA', \quad 2MM' = CC' + DD',$$

d'où

$$(R + r)\,OO' = R.\frac{CC' + DD'}{2} + r.AA'.$$

On a, de même,

$$(R+r)OO' = R.\frac{DD'+EE'}{2} + r.BB', \quad (R+r)OO' = R.\frac{EE'+AA'}{2} + r.CC',$$

$$(R+r)OO' = R.\frac{AA'+BB'}{2} + r.DD', \quad (R+r)OO' = R.\frac{BB'+CC'}{2} + r.EE'.$$

Ajoutant, on a

$$AA' + BB' + CC' + DD' + EE' = 5.OO'.$$

5. Théorème IV. *La surface engendrée par un polygone régulier tournant autour d'un axe extérieur, situé dans son plan, a pour mesure le périmètre du polygone multiplié par la circonférence décrite par son centre.*

Soit un polygone régulier ABCD ... L, d'un nombre n de côtés, tournant autour d'un axe extérieur XY situé dans son plan. On a, en dési-

gnant par a le côté du polygone, et en remarquant que chaque côté décrit la surface latérale d'un tronc de cône,

$$\text{surf. AB} = \pi a(\text{AA}' + \text{BB}'), \quad \text{surf. BC} = \pi a(\text{BB}' + \text{CC}'),$$
$$\text{surf. CD} = \pi a(\text{CC}' + \text{DD}'), \quad \ldots \quad \text{surf. LA} = \pi a(\text{LL}' + \text{AA}'),$$

d'où, en ajoutant,

$$\text{surf. ABCD} \ldots \text{L} = 2\pi a(\text{AA}' + \text{BB}' + \text{CC}' + \cdots + \text{LL}'),$$

ou (4)

$$\text{S} = 2\pi a \,.\, n\text{OO}' = na \,.\, 2\pi\text{OO}'.$$

6. Corollaire I. La surface engendrée par un polygone régulier tournant autour de l'un de ses côtés a pour mesure $\text{S} = 2n\pi ar$, n désignant le nombre des côtés, a et r le côté et l'apothème du polygone.

7. Corollaire II. La surface engendrée par un polygone régulier tournant autour de la tangente menée par l'un de ses sommets au cercle circonscrit a pour mesure $\text{S} = 2n\pi a\text{R}$, n désignant le nombre des côtés, a et R le côté et le rayon du polygone.

8. Théorème V. *La surface du tore a pour mesure la circonférence du cercle générateur, multipliée par la circonférence décrite par le centre de ce cercle.*

Pour le démontrer, on inscrit, au cercle générateur, un polygone régulier, d'un nombre de côtés indéfiniment croissant. L'aire de la surface engendrée par ce polygone est égale à son périmètre, multiplié par la circonférence décrite par son centre (5). Passant à la limite, on aura, pour la surface du tore,

$$\text{S} = 2\pi r \,.\, 2\pi l = 4\pi^2 rl,$$

r désignant le rayon du cercle générateur, et l la distance du centre de ce cercle à l'axe.

9. Théorème VI. *Si, des centres de gravité* G, E, F *de trois triangles* ABC, ABD, ACD, *dont le premier est la somme des deux autres, on abaisse, sur un axe quelconque* XY, *situé dans le plan de ces triangles, les perpendiculaires* GG′, EE′, FF′, *on a*

$$\text{ABC} \,.\, \text{GG}' = \text{ABD} \,.\, \text{EE}' + \text{ACD} \,.\, \text{FF}'.$$

Abaissons, des sommets A, B, C, D les perpendiculaires $\text{AA}' = \alpha$, $\text{BB}' = \beta$, $\text{CC}' = \gamma$, $\text{DD}' = \delta$ sur l'axe XY. On a (2)

$$(\text{BD} + \text{CD})\,\delta = \text{BD} \,.\, \gamma + \text{CD} \,.\, \beta,$$

ou, en observant que les triangles ABD, ACD sont proportionnels à leurs bases BD, CD,

$$(\mathrm{ABD} + \mathrm{ACD})\,\delta = \mathrm{ABD}.\gamma + \mathrm{ACD}.\beta$$

ou

$$\mathrm{ABD}\,(\delta - \gamma) = \mathrm{ACD}\,(\beta - \delta).$$

Mais (3)

$$\delta - \gamma = (\alpha + \beta + \delta) - (\alpha + \beta + \gamma) = 3\,(\mathrm{EE'} - \mathrm{GG'}),$$
$$\beta - \delta = (\alpha + \beta + \gamma) - (\alpha + \gamma + \delta) = 3\,(\mathrm{GG'} - \mathrm{FF'}).$$

Donc

$$\mathrm{ABD}.(\mathrm{EE'} - \mathrm{GG'}) = \mathrm{ACD}\,(\mathrm{GG'} - \mathrm{FF'}),$$

ou

$$\mathrm{ABDEE'} + \mathrm{ACD}.\mathrm{FF'} = \mathrm{ABC}.\mathrm{GG'}\,(*).$$

10. Théorème VII. *Le volume du corps engendré par un triangle* ABC *tournant autour d'un axe extérieur* XY, *situé dans son plan, a pour mesure l'aire de ce triangle, multipliée par la circonférence décrite par son centre de gravité.*

Abaissons, des sommets du triangle, les perpendiculaires $\mathrm{AA'} = \alpha$, $\mathrm{BB'} = \beta$, $\mathrm{CC'} = \gamma$ sur l'axe XY. Le volume engendré par le triangle ABC est égal à la somme des volumes des troncs de cône engendrés par les trapèzes ABB'A', ACC'A', diminuée du volume du tronc de cône engendré par le trapèze BCC'B'. On a donc successivement :

$$\begin{aligned}
\text{vol. ABC} &= \text{vol. ABB'A'} + \text{vol. ACC'A'} - \text{vol. BCC'B} \\
&= \tfrac{1}{3}\pi\,(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)\,\mathrm{A'B'} + \tfrac{1}{3}\pi\,(\alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2)\,\mathrm{A'C'} \\
&\quad - \tfrac{1}{3}\pi\,(\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2)\,(\mathrm{A'B'} + \mathrm{A'C'}) \\
&= \tfrac{1}{3}\pi\,[(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) - (\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2)]\,\mathrm{A'B'} \\
&\quad + \tfrac{1}{3}\pi\,[\alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2) - (\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2)]\,\mathrm{A'C'} \\
&= \tfrac{1}{3}\pi\,(\alpha^2 + \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma^2)\,\mathrm{A'B'} + \tfrac{1}{3}\pi\,(\alpha^2 + \alpha\gamma - \beta^2 - \beta\gamma)\,\mathrm{A'C'} \\
&= \tfrac{1}{3}\pi[(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)+\beta(\alpha-\gamma)]\mathrm{A'B'} + \tfrac{1}{3}\pi[(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)+\gamma(\alpha-\beta)]\mathrm{A'C'} \\
&= \tfrac{1}{3}\pi\,(\alpha+\beta+\gamma)\,(\alpha-\gamma)\,\mathrm{A'B'} + \tfrac{1}{3}\pi\,(\alpha+\beta+\gamma)\,(\alpha-\beta)\,\mathrm{A'C'} \\
&= 2\pi \cdot \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \cdot \frac{(\alpha-\gamma)\,\mathrm{A'B'} + (\alpha-\beta)\,\mathrm{A'C'}}{2}.
\end{aligned}$$

---

*) Les trois points G, E, F sont situés sur une même droite, parallèle à BC.

Or, le triangle ABC étant la somme des trapèzes ABB'A', ACC'A', diminuée du trapèze BCC'B', on a

$$\begin{aligned}\text{surf. ABC} &= \text{surf. ABB'A'} + \text{surf. ACC'A'} - \text{surf. BCC'B'}\\ &= \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,A'B' + \tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)\,A'C' - \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\,(A'B'+AC')\\ &= \tfrac{1}{2}[(\alpha+\beta)-(\beta+\gamma)]\,A'B' + \tfrac{1}{2}[(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)]\,A'C'\\ &= \frac{(\alpha-\gamma)\,A'B' + (\alpha-\beta)\,A'C'}{2}.\end{aligned}$$

D'autre part, en appelant G le centre de gravité du triangle, et GG' la perpendiculaire abaissée de ce point sur XY (3), on a

$$GG' = \tfrac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma).$$

Donc

$$\text{vol. ABC} = 2\pi GG'.\,ABC.$$

*11. On peut encore démontrer le même théorème de la manière suivante :

1° *L'axe* XY *coïncide avec le côté* BC *du triangle.* Menons la médiane AM, et soit G le centre de gravité du triangle. Abaissons les perpendiculaires AA' et GG' sur XY. On a

$$\text{vol. ABC} = \tfrac{1}{3}\pi\overline{AA'}^2.BC = \tfrac{1}{2}AA'.BC \times 2\pi.\tfrac{1}{3}AA' = ABC.2\pi GG'.$$

2° *L'axe* XY *passe par le sommet* A *du triangle et est parallèle au côté opposé* BC. Menons la médiane AM, et soit G le centre de gravité du triangle. Abaissons la perpendiculaire AA' sur BC, et les perpendiculaires BB', CC', MM', GG' sur XY. On a

$$\begin{aligned}\text{vol. ABC} &= \text{vol. BB'C'C} - \text{vol. ABB'} - \text{vol. ACC'} = \tfrac{2}{3}\pi\overline{AA'}^2.BC\\ &= \tfrac{1}{2}AA'.BC \times 2\pi\cdot\tfrac{2}{3}AA' = ABC.2\pi GG'.\end{aligned}$$

3° *L'axe* XY *passe par le sommet* A *du triangle et rencontre le côté opposé* BC *en* D. Soient G, E, F les centres de gravité des triangles ABC, ABD, ACD. Abaissons les perpendiculaires GG', EE', FF' sur XY. On a, d'après le premier cas,

$$\text{vol. ABC} = \text{vol. ABD} - \text{vol. ACD} = ABD.2\pi EE' - ACD.2\pi FF'.$$

Or (8)

$$ABD.EE' - ACD.FF' = ABC.GG'.$$

Donc

$$\text{vol. ABC} = ABC.2\pi GG'.$$

4° *L'axe* XY *est quelconque.* Prolongeons l'un des côtés du triangle, le côté BC, par exemple, jusqu'à sa rencontre en D avec l'axe XY, et

soient G, E, F les centres de gravité des triangles ABC, ABD, ACD. Abaissons les perpendiculaires GG', EE', FF' sur XY. On a, d'après le cas précédent,

$$\text{vol. ABC} = \text{vol. ABD} - \text{vol. ACD} = \text{ABD}.2\pi\text{EE}' - \text{ACD}.2\pi\text{FF}'.$$

Or (9)

$$\text{ABD}.\text{EE}' - \text{ACD}.\text{FF}' = \text{ABC}.\text{GG}'.$$

Donc

$$\text{vol. ABC} = \text{ABC}.2\pi\text{GG}'.$$

12. Théorème VIII. *Le volume du corps engendré par un polygone régulier tournant autour d'un axe extérieur, situé dans son plan, est égal à sa surface, multipliée par la circonférence décrite par son centre.*

Soit un polygone régulier ABCD ... L, d'un nombre n de côtés, tournant autour d'un axe extérieur XY situé dans son plan. Menons, du centre O, des rayons à tous les sommets, et des apothèmes aux milieux de tous les côtés. Soient P, Q, R, ... Z les centres de gravité des triangles AOB, BOC, COD, ... LOA, ou les points qui divisent les apothèmes dans le rapport de 2 à 1. Abaissons les perpendiculaires PP', QQ', RR', ... ZZ' sur l'axe XY. On a, en désignant par α la surface de chacun des triangles AOB, BOC, COD, ... LOA (10),

$$\text{vol. AOB} = \alpha.2\pi\text{PP}', \quad \text{vol. BOC} = \alpha.2\pi\text{QQ}',$$
$$\text{vol. COD} = \alpha.2\pi\text{RR}', \ \ldots \text{ vol LOA} = \alpha.2\pi\text{ZZ}',$$

d'où, en ajoutant,

$$\text{vol. ABCD} \ldots \text{L} = \alpha.2\pi(\text{PP}' + \text{QQ}' + \text{RR}' + \cdots + \text{ZZ}'),$$

ou, en observant que P, Q, R, .. Z sont les sommets d'un nouveau polygone régulier de n côtés et de centre O (4),

$$\text{vol. ABCD} \ldots \text{L} = \alpha.2\pi n\text{OO}' = n\alpha.2\pi\text{OO}'.$$

13. Corollaire I. Le volume engendré par un polygone régulier tournant autour de l'un de ses côtés a pour expression $V = n\pi ar^2$, n désignant le nombre des côtés, a et r le côté et l'apothème du polygone.

14. Corollaire II. Le volume engendré par un polygone régulier tournant autour de la tangente menée par l'un de ses sommets au cercle circonscrit a pour expression $V = n\pi aR r$, n désignant le nombre des côtés, a, R et r le côté, le rayon et l'apothème du polygone.

15. Théorème IX. *Le volume du tore est égal à la surface du*

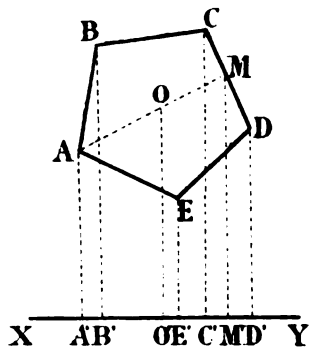


Fig. 4.

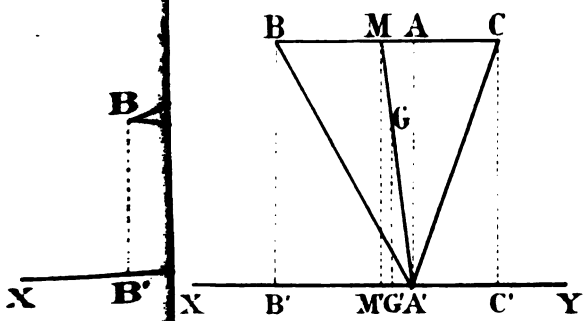
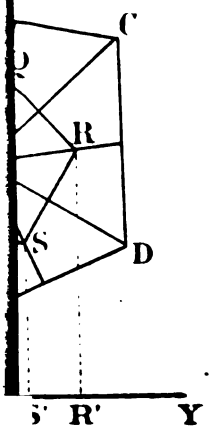


Fig. 8.



1.

a ou n'a pas de solution positive (*). La question est donc ramenée à celle-ci :

« *Le nombre entier c étant inférieur au produit ab, dans quel cas* « *l'équation* (1) *admet elle une solution en nombres entiers?* (**) »

2. Le *criterium* proposé par M. Lucas est *exact*, mais à peu près *illusoire*, à cause des calculs qu'il exige. Prenons, comme exemple, l'équation

$$47x + 31y = 875,$$

laquelle satisfait à toutes les conditions indiquées ci-dessus. En employant les notations de M. Lucas, on a d'abord :

$$a = 47, \quad b = 31, \quad r = 875.$$

Ensuite :

$$\frac{47}{31} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{15}}}, \qquad \frac{\alpha}{\beta} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1}} = \frac{3}{2};$$

donc

$$\alpha = 3, \quad \beta = 2, \quad n = 4.$$

La formule

$$t = (-1)^{n-1} \frac{a\alpha + b\beta}{a^2 + b^2} r \text{ (***)}$$

donne

$$t = -\frac{47.3 + 31.2}{47^2 + 31^2} \cdot 875 = -\frac{141 + 62}{2209 + 961} \cdot 875$$

$$= -\frac{203}{3170} \cdot 875 = -\frac{203}{634} \cdot 175 = -\frac{35\,525}{634}.$$

La fraction, prise positivement, est comprise entre 56 et 57. Donc

$$t > -57, \quad t < -56; \quad t_1 = -57, \quad t_2 = -56.$$

Les équations

$$(-1)^{n-1} (a\alpha + b\beta) r = t_1 (a^2 + b^2) + \rho_1,$$
$$(-1)^{n-1} (a\alpha + b\beta) r = t_2 (a^2 + b^2) - \rho_2 \text{ (IV)},$$

(*) *Mélanges mathématiques*, tome I, p. 25.

(**) Dans ce qui va suivre, nous supposerons 1° $a > 1$, $b > 1$; 2° c premier avec a et avec b; 3° $c > a + b$.

Si les deux dernières hypothèses n'étaient pas vérifiées, l'équation (1) pourrait être simplifiée; ou elle serait impossible; ou enfin, on aurait $x = 1$, $y = 1$.

(***) *Mathesis*, p. 131.

(IV) *Loc. cit.*

se réduisent à

$$-203.875 = -57.3\,170 + \rho_1, \quad -203.875 = -56.3\,170 - \rho_2.$$

Il résulte, de celles-ci :

$$\rho_1 = 57.3\,170 - 203.875 = 180.690 - 177.625 = 3\,065,$$
$$\rho_2 = -56.3\,170 + 203.875 = 177.625 - 177.520 = 105(*).$$

Reste, enfin, à former les binômes,

$$ar - b\rho_1, \quad br - a\rho_2\,(**).$$

Le premier égale

$$47.875 - 31.3\,065 = 41.125 - 95.015 = -53.890.$$

Le second :

$$31.875 - 47.105 = 27.125 - 4\,935 = +22.190.$$

Ainsi, *la proposée admet une solution positive.*

3. Si l'on résout, directement, l'équation

$$47x + 31y = 875,$$

on a, par le procédé connu(***),

$$\frac{47 \mid 31 \mid 16 \mid 15 \mid 1}{875 \mid 7 \mid 7 \mid 7 \mid 0};$$

puis

$$\frac{7}{1} = 7, \quad \frac{7 - 16.7}{15} = -7, \quad x = \frac{7 + 31.7}{16} = 14,$$

$$7 = \frac{875 - 47.14}{31} = 7 \cdot \frac{125 - 94}{31} = 7.$$

4. On voit que le calcul direct est préférable à l'emploi du *criterium*(†).

Spa, 28 juin 1890.

(*) En observant que $\rho_1 + \rho_2 = a^2 + b^2$, on abrége, un peu, ce long calcul.

(**) A la p. 132, M. Lucas s'éxprime ainsi : « *pour que l'équation* $ax + by = r$ *soit* « *possible en nombres entiers, il faut et il suffit que l'un des nombres* $ar - b\rho_1$, « $br - a\rho_2$ *ne soit pas négatif.* » Probablement, le savant Professeur a voulu dire : « il faut et il suffit que les quantités $ar - b\rho_1$, $br - a\rho_1$ (supposées différentes de « zéro), *soient de signes contraires.* »

(***) Attribué à *Pilatte*, mais, peut-être, bien antérieur.

(†) En supposant $c = n(a+b) + c'$, $x = n - 1 + x'$, $y = n - 1 - y'$, on peut *réduire* l'équation proposée; mais cette transformation ne paraît pas simplifier le problème.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 203.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 23.)

Démontrer que

$$\frac{1}{1.2.4}C_{2,1}+\frac{1}{3.4.4^2}C_{4,2}+\frac{1}{5.6.4^3}C_{6,3}+\cdots=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots.$$

(E. Cesáro.)

Solution par M. W. Mantel. La somme de la série formant le second membre de l'équation proposée est $-\log 2+1$. Cherchons la somme de l'autre série. Posons

$$y=\frac{C_{2,1}}{1.2}x^3+\frac{C_{4,2}}{3.4}x^4+\frac{C_{6,3}}{5.6}x^5+\cdots \tag{1}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$y=x^3+\frac{1}{4}C_{2,1}x^4+\frac{1}{9}C_{4,2}x^6+\frac{1}{16}C_{6,3}x^8+\cdots. \tag{2}$$

Ces expressions suggèrent deux manières différentes d'employer la différentiation pour simplifier les coefficients. De (1), on déduit

$$y'=C_{2,1}+C_{4,2}x^2+C_{6,3}x^5+\cdots;$$

de même, on déduit de (2),

$$\frac{1}{4}y'+\frac{x}{4}y''=x+C_{2,1}x^3+C_{4,2}x^5+\cdots.$$

Il en résulte l'équation différentielle

$$(x-4x^2)y''+y'=4x;$$

d'où, en intégrant et déterminant convenablement les constantes :

$$y=\log\tfrac{1}{2}[1+\sqrt{(1-4x^2)}]-\sqrt{(1-4x^2)}+1. \tag{3}$$

La démonstration suppose la convergence uniforme des séries, ce qui exige $x^2<\frac{1}{4}$; le résultat subsiste pour $x^2=\frac{1}{4}$ parce que les expressions (1) et (3) restent continues pour cette valeur.

En substituant $x^2=\frac{1}{4}$ dans (2) et dans (3) on obtient pour la somme de la série proposée $-\log 2+1$.

Question 290.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 247.)

Un cadre rectangulaire ABCD ***est suspendu contre un mur au moyen d'une corde qui passe sur un clou et dont les extrémités sont attachées aux deux sommets*** A ***et*** B. ***Lorsque la corde vient à glisser sur le clou, quelles sont les courbes décrites par les sommets du cadre? On suppose le centre de gravité du cadre à l'intersection des diagonales, et le poids de la corde négligeable.*** (H. Limbourg.)

Solution par M. Brocard. Soit O le clou; ABCD, la position *initiale* du cadre, lorsque les bords AB, CD sont horizontaux; A'B'C'D', une position *quelconque* du cadre. Les centres M, M' des rectangles ABCD, A'B'C'D' se trouvent sur la verticale OX.

Posons $OA' = \rho$, $OB' = r$, *angle* $A'OX = \theta$, $B'OX = \omega$, $AB = 2a$, $AD = 2b$, et soient $2l$ la longueur de la corde, P et Q les projections de A' et B' sur OX, u l'angle B'A'P. On trouve facilement les équations

$$\rho + r = 2l, \quad 4a^2 = \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta + \omega), \tag{1}$$

$$\rho \sin\theta = a\cos u + b \sin u, \quad r \sin\omega = a\cos u - b \sin u. \tag{2}$$

Il y a à éliminer ρ, ω, u ou r, θ, u entre ces quatre équations, pour avoir, respectivement, l'équation du lieu de A ou de B.

Dans le cas général, les calculs sont assez longs. Voici deux hypothèses particulières où ils se simplifient :

a) Le cadre se réduit à une tige pesante, c'est-à-dire $b = 0$. On se trouve dans les mêmes conditions, si l'on attache la corde à deux sommets opposés A, C d'un cadre de dimensions finies.

Les équations (2) sont remplacées par celle-ci : $\rho \sin\theta = r \sin\omega$, et le lieu de A ou B est représenté par

$$\rho^2 \cos^2\theta\,[(2l-\rho)^2 - \rho^2 \sin^2\theta] = [2a^2 - 2l^2 + 2l\rho - \rho^2(1+\sin^2\theta)]^2.$$

b) La corde est supposée appliquée contre le bord AB, ou $l = 2a$. Soit E le milieu de AB. La courbe décrite par ce point peut être définie ainsi : Le centre M d'un cercle, de rayon constant b, parcourt la droite OX; de O, on mène une tangente OE; lieu du point de contact E. Si l'on fait *angle* $EOM = \theta$, l'équation de ce lieu est $\rho = b \cot\theta$. Comme $EA = EB = a$, les points A, B décrivent des conchoïdes du lieu (E).

La recherche des lieux des points C, D conduit à des calculs très compliqués.

NOTES. Voici une autre méthode. Transportons la figure A'OB'C'D', supposée rigide, de manière à faire coïncider A'B'C'D' avec ABCD. Soit AO'B la nouvelle position du triangle A'OB'. Le point O' se trouve sur l'ellipse qui a pour foyers les points A, B et pour grand axe $2l$. Soient N, N' des deux positions occupées par un même point invariablement lié au cadre, lorsque celui-ci se trouve en ABCD ou A'B'C'D'.

Désignons par OY une perpendiculaire à OX, par O'Y' une perpendiculaire à O'M; les coordonnées (X, Y) de N' par rapport aux axes OX, OY, sont évidemment égales aux perpendiculaires abaissées de N sur O'Y', O'M. Posons $\sqrt{l^2 - a^2} = d$; l'ellipse, rapportée à ses axes principaux, a pour équation $l^2y^2 + d^2x^2 = l^2d^2$, et les coordonnées de O' peuvent être représentées par $l\cos\varphi$, $d\sin\varphi$. Les équations de O'M, O'Y' par rapport aux axes AB, OM sont

$$y - d\sin\varphi = \frac{d\sin\varphi + b}{l\cos\varphi}(x - l\cos\varphi),$$

$$y - d\sin\varphi = -\frac{l\cos\varphi}{d\sin\varphi + b}(x - l\cos\varphi).$$

Les coordonnées de N par rapport aux mêmes axes AB, OM étant désignées par x, y, nous avons

$$Y = \frac{(y - d\sin\varphi)\,l\cos\varphi - (d\sin\varphi + b)(x - l\cos\varphi)}{\sqrt{l^2\cos^2\varphi + (d\sin\varphi + b)^2}},$$

$$X = \frac{(y - d\sin\varphi)(d\sin\varphi + b) + l\cos\varphi\,(x - l\cos\varphi)}{\sqrt{l^2\cos^2\varphi + (d\sin\varphi + b)^2}}.$$

Pour avoir l'équation du lieu décrit par N, il reste à éliminer φ entre les égalités précédentes. On simplifie les calculs en substituant à ces égalités les suivantes :

(A) $$Y^2 + X^2 = (y - d\sin\varphi)^2 + (x - l\cos\varphi)^2,$$

(B) $$\frac{Y}{X} = \frac{(y + b)\,l\cos\varphi - xd\sin\varphi - bx}{(y - b)\,d\sin\varphi + xl\cos\varphi - (d^2\sin^2\varphi + l^2\cos^2\varphi) + by},$$

qu'on peut établir directement. L'équation (B), si l'on y remplace la quantité $d^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi$ par sa valeur tirée de (A) prend la forme

$$M\cos\varphi + N\sin\varphi = P,$$

d'où

$$\cos\varphi = \frac{MP + N\sqrt{M^2 + N^2 - P^2}}{M^2 + N^2}, \quad \sin\varphi = \frac{NP - M\sqrt{M^2 + N^2 - P^2}}{M^2 + N^2},$$

valeurs que l'on portera dans (A).

Fixons au cadre ABCD un anneau ayant la forme d'une ellipse dont les foyers sont A et B, et dont le grand axe égale $2l$.

Si cet anneau, supposé sans poids, peut glisser sur le clou O, le mouvement du cadre est absolument le même que lorsqu'il est attaché à la corde. Donc le centre instantané de rotation du cadre, dans la position A'B'C'D', est à l'intersection des normales menées en M' à OX, et en O à l'anneau elliptique; la seconde de ces droites est la bissectrice de l'angle A'OB'. De là un moyen de déterminer la tangente à la trajectoire d'un point invariablement lié au cadre. (J. N.)

Question 391.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 247.)

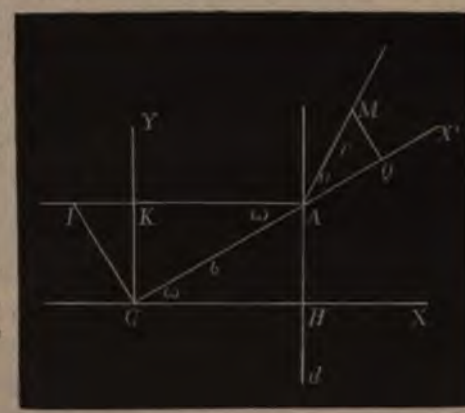
Un plan P' *se déplace sur un plan fixe* P, *de manière qu'un point déterminé* A *de* P' *parcourre une droite* d *donnée dans le plan* P, *et qu'une droite déterminée* B *menée par* A *dans le plan* P' *s'appuie sur un point* C *donné dans le plan* P. *Trouver* 1° *les lieux décrits par le centre instantané de rotation dans les deux plans;* 2° *les trajectoires des points et les enveloppes des droites du plan mobile.* (J. Neuberg.)

Solution par M. Meurice. 1° Soit I le centre instantané de rotation; ce point est à l'intersection des perpendiculaires élevées en C sur b, et en A sur d. Menons CHX perpendiculaire à d, CKY parallèle à d, et soit $CH = 2p$. Comme

$$\overline{CK}^2 = IK \cdot KA,$$

le lieu de I dans le plan P, rapporté aux axes CX, CY, est la parabole représentée par l'équation

$$y^2 = -2px.$$



Dans le plan mobile P', prenons pour origine le point A, pour axe polaire ou axe des abscisses la droite b. Si l'on fait

$$AI = \rho, \quad \text{angle } IAC = ACH = \omega,$$

on trouve pour l'équation du lieu de I dans le plan P′ :

$$\rho = \frac{AC}{\cos\omega} = \frac{a}{\cos^2\omega}, \quad x^4 = a^2(x^2 + y^2).$$

L'inverse de cette courbe par rapport au point A a pour équation

$$\rho = a\cos^2\omega = \frac{a}{2}\cos 2\omega + \frac{a}{2}$$

c'est donc une conchoïde de la courbe représentée par

$$\rho = \frac{a}{2}\cos 2\omega.$$

Cette dernière ligne est une podaire d'épicycloïde par rapport au centre du cercle fixe.

2° Les points de la droite b décrivent des conchoïdes de la droite d par rapport au pôle C.

Soient M un point quelconque du plan P′, Q sa projection sur b, (r, u) ses coordonnées polaires dans le plan P′, (x, y) ses coordonnées par rapport aux axes CX, CY. En projetant le contour CAM sur CX et sur CY, on trouve

$$x = 2p + r\cos(\omega + u), \quad y = 2p\,\text{tang}\,\omega + r\sin(\omega + u),$$

d'où, en éliminant l'angle variable ACH $= \omega$:

$$(x - 2p)^2(x^2 + y^2) - 2r^2\sin u\,(x\sin u + y\cos u)(x - 2p) - r^2(y\sin u - x\cos u)^2 + r^4 = 0.$$

La droite AM roule sur une parabole qui a pour foyer C et touche d ; la courbe décrite par M est une conchoïdale de d par rapport à cette parabole. On peut aussi rapporter le lieu de M à la conchoïde droite par le point Q.

3° Nous venons de voir que les droites menées dans le plan P′ par A enveloppent des paraboles. Les droites parallèles à b enveloppent des circonférences ayant pour centre C. Enfin toute autre droite m de P′ enveloppe une antipodaire de conchoïde; car elle fait avec b un angle constant et rencontre b en un point qui a pour trajectoire une conchoïde de Nicomède. L'enveloppe de m peut aussi être considérée comme une courbe parallèle à la parabole qui est l'enveloppe de la parallèle menée à m par A.

Question 457.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 192.)

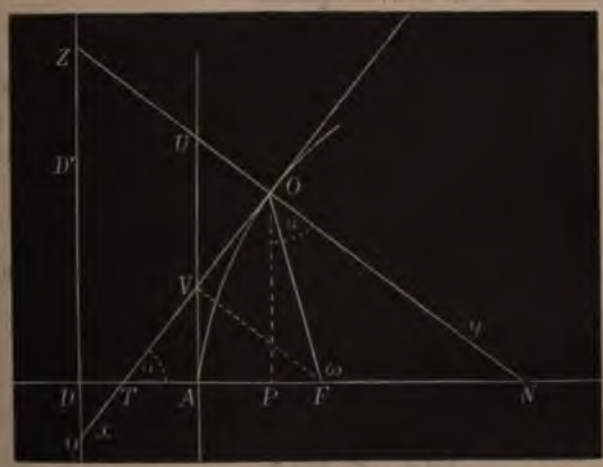
Une parabole de grandeur invariable touche une droite donnée OX *en un point fixe* O. *Trouver* 1° *les lieux décrits par le foyer* F, *le sommet* A *et la projection* P *de* O *sur l'axe*; 2° *les enveloppes de l'axe* AP, *de la tangente* AV *au sommet et de la directrice* DD'.

Solution par M. Pisani. 1° *a*) L'équation de la parabole, en coordonnées polaires, est

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos\omega}. \qquad (1)$$

On peut supposer $\rho = FO$, $\omega = OFP$; or, les coordonnées polaires de F par rapport à l'axe OX et l'origine O, étant $r = \rho$, $u = \frac{1}{2}\omega$, on tire, de l'égalité (1), pour l'équation du lieu de F,

$$r = \frac{p}{1 - \cos 2u} = \frac{p}{2\cos^2 u}.$$



b) ON étant la normale terminée à l'axe AF de la parabole, le triangle OPN donne OP = PN tg PNO; d'où l'équation du lieu de P :

$$r = p \operatorname{tg} u.$$

c) Soient AP = α, OP = β les coordonnées de O par rapport aux axes AP, AV; les équations de OT, ON seront

$$y\beta = p(x + \alpha), \quad y - \beta = -\frac{\beta}{p}(x - \alpha).$$

D'où l'on conclut les coordonnées (X, Y) de A par rapport à OV, ON :

$$Y = \frac{p\alpha}{\sqrt{\beta^2 + p^2}}, \quad X = \frac{\beta(p+\alpha)}{\sqrt{\beta^2+p^2}}. \tag{2}$$

L'équation du lieu du sommet de la parabole mobile s'obtient en éliminant α, β entre les formules (2) et la relation $\beta^2 = 2p\alpha$. On trouve, d'abord, en remplaçant β^2 par $2p\alpha$ et divisant les équations (2) l'une par l'autre :

$$p\alpha^2 - 2\alpha Y^2 - pY^2 = 0, \quad 2Y^2\alpha^2 + p(4Y^2 - X^2)\alpha + 2Y^2p^2 = 0.$$

Si l'on élimine maintenant α, il vient

$$4Y^2(Y^2+p^2)^2 + X^2(4X^2Y^2 + 4Y^2p^2 - p^2X^2) = 0.$$

2° *a*) Si φ désigne l'angle OTP = PON, on a

$$ON = \frac{NP}{\sin\varphi} = \frac{p}{\sin\varphi}, \quad OT = ON\cot\varphi = \frac{p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}. \tag{3}$$

En éliminant φ, on trouve l'équation

$$p^2.(\overline{ON}^2 + \overline{OT}^2) = \overline{ON}^4,$$

dont une démonstration plus simple s'aperçoit immédiatement et que l'on peut considérer comme caractérisant l'enveloppe de l'axe de la parabole mobile. Des formules (3), on déduit l'équation de AP par rapport aux axes OV, ON :

$$x\sin^2\varphi + y\sin\varphi\cos\varphi = p\cos\varphi. \tag{4}$$

L'application de la règle des enveloppes ne donne pas de résultat assez simple.

b) On a

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{\beta} = \sqrt{\frac{p}{2x}}, \quad AP = x = \frac{1}{2}p\cot^2\varphi,$$

$$OV = \frac{AP}{\cos\varphi} = \frac{1}{2}p\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}, \quad OU = OV\cot\varphi. \tag{5}$$

Si l'on élimine φ entre les équations (5), on trouve la relation

$$\overline{OV}^6 = \tfrac{1}{4}p^2 \cdot OU^2(\overline{OU}^2 + \overline{OV}^2),$$

pour caractériser l'enveloppe de la droite AV.

L'équation de la droite AV étant

$$x\cos\varphi - y\sin\varphi = \tfrac{1}{2}p\cot^2\varphi,$$

on pourrait éliminer φ entre l'équation (6) et sa dérivée par rapport à φ.

c) Si la directrice rencontre Ox, Oy aux points Q, Z, on a

$$OQ = \left(\frac{p}{2} + \alpha\right) \sec \alpha = \frac{p}{2 \sin^2 \alpha \cos \alpha}, \quad OZ = OQ \cot \alpha = \frac{p}{2 \sin^2 \alpha};$$

d'où l'équation de cette droite :

$$x \sin^2 \alpha \cos \alpha - y \sin^3 \alpha = \tfrac{1}{2} p, \text{ etc.}$$

Autre solution par M. DÉPREZ.

L'axe de la parabole se meut de manière que la projection du segment ON sur cette droite ait une longueur constante. Les coordonnées du point où il touche son enveloppe sont

$$x = -\frac{p \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = -OT \cos^2 \alpha, \quad y = \frac{p(1 + \cos^2 \alpha)}{\sin \alpha} = ON + ON \cos^2 \alpha;$$

d'où une construction de ce point. On peut suivre la même méthode pour les enveloppes des droites AV et DD'. (J. N.)

Question 652.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 152.)

Soient A ***un point quelconque pris dans le plan d'une ellipse*** ε; B, C ***les points de contact des tangentes issues de*** A. 1° ***Démontrer que l'orthocentre du triangle*** ABC ***et le point*** A ***sont conjugués harmoniques par rapport au cercle de Monge*** (cercle circonscrit au rectangle des axes). 2° ***Examiner le cas particulier où le point*** A ***est situé sur*** E, ***et démontrer le théorème suivant :***

La normale en un point A ***d'une ellipse*** E ***rencontrant le cercle de Monge aux points*** P ***et*** Q, ***le centre de courbure correspondant est le symétrique, par rapport à*** A, ***du conjugué harmonique de ce point relativement au segment*** PQ. (G. DE LONGCHAMPS.)

Solution par M. JAMET, ***professeur au lycée de Marseille.*** 1° Soient (x_1, y_1) (x_2, y_2) les coordonnées des points B, C; les équations des tangentes BA, CA et celles des hauteurs BH, CH sont

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1, \quad \frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

$$a^2 y_2 (x - x_1) - b^2 x_2 (y - y_1) = 0, \quad a^2 y_1 (x - x_2) - b^2 x_1 (y - y_2) = 0. \tag{2}$$

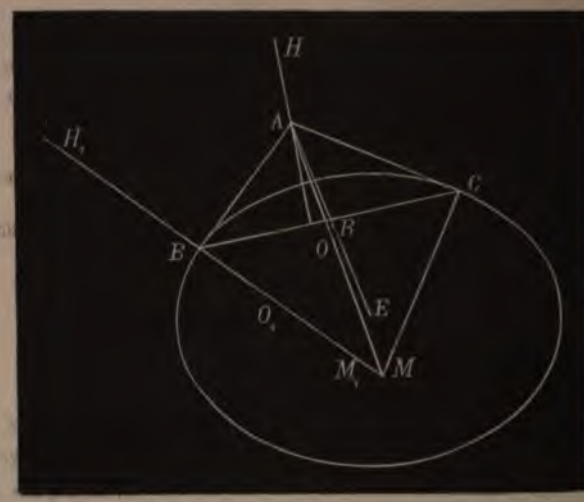
Les coordonnées (x, y) du point A, intersection des droites (1), sont

$$x = \frac{a^2 (y_2 - y_1)}{x_1 y_2 - x_2 y_1}, \quad y = \frac{b^2 (x_1 - x_2)}{x_1 y_2 - x_2 y_1}.$$

La polaire de ce point par rapport au cercle de Monge est donc représentée par

$$a^2(y_2 - y_1)x - b^2(x_2 - x_1)y - (a^2 + b^2)(x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

Comme on obtient la même équation en retranchant membre à membre les équations (2), la polaire passe par H.



2° Soit M le point de rencontre des normales menées en B et C; le centre O du cercle ABC se trouve au milieu de la droite AM et se projette sur BC au milieu R de cette corde. Si C tend à se confondre avec B, le segment AM tend à se confondre avec le rayon de courbure de E au point B; et le point O a pour limite le milieu O_1 du rayon de courbure BM_1. Mais la droite OR vient également se placer sur la normale BM, et l'on a

$$BM_1 = 2 \lim OR = \lim (2OR).$$

Si H est l'orthocentre du triangle ABC, on a $AH = 2OR$; donc $BM_1 = \lim AH$, et si l'on observe que la droite AH, sans cesse parallèle à OR, tend à se confondre avec le prolongement de BM vers l'extérieur de l'ellipse, on en conclura que le point H tend vers une position limite H_1, symétrique de M_1 par rapport à B. Enfin, les deux points A, H étant sans cesse conjugués par rapport au cercle de Monge, il en sera de même de leurs positions-limites; ce qui démontre l'énoncé.

Remarque. Étant donné un cercle Δ, soit à chercher une courbe Δ'

telle, que le centre de courbure M_1 en un point A de cette courbe et le point de rencontre H_1 de la normale AM_1 avec la polaire de A par rapport à Δ soient symétriques relativement à A.

La solution analytique de ce problème conduit à une équation différentielle du second ordre, dont on connaît dès maintenant l'intégrale générale puisque l'équation des coniques dont Δ est le cercle de Monge, renferme deux paramètres arbitraires. Cette équation, si l'on prend pour axes deux diamètres rectangulaires de Δ, est

$$Ax^2 + 2Bxy + \frac{A + B^2R^2}{AR^2 - 1}y^2 = 1, \qquad (\alpha)$$

R étant le rayon du cercle, et A, B désignant deux paramètres variables; car les demi-axes de la conique

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1,$$

sont donnés par l'équation

$$\rho^4 (AC - B^2) - (A + C)\rho^2 + 1 = 0,$$

et R^2 est égal à la somme algébrique des carrés des demi-axes.

Pour former l'équation différentielle de Δ', soient (x, y) les coordonnées de A; des valeurs des coordonnées du centre de courbure M_1, on conclut celles des coordonnées du symétrique de M_1 par rapport à A :

$$\alpha = x + \frac{1 + y'^2}{y''}y', \quad \beta = y - \frac{1 + y'^2}{y''};$$

comme elles doivent vérifier l'équation de la polaire de A par rapport à Δ, on a

$$x\left(x + \frac{1 + y'^2}{y''}y'\right) + y\left(y - \frac{1 + y'^2}{y''}\right) = R^2.$$

L'équation cherchée est donc

$$(x^2 + y^2 - R^2)y'' + (xy' - y)(1 + y'^2) = 0;$$

elle admet pour intégrale générale l'équation (α).

Solution par M. Kluyver, *professeur à Breda*. D'après un théorème connu (Steiner-Schröter, *Theorie der Kegelschnitte*, p. 294), les cercles de Monge de toutes les coniques qui ont un double contact avec l'ellipse ε aux points B et C, forment un faisceau φ.

L'une de ces coniques se compose des deux points B, C, et son cercle de Monge est le cercle ∂ décrit sur BC comme diamètre. Une autre se compose des deux droites AB, AC et son cercle de Monge se réduit au

point A. Ce point A a donc même polaire par rapport à tous les cercles du faisceau φ. Or sa polaire par rapport au cercle ∂ passe visiblement par l'orthocentre H du triangle ABC; par conséquent A et H sont conjugués par rapport au cercle de Monge de l'ellipse ε.

La hauteur AH coupe le cercle ABC au point K, symétrique de H par rapport à BC. Quand les points A, B, C tendent à se confondre sur l'ellipse ε, la hauteur AH tend vers la normale, l'angle BKC qui est égal à l'angle extérieur A du triangle ABC, devient l'angle de contingence; d'où il suit que K a pour limite le centre de courbure, lequel se trouve être ainsi le symétrique par rapport à A du point H, ce dernier étant le conjugué harmonique de A relativement au cercle de Monge.

Note. Le défaut d'espace nous empêche de reproduire de bonnes solutions de MM. Déprez (avec des remarques intéressantes), Mandart et François.

Le théorème invoqué par M. Kluyver peut se déduire d'un théorème de M. Faure (N. A. M., (1) XIX, p. 290 et 347; (2) X, p. 25 et 47). Si L, L′ sont deux points divisant BC harmoniquement, le triangle ALL′ est autopolaire par rapport à ε; lorsque les points L; L′ se déplacent sur BC, la circonférence circonscrite au triangle ALL′ est de puissance constante par rapport au milieu R de la corde BC, et par suite aussi par rapport au centre E de ε, lequel est situé sur la droite AR. Soit αλλ′ un second triangle autopolaire; la droite Aα est la polaire du point d'intersection D des droites LL′, λλ′, et rencontre ces lignes en des points β, β′ tels, que les triangles ADβ, αDβ′ sont autopolaires par rapport à l'ellipse; donc E est d'égale puissance par rapport aux cercles circonscrits à ces deux triangles qui ont un sommet commun D, et cette puissance est égale à celle de L par rapport aux cercles ALL′, αλλ′. Donc E est un centre radical commun à tous les cercles circonscrits à des triangles autopolaires; autrement dit, ces cercles coupent orthogonalement un cercle fixe U, décrit de E comme centre. Si l'on fait coïncider L et L′ en un seul point, soit en B, soit en C, on voit que U coupe orthogonalement les deux cercles V, V′ qui passent par A et touchent BC, soit en B, soit en C; si, de plus, les tangentes AB, AC sont rectangulaires, les deux cercles V, V′ se touchent en A, et le rayon de U est égal à EA; donc U est le cercle de Monge de ε. Supposons de nouveau l'angle BAC quelconque; alors les cercles désignés par V, V′, sont les mêmes pour toutes les coniques touchant AB et AC en B et C. Par conséquent, les cercles de Monge de ces coniques, coupant orthogonalement deux cercles fixes V, V′ forment un faisceau. (J. N.)

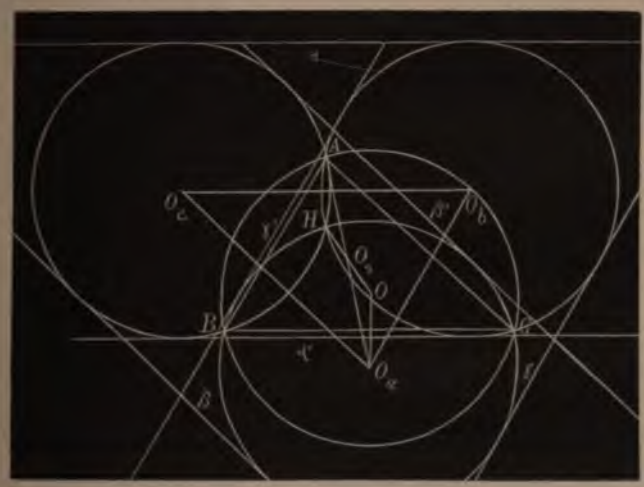
×Question 673.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 24.)

Soit H *l'orthocentre du triangle* ABC. *On décrit les circonférences* BCH, CAH, ABH, *auxquelles on mène des tangentes communes. Étudier les propriétés des triangles formés par trois de ces tangentes.* (H. Brocard.)

Solution par M. Déprez. Soient O_a, O_b, O_c les centres des cercles BCH, CAH, ABH; ces points sont les symétriques du centre O du cercle ABC par rapport aux droites BC, CA, AB. Les deux triangles ABC, $O_aO_bO_c$ ont pour centre de symétrie le centre O_9 du cercle des neuf points de ABC.

Les cercles O, O_a, O_b, O_c sont égaux entre eux; soit R leur rayon. Appelons α, α' les tangentes communes aux cercles O_b, O_c; ces droites sont parallèles à la droite O_bO_c et distantes de celle-ci de la quantité R.



Désignons de même par β et β', γ et γ' les tangentes communes aux cercles O_c et O_a, O_a et O_b. Nous supposons que α, β, γ représentent les tangentes qui sont séparées des sommets du triangle $O_aO_bO_c$ par les côtés opposés.

Cela posé, nous pouvons considérer huit triangles, qui sont conjugués deux à deux; à savoir

$$\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\gamma,\\ \alpha'\beta'\gamma';\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}\alpha'\beta\gamma,\\ \alpha\beta'\gamma';\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}\alpha\beta'\gamma,\\ \alpha'\beta\gamma';\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}\alpha\beta\gamma',\\ \alpha'\beta'\gamma.\end{matrix}\right.$$

I. Soient I, I_a, I_b, I_c les centres et r, r_a, r_b, r_c les rayons des cercles touchant les côtés du triangle ABC; les centres J, J_a, J_b, J_c des cercles touchant les côtés du triangle $O_aO_bO_c$ sont symétriques des points I, I_a, I_b, I_c par rapport au point O_9.

Les distances des côtés des triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ au point J sont égales à $R \pm r$; donc J est le centre d'homothétie des triangles $O_aO_bO_c$, $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, et les côtés des deux derniers ont pour expressions

$$a\frac{R \pm r}{r}, \quad b\frac{R \pm r}{r}, \quad c\frac{R \pm r}{r}.$$

Semblablement, J_a est le centre d'homothétie des triangles $O_aO_bO_c$, $\alpha'\beta\gamma$, $\alpha\beta'\gamma'$, et le rapport d'homothétie du premier triangle comparé aux deux autres est égal à $\frac{r_a \pm R}{r_a}$.

II. Le triangle $O_aO_bO_c$ a pour orthocentre le point O, pour centre du cercle circonscrit le point H; le centre ω du cercle circonscrit au riangle $\alpha\beta\gamma$ s'obtient évidemment en prenant sur JH une distance

$$J\omega = JH.\frac{r}{r+R}.$$

Les coordonnées normales de H, dans le triangle $\alpha\beta\gamma$, ont pour expressions

$$R(1 + \cos A) = 2R\cos^2\frac{A}{2}, \quad 2R\cos^2\frac{B}{2}, \quad 2R\cos^2\frac{C}{2};$$

ce point est donc l'inverse du point de Gergonne du triangle $\alpha\beta\gamma$.

Une remarque analogue s'applique au point H considéré dans les triangles $\alpha\beta'\gamma'$, $\alpha'\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma$.

Les coordonnées normales de H, dans le triangle $\alpha'\beta'\gamma'$, sont égales à

$$2R\sin^2\tfrac{1}{2}A, \quad 2R\sin^2\tfrac{1}{2}B, \quad 2R\sin^2\tfrac{1}{2}C,$$

de sorte que ce point est l'inverse du point de Nagel du triangle $\alpha'\beta'\gamma'$.

III. Soient L et L', L_a et L'_a, ... les centres d'homothéthie du triangle ABC combiné successivement avec les triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha'\beta\gamma$ et $\alpha\beta'\gamma'$ ... L est situé sur la droite IJ qui joint deux points homologues des triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$, et l'on a

$$LI : LJ = r : R + r;$$

de même,

$$L'I : L'J = r : R - r.$$

Les coordonnées normales de L dans l'un ou l'autre des triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$ sont proportionnelles aux distances des côtés homologues, ou à

$$R[1 + \cos(B - C)] = 2R\cos^2\tfrac{1}{2}(B - C), \quad 2R\cos^2\tfrac{1}{2}(C - A), \quad 2R\cos^2\tfrac{1}{2}(A - B);$$

celles de L' sont entre elles comme les quantités

$$\sin^2\tfrac{1}{2}(B - C), \quad \sin^2\tfrac{1}{2}(C - A), \quad \sin^2\tfrac{1}{2}(A - B).$$

La distance de BC à l'une des tangentes menées au cercle O_9 parallèlement à BC étant égale à

$$\frac{R}{2} \mp \frac{R}{2}\cos(B - C),$$

on voit que les points L, L', ... sont aussi les centres d'homothétie du triangle ABC combiné avec l'un des triangles formé par trois tangentes au cercle O_9 parallèles à BC, CA, AB.

Les points L', L'_a, L'_b, L'_c sont les points où le cercle O_9 touche les cercles I, I_a, I_b, I_c; c'est ce qu'on peut conclure des valeurs des coordonnées de ces points de contact (voir LEMOINE, N. A. M., 1886, p. 122 et J. M. E., 1886, p. 193), ou des égalités

$$IO_9 = O_9J = \frac{R}{2} - r, \quad \frac{L'I}{L'J} = \frac{r}{R - r}.$$

×Question 686.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 124.)

Si a, b, c désignent les côtés d'un triangle rectiligne, on a

$$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geqq 0. \qquad (1)$$

(E. CATALAN.)

Solution par M. A. ANDERSON (Galway). Posons

$$x = b + c - a, \quad y = a + c - b, \quad z = a + b - c.$$

Les quantités x, y, z sont des quantités positives, et

$$a = \frac{y + z}{2}, \quad b = \frac{z + x}{2}, \quad c = \frac{x + y}{2}.$$

La relation proposée prend la forme

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 - x^2yz - y^2xz - z^2xy \geqq 0. \qquad (2)$$

Or, $x^2 + y^2 \geqq 2xy$; d'où, en multipliant par xz,

$$x^3z + y^2xz - 2x^2yz \geqq 0.$$

En additionnant cette relation avec les deux autres qui en résultent par des permutations tournantes, on obtient la relation (2).

NOTES I. On peut se demander, si la relation (1) subsiste pour *toutes* les valeurs positives de a, b, c. Lorsque a est très petit, l'expression considérée se réduit sensiblement à $b^2c(b-c)$, quantité qui peut être positive ou négative; donc a, b, c ne peuvent être quelconques. Ainsi pour $a = 1$, $b = 100$, $c = 1000$, le polynôme (1) est négatif.

Dans un mémoire intitulé *Quelques formules relatives aux triangles rectilignes* (Tome XLIV, in-8°, des *Mémoires couronnés et autres Mémoires*, publiés par l'Académie royale de Belgique, 1890), M. Catalan a trouvé la relation

$$\overline{I\Omega}^2 = \frac{2Rr}{\lambda^4}[a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a)],$$

I désignant le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, Ω un point de Brocard, λ^4 la quantité $b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2$, et il en a conclu la question 686. (J. N.)

II. Soit c inférieur à a et b. L'expression donnée peut s'écrire

$$a(a-c)(b-c)(a+c-b) + c(a-b)^2(a+b-c).$$

Pour que cette quantité soit positive, il n'est pas nécessaire que a, b, c soient les côtés d'un triangle. Il suffit évidemment que $a + c$ soit au moins égal à b; a peut être aussi grand qu'on le veut.

Si c^2 est inférieur à a^2, mais plus grand que $\frac{1}{2}a^2$, on a $a + c > \frac{ac}{2c-a}$, car cette relation équivaut à $c^2 > \frac{1}{2}a^2$. Soit $b > a + c$, on aura aussi

$$b > \frac{ac}{2c-a} \quad \text{ou} \quad bc - ac > ab - bc.$$

Or, le polynôme donné pouvant s'écrire

$$(bc-ac)(b-c)(b+c-a) - (ab-bc)(a-c)(b-c-a)$$

sera positif, parce que chacun des trois facteurs du premier terme est plus grand que le facteur correspondant du second terme. (DE TILLY.)

QUESTIONS D'EXAMEN.

454. Démontrer géométriquement la formule

$$\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{cotg} 2x.$$

Soit le triangle ABC rectangle en A; menons la hauteur AH et marquons le milieu M de BC. Si $AH = 1$, $HB = \operatorname{cotg} B$, $HC = \operatorname{cotg} C = \operatorname{tg} B$, $\operatorname{cotg} B - \operatorname{tg} B = 2HM = 2\operatorname{cotg} AMC = 2\operatorname{cotg} 2B$.

455. Soient D, E les points de rencontre de la perpendiculaire au milieu du côté BC du triangle ABC, avec les perpendiculaires élevées respectivement en B et C sur les côtés AB et AC. O étant le centre du cercle ABC, démontrer la relation

$$OD.OE = R^2.$$

COROLLAIRE. Les droites BD, CE se rencontrent en un point F de la circonférence ABC. Démontrer que la circonférence DEF touche la droite AOF. (REUSCHLE.)

456. Deux circonférences O, O′ se coupent aux points A, B. Une sécante quelconque menée par A rencontre les deux courbes en C, D. Démontrer que la longueur CD varie proportionnellement au sinus de l'angle CAB.

On observe facilement que le triangle BCD reste toujours semblable à lui-même, de sorte que le rapport CD : CB est constant...; ou mieux, on mène OH, O′H′ perpendiculaires à CD, ce qui donne $CD = 2HH' = 2OO' \cos(CD, OO')$...

457. Les droites joignant les sommets d'un triangle équilatéral ABC à un même point D rencontrent la circonférence ABC aux points A′, B′, C′. Démontrer que

$$AD.AA' + BD.BB' + CD.CC' = 2\overline{AB}^2. \qquad \text{(HAIN.)}$$

Si AD rencontre BC en A_1, on a, par des théorèmes connus,

$$S\frac{A_1D}{A_1A} = 1, \quad S\frac{AD}{AA_1} = 2, \quad AA_1 \cdot AA' = a^2, \ldots$$

Eliminons AA_1, BB_1, CC_1...

458. Soient M, N, P, Q les milieux des côtés AB, BC, CD, DA d'un carré. Démontrer que les droites AN, BP, CQ, DM limitent un carré égal au cinquième de ABCD.

Soient A′, B′, C′, D′ les intersections des couples (AN, DM), (AN, BP), (CQ, BP), (CQ, DM). En faisant tourner les triangles AMA′, BMB′, CPC′, DQD′, d'un demi-

tour dans le sens ABC, autour des sommets M, N, P, Q, on forme une *croix* composée de cinq carrés égaux à A'B'C'D'.

459. Construire la tangente commune à deux coniques qui ont un foyer commun F.

La projection de F sur une tangente commune se détermine par l'intersection des cercles principaux.

QUESTIONS PROPOSÉES.

691. Un disque elliptique se déplace en restant toujours tangent à une droite fixe OX en un point donné O. Quel est le lieu géométrique du centre de courbure de l'ellipse au point où la courbe est rencontrée par la normale fixe OY. (H. BROCARD.)

692. Par un point P du plan d'un triangle passent deux hyperboles équilatères l'une circonscrite, l'autre conjuguée au triangle. Déterminer en coordonnées trilinéaires les équations de ces hyperboles et l'équation du cercle qui passe par les trois points d'intersection de ces deux hyperboles, autres que le point P. (E. LUCAS.)

×**693.** Trouver dans le plan d'un triangle ABC deux directions telles que les droites AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1, CC_2 menées par les sommets parallèlement à ces directions rencontrent les côtés opposés en six points A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 situés sur une même circonférence. (GOB.)

×**694.** Chercher le minimum de la bissectrice d'un des angles aigus d'un triangle rectangle dont la hauteur relative à l'hypoténuse est constante. (CL. THIRY.)

Rectifications. Page 148, ligne 3, lire t. VII, au lieu de t. VI. Le théorème 1 de M. Denys, p. 162, est donné comme question proposée dans le *Bulletin scientifique* de M. LEBON, p. 146, n° 5. Page 175, ligne 2, lire $+(\sqrt{5}-2)^{2p+1}$, au lieu de $-(\sqrt{5}-2)^{2p+1}$; ligne 4, la valeur de x doit être rectifiée comme il suit :

$$x=\frac{1}{80}[9(9+4\sqrt{5})^{2p+1}+9(9-4\sqrt{5})^{2p+1}-82],$$

c'est-à-dire qu'il faut introduire deux fois le facteur 9 dans la parenthèse. Dans la figure de la page 166, lire a_1, a_2, au lieu de d_1, d_2.

A PROPOS D'UN PROBLÈME SUR LE BILLARD CIRCULAIRE;

par M. Alfonso Del Re, à Rome.

Quelle est la route ABCA ***que doit suivre une bille, sur un billard circulaire*** (O), ***pour revenir au point de départ*** A, ***après deux réflexions successives sur la bande?***

On rencontre ce problème dans les *Éléments de Géométrie*, par Sannia et d'Ovidio, et dans les *Théorèmes et Problèmes de Géométrie*, par M. Catalan. La solution qu'on va lire est fondée sur la considération des formes projectives.

Le triangle ABC est, évidemment, isoscèle; O est le centre du cercle inscrit. Prenons un point quelconque M sur la circonférence (O); menons la droite ME′ symétrique de MA par rapport au rayon MO et rencontrant le diamètre AO en E′, et abaissons ME perpendiculaire sur AO. Si les points E et E′ coïncidaient, M serait le point cherché B. Or, la tangente en M à la circonférence (O) rencontre AO en un point E″ conjugué avec E dans l'involution $\mathfrak{I}$ ayant pour points doubles les extrémités H, K du diamètre AO; la division (AE′OE″) étant harmonique et les points A, O étant fixes, les points E′, E″ sont des points homologues d'une projectivité $\mathfrak{P}$ dont A et O sont les points doubles. Il résulte de là que les points E et E′ se correspondent dans une projectivité $\mathfrak{P}'$ (celle qui résulte de l'application successive de $\mathfrak{I}$ et de $\mathfrak{P}$), dont un point double est l'intersection de AO avec la droite cherchée BC.

Pour construire les points doubles de la projectivité $\mathfrak{P}'$, on en détermine d'abord trois couples d'éléments correspondants. Appelons A′ le conjugué harmonique de A par rapport à HK, H′ le conjugué harmonique de A par rapport à OH, O'_∞ le point à l'infini sur HK; nous aurons les ternes correspondants :

$$\text{pour } \mathfrak{I} \begin{cases} H & O & A; \\ H & O'_\infty & A'; \end{cases} \qquad \text{pour } \mathfrak{P} \begin{cases} H' & O & A; \\ H & O & A; \end{cases}$$

d'où l'on conclut les ternes homologues de la projectivité $\mathfrak{P}'$:

$$\begin{matrix} H & O'_\infty & A'; \\ H' & O & A. \end{matrix}$$

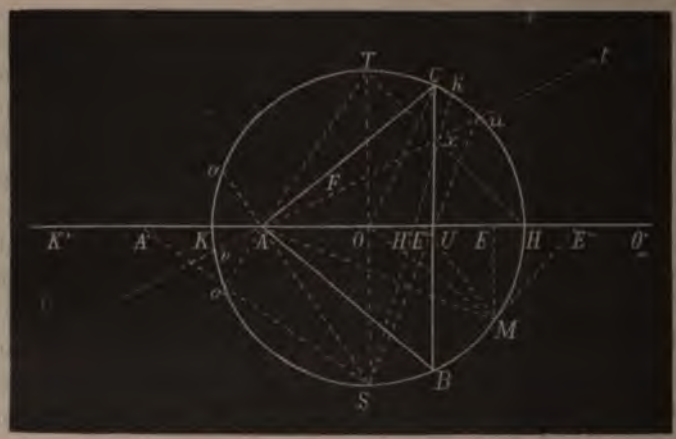
Soient S, T les extrémités du diamètre du cercle (O) perpendiculaire à HK. Projetons les couples de $\mathfrak{P}'$ sur la circonférence à partir de S; si

h', a', a sont les projections de H', A', A, nous aurons sur la courbe une projectivité $\mathfrak{P}''$, dont trois couples d'éléments homologues sont

$$\begin{matrix} H & S & a' \\ h' & T & a. \end{matrix}$$

On sait que les couples de droites (HT, Sh'), (Sa, Ta'), (Ha, $h'a'$) se coupent en trois points x, y, z d'une droite t, et si u, v sont les points de rencontre de t avec la circonférence (O), les droites Su, Sv rencontrent HK aux points doubles U, V de la projectivité $\mathfrak{P}'$.

Comme A, A' divisent harmoniquement le diamètre HK, SK est la



bissectrice de l'angle ASA'; donc a, a' sont symétriques par rapport à HK, et, par suite, Ta' et Sa se coupent en A. Ainsi le point désigné par y coïncide avec A, et pour trouver la droite t, il suffit de déterminer le point H', conjugué de A par rapport à OH, de projeter H' en h' et de joindre A au point de rencontre x des droites HT, h'S. En observant, d'ailleurs, que le point x est le conjugué harmonique du point diagonal AS.TH du quadrangle ASTH par rapport à TH(*), la construction de t peut être simplifiée; car pour déterminer x, et conséquemment t, il suffit de projeter, de O sur TH, le point diagonal AT.SH du même quadrangle.

(*) En effet, le groupe formé par ce point diagonal, par x et par les points T, H est la projection, faite de S sur TH, du groupe harmonique AH'OH.

Le problème proposé admet une solution et une seule. Car t passant par A coupe la circonférence (O) en deux points réels u, v, et les points U, V sont l'un intérieur, l'autre extérieur au diamètre HK. On peut démontrer ceci directement. En effet, deux points conjugués de $\mathfrak{I}$ parcourent HK dans des sens opposés, et deux points homologues de la projectivité $\mathfrak{P}$ se meuvent sur HK dans le même sens; donc les ponctuelles qui composent la projectivité $\mathfrak{P}'$ sont opposées et conséquemment ont deux points doubles réels. Soit K′ le conjugué harmonique de A par rapport à OK; nous supposons A entre O et K, de sorte que K′ est extérieur à OK, et H′ entre O et H. Si KA $<$ AO, le segment KK′ tombe hors du diamètre KH et renferme l'un des points doubles, tandis que l'autre point double est situé sur HH′. Si KA $>$ AO, le segment HH′ est compris dans le segment KK′ ou empiète sur lui; alors, respectivement, un point double est situé entre H et H′ et l'autre en dehors de KK′, ou un point double appartient à la partie commune à HH′ et KK′ et l'autre tombe en dehors de HK.

M. Del Re a traité aussi le même problème en géométrie non euclidienne. Nous regrettons de ne pouvoir, faute de place, reproduire cette partie de son travail.

Notes I. M. Meurice nous a communiqué, il y a déjà quelque temps, une solution du même problème, qui ne diffère pas essentiellement de la suivante, que nous extrayons des *Théorèmes et Problèmes* de M. Catalan. Soit D le point de rencontre de BO avec la perpendiculaire élevée en A sur AO, et soit F la projection de A sur BD. Le triangle rectangle AOD donne $\overline{AO}^2 = OF \cdot OD$, et le triangle ABD étant isoscèle, on a $OD - 2OF = OB$; on connaît donc le produit et la différence des longueurs OD, 2OF. M. Meurice décrit la circonférence qui a pour centre O et pour rayon OA, et mène la tangente GI à cette courbe au point G où elle coupe BO; le triangle formé par cette tangente avec BO et OH est égal au triangle OAD. (J. N.)

II. Voici une bibliographie succincte de la question du billard circulaire, que nous communique un abonné : Al Hazen (Hassan ben Haïthem), géomètre arabe, mort en 1038; Simpson (*Sect. conicarum libri V*, Appendix, p. 223); Chasles (Aperçu historique); Riccati et Saladini (*Instit. Analyticæ*) (par l'hyperbole équilatère); Paoli, Bigoni, Puissant, Quetelet (par la strophoïde); L. Beziat (par les équipollences et par la strophoïde) N. A. M. (2). IX, 1870, 133-136. Beziat cite les auteurs précédents.

Voir ensuite, dans le même recueil: L. Anne, I, 1842, 36-42; H. Bertot, p. 470-471; Gerono, III, 1844, 242-249; A. Transon, IX, 1850, 340-342 (note sur la solution de L. Anne); Question 874 (E. Lemoine) résolue par L. Beziat (*loc. cit.*); Pourchelroux (ibid. 423) et A. Morel, 1869, 232-236 (par l'hyperbole équilatère).

Voir aussi, I, 1842, p. 470, la question n° 15 sur le billard triangulaire (ou polygonal).

SUR L'ANALYSE INDÉTERMINÉE, DU PREMIER DEGRÉ(*);

par M. E. CATALAN.

1. Soit l'équation

$$ax + by = c, \tag{1}$$

à résoudre, s'il est possible, en *nombres entiers positifs*. On suppose, suivant l'usage, a, b, c *entiers positifs, premiers entre eux;* et les coefficients a, b, *premiers entre eux*.

Si c et a ont un facteur commun f, ce facteur, premier avec b, doit diviser y. Posant $c = fc'$, $a = fa'$, $y = fy'$, on *réduit* l'équation (1) à celle-ci :

$$a'x + by' = c'. \tag{2}$$

On peut donc supposer que, dans l'équation (1), les nombres entiers a, b, c sont *premiers entre eux, deux à deux*.

2. D'après une propriété connue(**), *le nombre des solutions non-négatives, de l'équation* (1), *est égal à l'un des deux quotients entiers de* c *par* ab(***).

Si c était divisible par ab, l'équation (1) serait vérifiée par $x = 0$, $y = a$; $x = b$, $y = 0$. Mais, d'après ce qui précède, cette hypothèse doit être rejetée.

3. Soit q le quotient entier de c par ab, ce quotient étant pris par défaut; de manière que

$$c = abq + c' :$$

c' sera compris entre 0 et ab, *exclusivement*.

Posons, dans l'équation (1) :

$$x = x' + bq, \quad y = y'.$$

Nous avons à résoudre, en *nombres entiers*, l'équation *auxiliaire*

$$ax' + by' = c'. \tag{3}$$

Celle-ci admet *une* solution(†), ou n'en admet *aucune*.

(*) Complément à diverses Notes, publiées dans le *Cours de Mathématiques*, par Auguste Blum (1844), les *Nouvelles Annales*, les *Mélanges mathématiques*, *Mathesis*, etc.

(**) Souvent attribuée à Paoli. Où ce Géomètre l'a-t-il publiée?

(***) *Cours de Mathématiques*, d'AUGUSTE BLUM, t. I, p. 473.

(†) Sous-entendu : *en nombres entiers, différents de zéro*.

4. Soient, s'il est possible,

$$x' = \alpha', \quad y' = \beta',$$

α', β' étant positifs. Une solution de l'équation (1) sera donnée par les formules :

$$\alpha = \alpha' + bq, \quad \beta = \beta';$$

et, d'après la théorie connue, les valeurs générales de x, y sont :

$$x = \alpha' + b(q - \theta), \quad y = \beta' + a\theta. \tag{4}$$

A cause de $c' < ab$, on a :

$$\alpha' < b, \quad \beta' < a. \tag{5}$$

Donc, on peut attribuer à l'indéterminée θ les $q + 1$ valeurs :

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots \quad q.$$

Par conséquent : *Si l'équation auxiliaire admet une solution, l'équation primitive en admet* $q + 1$. *Dans le cas contraire, cette équation primitive admet, seulement,* q *solutions positives*(*).

5. D'après tout ce qui précède, la question proposée peut être réduite à celle-ci : *Soit l'équation*

$$ax + by = c, \tag{1}$$

les nombres a, b, c *étant premiers entre eux, deux à deux, et* c *étant moindre que* ab. *Dans quel cas cette équation admet-elle une solution positive ?*

Soient

$$x = \alpha, \quad y = \beta \tag{6}$$

une solution *particulière*. Si α, β sont positifs, ces nombres constituent la solution *unique*. D'ailleurs, les quantités α, β ne peuvent être *négatives* à la fois.

Supposons donc, pour fixer les idées,

$$\alpha > 0, \quad \beta < 0.$$

Des formules connues (4), on déduit :

$$\theta < \frac{\alpha}{b}, \quad \theta > -\frac{\beta}{a}\text{(**)}.$$

(*) *Mélanges mathématiques*, tome I, p. 25.

(**) A cause de

$$a\alpha + b\beta = c,$$

et des hypothèses faites sur a, b, c, *chacune de ces fractions est irréductible.*

Cela posé, *si les limites* $\frac{\alpha}{b}$, $-\frac{\beta}{a}$ *sont comprises entre deux nombres entiers consécutifs, le nombre entier* θ *n'existe pas : l'équation* (1) *n'a pas de solution positive. Dans le cas contraire, elle en admet une;* car les deux limites comprennent, entre elles, un nombre entier N.

6. Le moyen le plus simple à employer, pour distinguer ces deux cas, est la résolution *directe*, par le procédé de Pilatte(*). (*A continuer.*)

×PARADOXE.

Considérons un cylindre à base circulaire, de rayon R, de hauteur H. Divisons ce cylindre par des plans équidistants, parallèles à la base, en $2n$ tranches égales, de hauteur $(H : 2n)$, et considérons l'une de ces tranches. Divisons les deux circonférences de base de cette tranche en $2m$ parties égales, aux points marqués 1, 2, 3,... $2m$ sur la base inférieure, $1', 2', 3', \ldots, (2m)'$ sur la base supérieure. Nous supposons que les couples de points $11'$, $22'$, $33', \ldots$, $2m$, $(2m)'$ correspondants se trouvent sur des génératrices du cylindre. Inscrivons dans la surface de la tranche cylindrique considérée le polyèdre formé par les facettes triangulaires isoscèles $12'3$, $2'34'$, $34'5$, etc. Ces facettes sont en nombre $2m$; appelons s la surface de l'une d'elles.

Si nous opérons de même dans les $2n$ tranches dont se compose le cylindre total, nous y aurons inscrit, $4mn$ facettes triangulaires isoscèles de surface s. Posons

$$S = 4mns,$$

et cherchons la valeur de S en fonction de R, H, m et n.

Pour cela, considérons l'un des triangles, $12'3$ par exemple. Si l'on appelle $2''$ le point de rencontre du rayon 2C du cylindre avec 13, on voit immédiatement que $2'2''$ est la hauteur du triangle $12'3$ de base 13. On a donc

$$s = 12'' \times 2'2''.$$

Mais

$$12'' = R \sin 1C2'' = R \sin \frac{2\pi}{2m} = R \sin \alpha,$$

(*) Voir *Mathesis*, août-septembre 1890. Voici ce que j'écrivais, récemment, à M. Hermite : Tous les *criteriums* possibles ne valent pas la résolution pure et simple de l'équation proposée.

si l'on pose $\pi = m\alpha$. Ensuite

$$2'2'' = \sqrt{(2'2)^2 + (22'')^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{H}{2n}\right)^2 + R^2(1-\cos\alpha)^2} = \sqrt{\frac{H^2}{4n^2} + 4R^2\sin^4\tfrac{1}{2}\alpha}.$$

Par conséquent,

$$s = R\sin\alpha\sqrt{\frac{H^2}{4n^2} + 4R^2\sin^4\tfrac{1}{2}\alpha},$$

$$S = 4mnR\sin\alpha\sqrt{\frac{H^2}{4n^2} + 4R^2\sin^4\tfrac{1}{2}\alpha},$$

ou, après quelques transformations,

$$S = 2\pi R\frac{\sin\alpha}{\alpha}\sqrt{H^2 + 16R^2n^2\sin^4\tfrac{1}{2}\alpha}.$$

Si m et n croissent indéfiniment, α tend vers 0, $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ vers l'unité, mais $16n^2\sin^4\frac{1}{2}\alpha$ n'a pas de limite déterminée. En effet, si l'on fait $n = km = \dfrac{k\pi}{\alpha}$,

$$16n^2\sin^4\tfrac{1}{2}\alpha = k^2\pi^2\alpha^2\frac{\sin^4\frac{1}{2}\alpha}{(\frac{1}{2}\alpha)^4}$$

quantité qui a pour limite zéro, si k est fixe. Dans ce cas,

$$\lim S = 2\pi RH.$$

Mais si l'on suppose $n = km^2 = k\dfrac{\pi^2}{\alpha^2}$, on a

$$16n^2\sin^4\tfrac{1}{2}\alpha = k^2\pi^4\frac{\sin^4\frac{1}{2}\alpha}{(\frac{1}{2}\alpha)^4},$$

quantité qui a pour limite $k^2\pi^4$, si k est fixe; alors

$$\lim S = 2\pi R\sqrt{H^2 + k^2\pi^4R^2}.$$

Enfin, si l'on suppose $n = km^3$, on a

$$\lim(16n^2\sin^4\tfrac{1}{4}\alpha) = \lim k^2m^3\pi^4\frac{\sin^4\frac{1}{2}\alpha}{(\frac{1}{2}\alpha)^4} = \infty, \quad \lim S = \infty.$$

Il résulte de cet exemple très simple, signalé par SCHWARZ et PEANO (*),

(*) H. A. SCHWARZ, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen* (Berlin, Springer, 1890), t. II, pp. 308-310, 369-370. Comme nous l'avons fait observer dans notre

qu'on ne peut pas prendre pour définition de l'aire d'une surface courbe, sans autre précaution, *la limite de l'aire d'un polyèdre à facettes indéfiniment décroissantes inscrit à la surface*, puisque cette limite peut ne pas exister. (P. M.).

SUR LA TRANSFORMATION PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES;

par M. LAISANT, Docteur ès-Sciences.

1. L'expression de *réciprocité* est fréquemment usitée en mathématiques, et à peu près uniformément dans le sens général que voici : il y a réciprocité entre deux valeurs a et b, lorsqu'elles sont liées entre elles de telle sorte que b se déduit de a par les mêmes opérations qui permettent de déduire a de b. On dit alors que ces deux valeurs sont elles-mêmes réciproques. Analytiquement, ce fait se traduit ainsi : la liaison des valeurs a et b est exprimée par une équation de la forme

$$f(a, b) = 0, \tag{1}$$

$f(a, b)$ étant une fonction symétrique de a et b.

Cette notion de réciprocité est avantageuse, souvent féconde, et il y a grand intérêt à la conserver dans la science sans lui rien enlever de son caractère de généralité. C'est pourquoi je trouve regrettable que dans beaucoup de livres et dans beaucoup de cours, on persiste à désigner sous le nom de *transformation par rayons vecteurs réciproques* la transformation qui consiste simplement dans ce fait que les deux rayons vecteurs, de même direction, ont un produit constant, qu'on appelle *puissance* de la transformation. Cette transformation est beaucoup mieux qualifiée d'*inversion* par beaucoup d'auteurs, principalement à l'étranger, et il serait à désirer que cette expression prévalût d'une manière définitive.

Sans parler de la concision du langage, qui gagne tant à l'emploi du mot *inversion*, il est incontestable que toute transformation exprimée par

---

Résumé d'Analyse, p. 246, n° 314, CAUCHY, dès 1827, pour éviter sans doute les difficultés signalées ici, a pris pour définition de l'aire d'une surface courbe, la limite de la somme des facettes indéfiniment décroissantes, tangentes à la surface. Une autre définition moins artificielle de l'aire d'une surface courbe a été indiquée récemment par M. PEANO, dans la séance du 19 janvier 1890 de l'Académie royale des Lincei : *Sulla definizione dell' area d'una superficie*, (4), VI, A, pp. 54-57.

des rayons vecteurs liés par l'équation symétrique (1) est une *transformation par rayons vecteurs réciproques*, au même titre que l'inversion. Pour mieux faire ressortir les inconvénients de l'abus de langage que je viens de signaler, je vais indiquer brièvement quelques transformations par rayons vecteurs réciproques, autres que l'inversion, en même temps que je rappellerai les notions essentielles à la théorie de l'inversion qui me sembleront indispensables pour la clarté de ce qui va suivre.

2. Supposons d'abord que la somme des deux rayons vecteurs soit constante, si bien que la loi générale de transformation devient

$$r + r_1 = 2a, \tag{2}$$

$2a$ étant le module de la transformation (*). De là

$$dr + dr_1 = 0,$$

et, par conséquent, les angles θ étant les mêmes pour les deux figures,

$$\frac{dr}{d\theta} + \frac{dr_1}{d\theta} = 0. \tag{3}$$

Cette relation nous montre que les sous-normales polaires de deux courbes transformées sont égales et opposées.

Si l'équation d'une ligne quelconque est $r = \varphi(\theta)$, celle de sa transformée est $r_1 = 2a - \varphi(\theta)$. Par exemple, la transformée d'une droite perpendiculaire à l'axe polaire, à la distance b, aura pour équation

$$r_1 = 2a - \frac{b}{\cos\theta}.$$

C'est évidemment une branche de conchoïde. D'une manière générale, dans ce système de transformation, la courbe transformée sera toujours symétrique à une branche de conchoïde de la transformante, par rapport au pôle; car

$$r_1 = 2a - \varphi(\theta) = -[\varphi(\theta) - 2a].$$

On peut considérer, ici comme dans toutes les transformations par rayons vecteurs réciproques, les *courbes anallagmatiques*, c'est-à-dire celles qui jouissent de la propriété de se transformer en elles-mêmes. L'équation générale d'une telle courbe est ici

$$r = a \pm \varphi(\theta),$$

(*) Si $f(r, r_1) = 0$ est la loi réciproque de transformation, on appelle uniformément *module* de la transformation la valeur a qui vérifie la relation $f(a, a) = 0$.

$\varphi(\theta)$ étant une fonction arbitraire. Les deux branches de la courbe peuvent être séparées, et leurs équations peuvent s'écrire

$$r = \varphi(\theta) + a, \quad r = -[\varphi(\theta) - a].$$

On voit ainsi que le système se compose de l'une des branches d'une conchoïde de la courbe représentée par $r = \varphi(\theta)$, et de la symétrique de l'autre branche par rapport au pôle. Si l'on prend une conchoïde complète, et qu'on lui adjoigne une courbe symétrique par rapport au pôle, l'ensemble formera une courbe anallagmatique.

Dans les constructions relatives à cette transformation, on fera utilement usage du cercle de rayon a décrit du pôle comme centre, ou *cercle de transformation*. Dans le cas de l'inversion, on emploie de même le *cercle d'inversion*, dont le rayon est égal à $\sqrt{rr_1}$.

3. Soit maintenant une nouvelle transformation par rayons vecteurs réciproques, dans laquelle la moyenne harmonique des deux rayons vecteurs est constante, si bien que loi de transformation est

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} = \frac{2}{a}. \tag{4}$$

On déduit de là

$$\frac{1}{r^2}\frac{ar}{d\theta} + \frac{1}{r_1^2}\frac{dr_1}{d\theta} = 0, \tag{5}$$

ce qui montre que les sous-tangentes polaires des deux courbes sont égales et opposées.

On voit facilement que, si l'on transforme par inversion deux courbes qui se correspondent d'après la loi (4), on obtient deux courbes qui se correspondent d'après la loi (2).

Par exemple, si l'on transforme, d'après la formule (4), une droite perpendiculaire à l'axe polaire, la courbe obtenue a pour équation

$$r = \frac{ab}{2b - a\cos\theta};$$

c'est une conique ayant le pôle pour foyer. Si l'on transforme par inversion la droite et la conique, on obtient une circonférence passant par le pôle, et une conchoïde de cercle; donc la conique est une ligne inverse d'une conchoïde de cercle.

Les courbes anallagmatiques, dans la transformation (4), s'obtiennent par l'équation générale

$$r = \frac{a}{1 \pm \varphi(\theta)},$$

$\varphi(\theta)$ étant une fonction arbitraire.

4. On pourrait multiplier les exemples de transformations par rayons vecteurs réciproques, en prenant, je suppose,

$$r^2 + r_1^2 = 2a^2, \quad \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} = \frac{2}{a^2}, \quad \text{etc.}$$

Cette étude détaillée pourrait conduire à certains résultats particuliers plus ou moins simples et intéressants, mais nous détournerait de notre but essentiel, qui est de montrer surtout le caractère général des propriétés de ces transformations.

Soit

$$f(r, r_1) = 0$$

une relation symétrique caractérisant une transformation; on en déduit

$$r_1 = \mathrm{F}(r), \quad r = \mathrm{F}(r_1);$$

$$f'_r dr + f'_{r_1} dr_1 = 0. \tag{6}$$

Or, f'_r est une fonction de r et de r_1; si l'on y remplace r_1 par $\mathrm{F}(r)$, et si l'on fait l'opération analogue dans f'_{r_1}, la relation (6) prend la forme

$$\mathrm{G}(r)dr + \mathrm{G}(r_1)dr_1 = 0.$$

Une certaine expression, dépendant de la tangente et du rayon vecteur, sera donc la même, au signe près, dans les deux courbes. Dans les exemples des n^os^ 2 et 3, c'était la sous-tangente, ou la sous-normale. Dans le cas de l'inversion, c'est l'angle formé par la tangente avec le rayon vecteur qui reste le même dans les deux courbes, ou plutôt les deux angles en question sont supplémentaires. C'est qu'en effet l'inversion est une transformation *isogonale* ou monogène, c'est-à-dire que les deux rayons vecteurs, considérés comme quantités géométriques, peuvent être analytiquement exprimés en fonction l'un de l'autre; et toutes ces transformations jouissent de la propriété de ne pas altérer les angles. Cette propriété de l'inversion contribue assurément à lui donner l'importance considérable qui lui appartient en géométrie, parmi toutes les transformations centrales.

5. Une autre propriété intéressante, commune à toutes les transformations géométriques, isogonales ou non, et que j'ai établie ailleurs (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1887, p. 103), est relative aux aires infiniment petites décrites par un point et son transformé. Pour les transformations centrales, il est très facile de s'en rendre compte, en observant que tout déplacement infiniment petit du point M peut se mettre sous la forme

$$d\mathrm{M} = e^{i\theta}(dr + ir\,d\theta);$$

pour le point correspondant M_1,

$$d\mathrm{M}_1 = e^{i\theta}(dr_1 + ir_1\,d\theta).$$

Si l'extrémité de l'accroissement infiniment petit MM′ décrit, autour du point M, une circonférence de rayon infiniment petit α et que λ désigne l'angle de OM avec MM′, nous aurons donc

$$\alpha\cos\lambda = dr, \quad \alpha\sin\lambda = r\,d\theta,$$

et

$$d\mathrm{M}_1 = \alpha e^{i\theta}\left(\frac{dr_1}{dr}\cos\lambda + i\frac{r_1}{r}\sin\lambda\right).$$

L'extrémité du déplacement $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_1'$ décrira donc autour de M_1 une ellipse infiniment petite dont les axes sont dirigés suivant le rayon vecteur et perpendiculairement à ce rayon. L'aire de cette ellipse est à celle du cercle dans le rapport $(r_1 dr_1 : r\,dr)$, qui représente le rapport des aires infiniment petites des deux figures autour des points correspondants.

Pour la transformation $r + r_1 = 2a$, ce rapport devient

$$-\frac{r_1}{r} = \frac{r - 2a}{r}.$$

Il prendrait la même valeur $\frac{r_1}{r}$ au signe près, dans la transformation conchoïdale (non-réciproque) dont la loi est $r_1 - r = a$.

Pour la transformation $r^{-1} + r_1^{-1} = 2a^{-1}$, le rapport des aires est $-r_1^2 r^{-2}$. Pour l'inversion, dont la loi est $rr_1 = a^2$, ce rapport est $-r_1^2 r^{-2}$. Sauf le signe, cette remarquable propriété de l'inversion lui est commune avec l'homothétie.

Il est intéressant de chercher les transformations qui conservent les aires. Il faut, pour cela, que le rapport $(r_1 dr_1 : r\,dr)$ reste constamment égal à 1 si les aires sont parcourues dans le même sens, ou à -1, si

elles sont parcourues en sens contraires. Dans le premier cas on a $r_1^2 - r^2 = \text{const.}$, transformation non réciproque ; dans le second cas, on trouve une transformation par rayons vecteurs réciproques: $r^2 + r_1^2 = 2a^2$.

Cette formule montre que les aires $d\sigma$, $d\sigma_1$ des secteurs élémentaires ayant le pôle pour sommet, vérifient la relation

$$d\sigma + d\sigma_1 = a^2 d\theta,$$

d'où

$$\sigma + \sigma_1 = a^2\theta.$$

Ceci n'est pas en contradiction avec ce qui précède; car les aires σ, σ_1 ne correspondent pas à des figures transformées l'une de l'autre; et c'est à ce cas exclusivement que s'appliquent les résultats que nous avons énoncés.

6. Pour terminer, nous indiquerons, en les résumant, quelques propriétés de l'inversion appliquée à certaines courbes anallagmatiques.

Chasles a démontré qu'un ovale de Descartes peut être engendré en joignant une origine fixe à tous les points d'une circonférence; en doublant l'angle que forme chaque rayon vecteur avec une direction fixe et en portant sur la direction nouvelle ainsi obtenue une longueur proportionnelle au carré du rayon vecteur. Cela revient à dire, en employant la notation des équipollences, que si x représente un point variable d'une circonférence, x^2 représentera un point mobile sur un ovale de Descartes. On sait, d'autre part, que si le point x décrit une circonférence, $\sqrt{x}$ décrit un ovale de Cassini (*).

Or, la circonférence est anallagmatique dans la transformation par inversion. Donc $\frac{1}{x}$ représente aussi un point quelconque d'une circonférence. Par conséquent, d'après ce que nous venons de dire, $\frac{1}{x^2}$ se déplacera sur un ovale de Descartes, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ sur un ovale de Cassini. Ces deux courbes sont donc anallagmatiques, et il en est de même de toutes les courbes x^n, lorsque x parcourt une circonférence; l'exposant n peut être entier ou fractionnaire.

On peut écrire l'équipollence très générale de toutes les courbes anal-

(*) Voir, sur le même sujet, p. 64, la question 628 (Rép.).

lagmatiques par inversion, en employant la variation d'un seul paramètre réel z; si on se rappelle que

$$x = \frac{Az + B}{Cz + D}$$

représente une circonférence, on voit que toutes les courbes dont il s'agit sont représentées par

$$x = \left(\frac{Az + B}{Cz + D}\right)^n.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 525.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 144.)

Étant donnés dans un même plan deux triangles quelconques, on déplace l'un d'eux parallèlement à lui-même de manière qu'il devienne homologique à l'autre. Trouver le lieu du centre d'homologie et l'enveloppe de l'axe d'homologie. (J. NEUBERG.)

1° Soient ABC, abc deux triangles situés dans un même plan. Si les coordonnées de leurs sommets sont indiquées par (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), les droites Aa, Bb, Cc ont pour équations

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &\equiv x(Y_1 - y_1) - y(X_1 - x_1) + X_1 y_1 - x_1 Y_1 = 0, \\ \delta_2 &\equiv x(Y_2 - y_2) - y(X_2 - x_2) + X_2 y_2 - x_2 Y_2 = 0, \\ \delta_3 &\equiv x(Y_3 - y_3) - y(X_3 - x_3) + X_3 y_3 - x_3 Y_3 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Déplaçons le triangle ABC parallèlement à lui-même. Soit $A_1B_1C_1$ une nouvelle position de ABC telle que les triangles $A_1B_1C_1$, abc soient homologiques; les coordonnées des points A_1, B_1, C_1 seront de la forme $(X_1 + \alpha, Y_1 + \beta)$, $(X_2 + \alpha, Y_2 + \beta)$, $(X_3 + \alpha, Y_3 + \beta)$, et les équations des droites A_1a, B_1b, C_1c s'obtiennent en remplaçant dans (1), X et Y par $X + \alpha$ et $Y + \beta$.

Si entre ces nouvelles équations, on élimine α, β on trouve l'équation du lieu décrit par le centre d'homologie M de $A_1B_1C_1$, abc; mais si l'on élimine x, y, on a une équation de condition entre α et β qui représente le lieu décrit par A_1, car α et β sont les coordonnées de A_1 par rapport à deux axes Ax', Ay' parallèles aux axes primitifs Ox, Oy.

Le premier lieu a pour équation

$$\begin{vmatrix} \delta_1 & x-x_1 & y-y_1 \\ \delta_2 & x-x_2 & y-y_2 \\ \delta_3 & x-x_3 & y-y_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\delta_1\varepsilon_1 + \delta_2\varepsilon_2 + \delta_3\varepsilon_3 = 0,$$

après avoir posé

$$\varepsilon_1 = (x-x_2)(y-y_3) - (x-x_3)(y-y_2), \ldots$$

Observons que $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3 = 0$ sont les équations des côtés du triangle fixe *abc*. Le lieu de M est donc une conique circonscrite à ce triangle.

L'équation du lieu décrit par A_1 est

$$| Y+\beta-y_1, \quad X_1+\alpha-x_1, \quad X_1y_1 - Y_1x_1 + xy_1 - \beta x_1 | = 0.$$

Si on développe le déterminant suivant les éléments de la 3e colonne, on voit facilement que le lieu est une conique.

2° Soient maintenant

$$L_r x + M_r y + N_r = 0, \quad l_r x + m_r y + n_r = 0, \quad (r = 1, 2, 3)$$

les équations des côtés des triangles ABC, *abc*; celles des côtés du triangle $A_1B_1C_1$ sont de la forme

$$L_r(x+\alpha) + M_r(y+\beta) + N_r = 0.$$

Soit

$$\lambda x + \mu y + \nu = 0$$

celle de l'axe d'homologie de $A_1B_1C_1$, *abc*. Si l'on exprime que B_1C_1 et *bc*, C_1A_1 et *ca*, A_1B_1 et *ab* concourent sur cet axe, on trouve trois équations de condition :

$$\begin{vmatrix} L_r & M_r & L_r\alpha + M_r\beta + N_r \\ l_r & m_r & n_r \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 0, \quad (r = 1, 2, 3).$$

Si entre ces trois égalités, on élimine λ, μ, ν, on trouve l'équation du lieu du point A_1, car α, β sont les coordonnées de A_1 par rapport aux axes Ax', Ay'. Mais, si l'on élimine α, β, on obtient une relation en λ, μ, ν, qui représente l'enveloppe de l'axe d'homologie; cette équation est

$$| L_1(l_1\mu - m_1\lambda), \quad M_1(l_1\mu - m_1\lambda), \quad \Delta_1 | = 0,$$

Δ_r désignant le déterminant

$$\begin{vmatrix} L_r & M_r & N_r \\ l_r & m_r & n_r \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix},$$

qui, égalé à zéro, représente le point d'intersection de deux côtés correspondants des triangles ABC, *abc*. L'enveloppe est de la troisième classe.

Solution synthétique. Traçons une droite quelconque *d*, rencontrant les côtés du triangle *abc* aux points α, β, γ; des parallèles menées par ces points à BC, CA, AB forment un triangle A'B'C' homologique à *abc*. Soit M le centre d'homologie. Si on déplace la droite *d* parallèlement à elle-même, les points A', B', C' se meuvent sur les droites *a*M, *b*M, *c*M, qui restent fixes. Or, on peut trouver un triangle $A_1B_1C_1$, et un seul, dont les sommets sont sur les droites *a*M, *b*M, *c*M et dont les côtés sont égaux et parallèles à ceux de ABC, et dirigés dans le même sens.

Donc sur toute droite menée par *a*, il existe un point du lieu (M); mais le point *a* lui-même est un point simple de ce lieu, correspondant à un triangle $A_1B_1C_1$, dont les sommets B_1, C_1 se trouvent sur *ac*, *ab*; par suite, le lieu de M est une conique circonscrite au triangle *abc*.

Si l'on fait tourner la droite *d* autour d'un point fixe P, les points α, β, γ décrivent trois ponctuelles projectives; les droites B'C', C'A', A'B' se correspondent dans trois faisceaux projectifs, dont les centres sont à l'infini sur BC, CA, AB; donc les points A', B', C' décrivent trois hyperboles H_a, H_b, H_c, dont les asymptotes sont parallèles aux côtés des angles BAC, ABC, ACB. Or, le triangle A'B'C', dans ses variations, devient trois fois égal à ABC, car si l'on imprime à l'hyperbole H_a une translation parallèle, mesurée par AB, cette courbe vient couper H_b en trois points B_1, B_2, B_3 tels, que les parallèles à BA, menées par B_1, B_2, B_3 et terminées à H_a soient égales à BA.

Donc, on peut mener par P trois droites, axes d'homologie de *abc* et d'un triangle égal et parallèle à ABC. L'enveloppe de l'axe est donc de la troisième classe. (J. N.)

Autres solutions par MM. Brocard et Déprez.

Question 647.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 128.)

Deux droites qui se coupent en un point S ***sous un angle de*** 30° ***forment avec les droites isotropes menées par*** S, ***un faisceau équianharmonique, c'est-à-dire tel que les trois rapports anharmoniques fondamentaux du faisceau sont égaux. En conclure une construction simple du point qui, avec trois points donnés dont deux sont imaginaires conjugués, forme un groupe équianharmonique.*** (V. Retali.)

Solution d'après M. Klompers. *a*) On sait que les six rapports anharmoniques de quatre points en ligne droite peuvent être représentés par

$$\alpha,\ \frac{1}{\alpha},\ 1-\alpha,\ \frac{1}{1-\alpha},\ \frac{\alpha-1}{\alpha},\ \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

En exprimant que le premier est égal au quatrième, on trouve

$$\alpha^2-\alpha+1=0,\quad \text{ou}\quad \alpha=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2},$$

et l'on a, pour fixer les idées,

$$\alpha=\frac{1}{1-\alpha}=\frac{\alpha-1}{\alpha}=\frac{1+\sqrt{-3}}{2},\quad \frac{1}{\alpha}=1-\alpha=\frac{\alpha}{\alpha-1}=\frac{1-\sqrt{-3}}{2},$$

de sorte que trois des rapports anharmoniques sont égaux à l'une des racines cubiques imaginaires de -1, et les trois autres à la racine conjuguée. Les points considérés forment, dans ce cas, une ponctuelle équianharmonique.

b) Lorsqu'un angle constant tourne autour de son sommet S, ses côtés a, a' engendrent deux faisceaux projectifs dont les rayons doubles sont indépendants de la grandeur de l'angle mobile. Ces rayons doubles passent par les *points cycliques* et ont reçu le nom de droites isotropes.

Soient, par rapport aux deux axes SX, SY faisant l'angle θ, $y=mx$ $y=m'x$, les équations des droites a, a' ; nous aurons

$$\operatorname{tg}(aa')=\frac{(m'-m)\sin\theta}{1-(m+m')\cos\theta+mm'}.$$

L'hypothèse $m=m'$ entraine l'égalité

$$1-2m\cos\theta+m^2=0.$$

Les coefficients angulaires des droites isotropes menées par S sont donc

$$m_1=\cos\theta+\sin\theta\sqrt{-1},\quad m_2=\cos\theta-\sin\theta\sqrt{-1},$$

et le rapport anharmonique du faisceau formé par ces droites et les axe SX, SY a pour valeur

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1}}{\cos\theta - \sin\theta\sqrt{-1}} = (\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1})^2.$$

Dans le cas particulier où $\theta = 30^\circ$, on trouve

$$\frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{-1}\right)^2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3}).$$

Par conséquent, deux droites SX, SY qui se coupent sous l'angle de 30° et les droites isotropes passant par leur intersection S, sont les rayons d'un faisceau équianharmonique.

c) Soient a, a' les côtés d'un angle de grandeur constante, tournant autour de son sommet S; ils marquent sur une droite quelconque u deux ponctuelles projectives dont les points doubles E, F sont censés être obtenus en menant SO perpendiculaire à u et en prenant sur u les longueurs $OE = OF = OS\sqrt{-1}$. Si l'on porte sur u les longueurs réelles $Oe = Of = OS$, e et f sont les *points représentatifs* des points imaginaires E, F.

D'après cela, si l'on donne sur u deux points imaginaires conjugués E, F au moyen de leurs points représentatifs e, f et que par le milieu O de ef, on élève une perpendiculaire $OS = Oe$, les côtés d'un angle de grandeur constante, mobile autour de son sommet S, marquent sur u deux ponctuelles projectives dont les points doubles E, F sont représentés par e, f; et les droites imaginaires SE, SF sont les droites isotropes menées par S. Supposons l'angle mobile de 30°; alors si A est un point donné sur u et que l'on construise l'angle $ASA' = 30^\circ$, le faisceau S(EFAA') est équianharmonique. Le problème proposé par M. Retali est donc résolu : A' est le point qui, avec les points donnés E, F, A forme une ponctuelle équianharmonique.

Solution par M. Cl. Servais. Soit sur un cercle une projectivité cyclique définie par le groupe XYZ. Dans le triangle XYZ, les tangentes aux sommets rencontrent les cotés opposés en trois points situés sur une droite, qui coupe le cercle aux points doubles D et D_1 de la projectivité considérée. On a

$$\lambda = (XYZD) = (YZXD) = (XDYZ) = \frac{\lambda - 1}{\lambda};$$

donc si α et α' sont les racines cubiques imaginaires de l'unité négative, on a les égalités

$$(XYZD) = \alpha \quad (XYZD_1) = \alpha'.$$

Soit P le pôle de YZ, Q et R les points d'intersection de PX avec les droites YZ et DD_1; dans le quadrilatère PXYZ on a

$$(XPQR) = -1.$$

Cela étant, supposons que YZ soit la droite de l'infini, P sera le centre du cercle, R le milieu du rayon PX et la droite DD_1 sera parallèle à la tangente en X. Par conséquent

$$\text{arc } XD = \text{arc } XD_1 = 60^\circ;$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

Construction. Soient Y, Z, les points imaginaires considérés comme points doubles de l'involution (A_1B_1, A_2B_2). Sur A_1B_1 et A_2B_2 comme diamètres décrivons deux circonférences se coupant au point O. Joignons ce point au point réel donné X_1; cette droite coupe le premier cercle au point X. Au milieu du rayon passant par ce point, on élève une perpendiculaire rencontrant le cercle aux points D et D_1. Les droites OD et OD_1 sont coupées par la droite $X_1Y_1Z_1$ en deux points répondant à la question.

Question 662.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 240.)

Soient ABCD *un quadrilatère;* AB *et* CD, BC *et* DA *les couples de côtés opposés se coupant respectivement en* λ *et* μ; ω *et* ω' *des points divisant harmoniquement* $\lambda\mu$. *Démontrer que la conique qui passe par les six points* A, B, C, D, ω, ω' *est le lieu des points de contact des tangentes menées par* ω *et* ω' *à toutes les coniques inscrites dans le quadrilatère* ABCD.

(E. Lemoine.)

Solution par MM. Déprez *et* Decamps. Prenons $AB\mu$ pour triangle de référence et soient

$$Ax + By + Cz = 0,$$

$$f(x, y, z) \equiv \sqrt{lx} + \sqrt{my} + \sqrt{nz} = 0, \qquad (1)$$

les équations de la droite $DC\lambda$ et d'une conique inscrite dans le quadrilatère ABCD; nous aurons la condition

$$\frac{l}{A} + \frac{m}{B} + \frac{n}{C} = 0. \qquad (2)$$

La tangente au point (x, y, z) de la conique a pour équation

$$\alpha\frac{df(x,y,z)}{dx}+\beta\frac{df(x,y,z)}{dy}+\gamma\frac{df(x,y,z)}{dz}=0,$$

ou

$$\alpha\sqrt{\frac{l}{x}}+\beta\sqrt{\frac{m}{y}}+\gamma\sqrt{\frac{n}{z}}=0. \qquad (3)$$

Si nous considérons, dans cette équation, (α, β, γ) comme étant les coordonnées du point ω, nous obtiendrons l'équation qui représente le lieu des points de contact des tangentes menées par ω aux coniques inscrites dans le quadrilatère ABCD, en éliminant l, m, n entre les égalités (1), (2), (3). De (1) et (3), on tire les valeurs de $\sqrt{l}$, $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$, qui sont proportionnelles aux quantités

$$\gamma\sqrt{\frac{y}{z}}-\beta\sqrt{\frac{z}{y}},\quad \alpha\sqrt{\frac{z}{x}}-\gamma\sqrt{\frac{x}{z}},\quad \beta\sqrt{\frac{x}{y}}-\alpha\sqrt{\frac{y}{x}};$$

donc l'équation du lieu proposé est

$$\frac{x}{A}(y\gamma-z\beta)^2+\frac{y}{B}(z\alpha-x\gamma)^2+\frac{z}{C}(x\beta-y\alpha)^2=0. \qquad (4)$$

Ce lieu est donc, en général, du troisième ordre. Si le point ω est sur la droite $\lambda\mu$, dont l'équation est $Ax+By=0$, on peut représenter ses coordonnées par B, — A, γ et l'équation (4) devient, après suppression du facteur $Ax+By$,

$$\frac{\gamma^2xy}{AB}+z^2+\frac{(Ax+By)z}{C}=0.$$

Comme elle admet les solutions $(x=0,\ z=0)$, $(x=B,\ y=-A,\ z=\pm\gamma)$, elle représente une conique passant par les points A, B, C, D, ω et par le conjugué harmonique de ω par rapport à $\lambda\mu$.

Solution par M. Baudran, *du lycée de Rouen*. Prenons pour triangle de référence le triangle formé par les diagonales du quadrilatère ABCD.

Toute conique K inscrite à ce quadrilatère est conjuguée par rapport au triangle de référence; elle a donc pour équation

$$Ax^2+By^2+Cz^2=0. \qquad (1)$$

Les droites AB, BC, CD, DA peuvent être représentées par

$$-lx+my+nz+0,\quad lx-my+nz=0,\quad lx+my-nz=0,$$
$$lx+my+nz=0. \qquad (2)$$

Si l'on identifie (2) avec l'équation de la tangente au point (x', y', z'), laquelle est

$$Axx' + Byy' + Czz' = 0, \tag{3}$$

on voit que les coordonnées x', y', z' sont proportionnelles à $\frac{l}{A}, \frac{m}{B}, \frac{n}{C}$; en exprimant qu'elles satisfont à (1), on trouve

$$\frac{l^2}{A} + \frac{m^2}{B} + \frac{n^2}{C} = 0, \tag{4}$$

ce qui montre que les droites AB, BC, CD touchent également la courbe.

Les points de contact des tangentes menées d'un point fixe P (x', y', z') à la courbe K vérifient les équations (1) et (3); l'équation du lieu de ces points résulte donc de l'élimination de A, B, C entre (1), (3), (4). On obtient facilement

$$\frac{l^2x}{yz' - y'z} + \frac{m^2y}{zx' - z'x} + \frac{n^2z}{xy' - x'y} = 0. \tag{5}$$

Le lieu est donc une cubique. Lorsque le point P est situé sur $\lambda\mu$, on a $z' = 0$, et l'équation (5) se réduit à

$$n^2z^2 - \left(\frac{l^2x}{y'} - \frac{m^2y}{x'}\right)(xy' - x'y) = 0.$$

Elle représente une conique passant par les points

$$\begin{cases} z = 0, \\ nz \pm my = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ nz \pm lx = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0, \\ xy' - x'y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0, \\ l^2xx' - m'yy' = 0. \end{cases}$$

Ces points sont les sommets du quadrilatère proposé, le point P et son conjugué harmonique par rapport à la diagonale $\lambda\mu$.

Question 665.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 240.)

La chaînette d'égale résistance, qui a pour équation intrinsèque

$$\rho = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right)$$

est la seule ligne dont le rayon de courbure soit égal au segment de la normale intercepté par deux droites fixes parallèles. (E. Cesàro.)

Solution par M. E. Cesàro. Dire que le rayon de courbure d'une ligne, en un point quelconque, est égal au segment de la normale

intercepté par deux droites fixes parallèles, c'est dire que la *projection du rayon de courbure sur une droite fixe a une longueur constante.* On doit donc avoir $a = \rho \cos\varphi$, ou $\rho d\varphi + ds = 0$. Il s'en suit que

$$\frac{d\varphi}{\cos\varphi} + \frac{ds}{a} = 0;$$

d'où

$$\frac{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi} = e^{\frac{s}{a}}, \quad \frac{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi} = e^{-\frac{s}{a}}$$

puis

$$\rho = \frac{a}{\cos\varphi} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right).$$

Solution par MM. Molenbroek, Verniory et Joachimescu. Soit a la distance des droites fixes parallèles; alors la projection du rayon de courbure sur l'axe Oy, que nous supposons perpendiculaire aux deux parallèles, est constamment égale à a, ce qui s'exprime par l'équation

$$\rho = a\frac{ds}{dx}, \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{ds} = \frac{a}{\rho}. \tag{1}$$

On sait que

$$\rho = \left(\frac{ds}{dx}\right)^3 : \frac{d^2y}{dx^2}, \tag{2}$$

et en différentiant la formule

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds} : \frac{dx}{ds},$$

on trouve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}}{\left(\frac{dx}{ds}\right)^3}. \tag{3}$$

Des égalités (2) et (3), on déduit

$$\frac{1}{\rho} = \frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}. \tag{4}$$

La relation (1) donne

$$\frac{dx}{ds} = \frac{a}{\rho}, \quad \frac{dy}{ds} = \sqrt{1-\frac{a^2}{\rho^2}},$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{a}{\rho^2}\cdot\frac{d\rho}{ds}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{a^2}{\rho^2\sqrt{\rho^2-a^2}}\cdot\frac{d\rho}{ds},$$

ce qui transforme l'équation (4) en la suivante :

$$ds = \frac{a\,d\rho}{\sqrt{\rho^2 - a^2}}.$$

En intégrant, on trouve

$$\frac{s}{a} = l\left(\rho + \sqrt{\rho^2 - a^2}\right) + c.$$

La constante d'intégration c se réduit à $-la$, si l'on suppose que pour $s = 0$, $\rho = a$. On a donc

$$\frac{\rho}{a} + \sqrt{\frac{\rho^2}{a^2} - 1} = e^{\frac{s}{a}},$$

d'où

$$\rho = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right).$$

×Question 690.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 176.)

Rendre monôme l'expression

$$b\left(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B\right) + c\left(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C\right);$$

A, B, C *étant les angles d'un triangle rectiligne, et a, b, c les côtés opposés.*

Solution par M^me^ Prime et MM. François (La Haye), de Bozóky (Budapest), Emmerich, Sohie, A. Denys, Decamps, Cristesco, Joostens, G. Russo, V. de Strékalof (Saint-Pétersbourg).

On a

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = \frac{\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B}, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = \frac{\cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}C},$$

$$b = 4R\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}B, \quad c = 4R\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C.$$

Au moyen de ces valeurs, l'expression proposée prend la forme

$$\frac{4R}{\cos\frac{1}{2}A}\left(\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C + \cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\right) = 4R.$$

On peut aussi ne pas faire intervenir explicitement R, éliminer b ou c de l'expression donnée au moyen de la proportion $b : c = \sin B : \sin C$. On trouve ainsi pour valeur de l'expression donnée $(2b : \sin B) = (2c : \sin C) = (2a : \sin A)$.

Autre solution, par un abonné. On sait que

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A=\frac{r}{p-a},\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B=\frac{r}{p-b},\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C=\frac{r}{p-c}.$$

Donc l'expression proposée se ramène à

$$\frac{abcr}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{abc}{S}=4R.$$

QUESTION D'EXAMEN.

460. Construire un triangle isoscèle CAB, connaissant la base AB et la longueur des bissectrices adjacentes AA′, BB′.

Le trapèze isoscèle AB B′A′ étant inscriptible, on a

$$AA'.BB'=AB'.BA'+AB.A'B',$$

ou, à cause de $AB'=B'A'=A'B$,

$$\overline{AA'}^2=AB'(AB'+AB),$$

d'où AB′.

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**634.** (*Mathesis*, t. VIII, p. 279). Si m est un nombre entier, on a

$$\frac{1.3.5\ldots(2m+1)}{2.4.6\ldots(2m+2)}=\frac{1}{2}-m\frac{1}{2.4}+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{1.3}{2.4.6}-\text{etc.}$$

$$\frac{2.4.6\ldots 2m}{3.5.7\ldots(2m+1)}=1-m\frac{1}{3}+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{5}-\text{etc.}$$ (Cl. Servais.)

695. Soient O le centre, et F, F′ les foyers d'une ellipse. On prolonge un rayon quelconque OM de MM′ = OM, et l'on mène les tangentes M′P, M′Q. P, Q étant les points de contact, démontrer la relation

$$4M'P.M'Q=3M'F.M'F'.$$ (Gob.)

×**696.** Construire le triangle rectangle dont on connaît la hauteur relative à l'hypoténuse, ainsi que la distance du sommet de l'angle droit au pied de la bissectrice d'un angle aigu. (Cl. Thiry.)

Rectifications. Page 185, entre les lignes 12 et 13, insérer les mots suivants: L'élimination de k donne

$$\frac{(u-\xi)(2u-a)}{A}+\frac{(v-\eta)(2v-b)}{B}=0.$$

Page 199, n° 3, ligne 5, remplacer le premier 7 par 14, et ligne 8, par y.

SUR L'ANALYSE INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ;

par M. E. CATALAN.

(*Suite et fin;* voir p. 220-222.)

7. La question qui vient de nous occuper peut être rattachée, de la manière suivante, à la division des polynômes. Si l'on fait

$$X = \frac{(1-x)(1-x^{pq})}{(1-x^p)(1-x^q)},$$

et que l'on suppose les nombres p, q *premiers entre eux*, X est réductible à un polynôme entier(*).

De plus, si l'on prend $x = 2$, X se réduit à

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2^{(p-1)(q-1)}(2^{q-1}-1) - [1 + 2^p + 2^{2p} + \cdots + 2^{(q-2)p}]}{2^q - 1} \\ =&\frac{2^{(q-1)(p-1)}(2^{p-1}-1) - [1 + 2^q + 2^{2q} + \cdots + 2^{(p-2)q}]}{2^p - 1} = N, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

N *étant un nombre entier*(**).

En outre, si l'on représente par $\varphi(n)$ le nombre des solutions *entières, non négatives*, de l'équation

$$pa + qb = n, \quad (9)$$

on a

$$N = 1 + 2\varphi(1) + 2^2.\varphi(2) + \cdots + 2^{pq-p-q}\varphi(pq - p - q). \quad (10)$$

8. D'après Euler, *tout nombre entier est, d'une seule manière, la somme de plusieurs puissances de* 2(***).

Si donc 2^α est un terme de cette somme,

$$\varphi(\alpha) = +1.$$

Si, au contraire, 2^β n'entre pas dans la composition de N,

$$\varphi(\beta) = 0.$$

(*) *Nouvelles Notes d'Algèbre et d'Analyse* (1889, p. 84). Dans ce Mémoire, nous avons supposé, pour plus de simplicité, p et q *impairs;* mais cette restriction est inutile.

(**) *Loc. cit.*, p. 88.

(***) Autrement dit, un nombre ne peut s'écrire que d'une manière, dans le système de numération binaire.

9. Il est visible que la première expression de N peut être mise sous la forme un peu plus simple :

$$2^{pq-p-q}\,\frac{1+2^p+2^{2p}+\cdots+2^{(q-2)p}+2^{pq-p-q}}{2^q-1}.$$

Conséquemment :

$$\frac{1+2^p+2^{2p}+\cdots+2^{(q-2)p}+2^{pq-p-q}}{2^q-1}$$
$$=\frac{1+2^q+2^{2q}+\cdots+2^{(p-2)q}+2^{pq-p-q}}{2^p-1}=\textit{entier}. \qquad (10)$$

10. Soient, par exemple, $p=5$, $q=4$. La première fraction égale

$$\frac{1+2^5+2^{10}+2^{11}}{15}=\frac{1+32+1024+2048}{15}=\frac{3105}{15}=207.$$

La seconde :

$$\frac{1+2^4+2^8+2^{12}+2^{11}}{31}=\frac{1+16+256+4096+2048}{31}=\frac{6417}{31}=207.$$

Par suite,

$$N=2^{11}-207=1841;$$

ou, par la formule (10) :

$$1841=1+2\varphi(1)+2^2\varphi(2)+2^3\varphi(3)+2^4\varphi(4)+2^5\varphi(5)+2^6\varphi(6)+2^7\varphi(7)$$
$$+2^8\varphi(8)+2^9\varphi(9)+2^{10}\varphi(10)+2^{11}\varphi(11).$$

Mais, d'après la remarque d'Euler,

$$1841=1+2^4+2^5+2^8+2^9+2^{10}.$$

Donc, chacune des équations :

$$5x+4y=0,\quad 5x+4y=4,\quad 5x+4y=5,\quad 5x+4y=8,$$
$$5x+4y=9,\quad 5x+4y=10$$

admet une solution *non-négative*. Quant aux équations

$$5x+4y=1,\quad 5x+4y=2,\quad 5x+4y=3,\quad 5x+4y=6,$$
$$5x+4y=7,\quad 5x+4y=11;$$

elles ne peuvent être vérifiées par des nombres entiers.

11. Corollaires. I. *Si p est un nombre entier, non-divisible par* 3 :

$$1+2^p+2^{2p-1}=\mathcal{M}.\ 7;$$

II. *Si p est un nombre entier, non-divisible par* 5 :

$$1+2^p+2^{2p}+2^{3p}+2^{4p-5}=\mathcal{M}.\ 31;$$

III. *Si p est un nombre entier, non-divisible par* 7 :

$$1 + 2^p + 2^{2p} + 2^{3p} + 2^{4p} + 2^{5p} + 2^{6p-7} = \mathcal{M}.\ 127;$$

etc.

Liège. — Août 1890.

VARIÉTÉS.

Sur les différents systèmes de numération.

« Aristote avait observé que le nombre 4 peut très bien remplacer le nombre 10, comme base de la numération. Weichel publia à ce sujet, en 1687, le plan d'une *Arithmétique tétractique*. Simon Stevin, de Bruges, mort en 1633, avait aussi imaginé le système de numération duodécimale, se rapprochant beaucoup plus de notre manière de compter les mois de l'année, les heures du jour, les degrés de la circonférence. Quant au système de la numération binaire, auquel nous avons consacré deux Chapitres dans nos *Récréations mathématiques*, il date de cinquante-quatre siècles; il fut retrouvé par Leibniz.

« On peut donc se demander si l'adoption d'une base autre que dix n'eût pas été préférable; en d'autres termes, si l'accident de notre espèce qui fait que nous avons dix doigts aux deux mains, s'accorde avec les conditions requises pour que le système de numération chiffrée soit le plus parfait possible. Ceci exige qu'on distingue la notation des nombres entiers et abstraits de celle des nombres concrets et fractionnaires. Sous le rapport de l'application du système de numération à celui des mesures, et à la subdivision de l'unité concrète, on est convenu, ainsi que Buffon l'a remarqué, que le nombre *douze*, à cause de ses quatre diviseurs deux, trois, quatre, six, eût été une base plus commode que le nombre dix, qui n'a que deux diviseurs, deux et cinq.

« D'autre part, Auguste Comte avait remarqué que la structure de la main, composée de quatre doigts à trois phalanges, ou de douze phalanges, permet de représenter avec les deux pouces posés sur deux phalanges, tous les nombres jusqu'à treize fois douze; alors les phalanges de la main gauche représentent des unités simples, et celle de la main droite des *grosses*, ou unités de second ordre. Par suite, on pourrait ainsi compter sur ses phalanges dans le système duodécimal, plus facilement et plus loin que sur ses doigts, dans le système décimal. Mais, si l'on se reporte au *Calcul digital* ignoré de Comte, cette assertion est inexacte. Au moyen de ce calcul, professé dans les écoles, au temps de Charlemagne, on représentait avec les doigts des deux mains tous les nombres jusqu'à dix mille.

« Il serait plutôt permis de se demander si le choix d'une base inférieure à dix ne rendrait pas les calculs plus sûrs et plus rapides. En effet, B désignant la base du système de numération, il faut retenir de mémoire les $\frac{1}{2}(B-1)(B-2)$ valeurs différentes de la somme et du produit de deux nombres inégaux, et les $(B-1)$ valeurs des premiers carrés, des premiers cubes. Par conséquent, les premiers frais

de mémoire diminuent avec la base et les causes d'erreur seront moindres. Mais cet avantage est compensé par la nécessité d'employer plus de temps et de place pour écrire les nombres. »

Les lignes qui précèdent sont extraites d'une *Théorie des Nombres*, par M. Éd. Lucas. Le premier volume de cet important ouvrage paraîtra vers le 1er janvier 1891; en voici la table des matières :

Livre I. Nombres entiers.

Livre II. Nombres rationnels (Nombres fractionnaires. — Sommation des puissances numériques. — Nombres de Bernoulli. — Calcul symbolique. — Fonctions symétriques. — Déterminants.)

Livre III. Divisibilité arithmétique. Théorèmes de Fermat, Euler, Wilson, Clausen, Smith, Mansion, Césaro, etc.

Les savantes recherches de M. Éd. Lucas dans le domaine de l'Arithmétique supérieure nous sont un sur garant que sa *Théorie des nombres* sera lue avec intérêt et profit par les géomètres et les professeurs. (P. M. et J. N.)

×BIBLIOGRAPHIE.

Cours de Trigonométrie rectiligne, par E. Dessenon, *professeur au lycée Saint-Louis*. Paris, Nony, 1891 (282 pages, in 8°). Prix : 3 francs.

Sommaire : Chapitre préliminaire. Théorie des projections (pp. 1-17). Chapitre I. Arcs et angles (17-31). II. Lignes trigonométriques (31-55). III. Relations entre les lignes trigonométriques d'un angle quelconque (55-69). IV. Addition, soustraction, multiplication et division des arcs (69-99). V. Formules de transformation (99-122). VI. Tables trigonométriques (122-140). VII. Dérivées des fonctions circulaires (140-158). VIII. Équations et fonctions trigonométriques (158-201). IX. Résolution des triangles (cas élémentaires) (201-238). X. Applications et problèmes (238-269). — Note sur la formule de Moivre. — Des exercices bien choisis sont placés à la fin de chaque chapitre.

Le cours de M. Dessenon développe avec une grande clarté et dans un ordre méthodique, toutes les questions traitées habituellement dans les bons traités de trigonométrie.

Voici comment l'auteur fait connaître, dans l'Avertissement, le caractère distinctif de son livre. « Je me suis efforcé d'appliquer la théorie des projections toutes les fois que j'ai eu à démontrer une formule générale qui n'était pas la conséquence immédiate d'autres formules établies antérieurement. Le cosinus et le sinus sont définis, *les mesures des projections, sur des axes bien déterminés, de certains segments*. La théorie des projections est utilisée dès le début de la trigonométrie, et elle est la base des démonstrations des formules relatives aux triangles. Toutes les généralisations de formules, quelquefois si longues, si fastidieuses sont ainsi évitées. »

(J. N.)

Sur les projections et contre-projections d'un triangle fixe, et sur le système de trois figures directement semblables: par M. J. NEUBERG, professeur à l'université de Liége. Bruxelles, Hayez, 1890 (XVI-87 pages in 8°). Extrait des *Mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique.*

Voici une appréciation de ce mémoire, publiée dans la *Revue bibliographique belge* (septembre 1890, pp. 345-346):

« La première partie traite des projections orthogonales et des contre-projections d'un même triangle A sur différents plans (l'auteur appelle contre-projection d'un triangle toute section plane du prisme droit construit sur ce triangle).

« Ces recherches se rattachent aux deux problèmes suivants : Trouver un plan Q sur lequel le triangle A se projette suivant un triangle P semblable à un triangle donné C. — Trouver un plan Q' tel que la contre-projection P' de A sur ce plan soit semblable à C. M. Neuberg rappelle, en les généralisant et les démontrant plus simplement, des solutions déjà connues de ces questions et en tire une foule de conséquences du plus haut intérêt. Quelques-uns de ces théorèmes montreront à nos lecteurs l'attrait particulier et la profondeur que le savant professeur sait apporter dans les sujets d'apparence élémentaire.

« Les plans Q, Q' font le même angle avec le plan de A et leurs traces sur ce plan sont rectangulaires. — Les perpendiculaires abaissées des sommets de A sur les côtés correspondants de P et de P' rabattus autour des traces de leurs plans sur le plan de A, concourent respectivement en deux points D, D', etc.

« La seconde partie du mémoire traite du système de trois figures directement semblables. Ici encore, nous rencontrons un grand nombre de théorèmes originaux, dont plusieurs rendent intuitives des propositions énoncées par MM. Casey et M'Cay.

« La lecture du mémoire de M. Neuberg s'impose à tous ceux qui s'intéressent aux progrès de la nouvelle géométrie du triangle. Pour en faciliter l'étude, l'auteur a fait précéder son travail d'un résumé des principaux résultats qu'il a obtenus. »

(E S.)

Cours d'Algèbre élémentaire, par l'abbé F. VERHELST, docteur en philosophie, licencié en sciences physiques, professeur au collège Saint-Jean Berchmans, à Anvers. *Tome premier:* le calcul algébrique; les équations du premier degré. Bruxelles, E. Ramlot, libraire-éditeur, 1890.

Nous signalons avec plaisir ce nouveau *Cours d'Algèbre* aux lecteurs de *Mathesis*. Comme nous le disons dans le compte rendu détaillé que publie la livraison d'octobre de la *Revue des questions scientifiques*, cet ouvrage se distingue par des qualités sérieuses : une grande simplicité d'exposition, une large ampleur de développements des théories et des exemples, — allant quelquefois jusqu'à la prolixité, — un style clair et généralement très correct, une exécution typographique très soignée. Un choix de nombreux exercices accompagne chaque théorie.

Nous conseillons vivement aux professeurs d'examiner ce manuel, persuadé que beaucoup le trouveront facile et approprié à leur enseignement. (H. GELIN.)

Recueil de Problèmes d'Arithmétique, à l'usage des Écoles moyennes, des écoles normales, des classes d'humanités et des cours professionnels, par l'abbé E. Gelin, Docteur en Philosophie et en Théologie, professeur de Mathématiques et de Physique au collège Saint-Quirin à Huy. Deuxième édition, entièrement revue et considérablement augmentée. Bruxelles, société belge de librairie; Namur, Wesmael; Huy, chez l'auteur, 1890 (196 p. in 8°). Prix : fr. 1,75.

Cette nouvelle édition de l'excellent *Recueil* de M. l'abbé Gelin contient 545 problèmes de plus que la précédente. Voici, pour chaque chapitre, le nombre des questions proposées dans l'ancienne et dans la nouvelle édition.

Nombres entiers 101-133. Fractions ordinaires 130-177. Nombres décimaux 76-100. Mesures de longueur 50-64. Mesures de surface 44-46. Mesures agraires 50-60. Mesures de volume 25-32. Mesures pour le bois de chauffage 17-12. Mesures de capacité 40-50. Poids 53-51. Poids spécifiques 46-55. Monnaies 33-41. Nombres complexes 30-39. Puissances et racines 27-40. Rapports et proportions 18-25. Règle de trois 30-31. Règle conjointe 33-44. Partages proportionnels 30-45. Mélanges et alliages 44-55. Du titre des matières d'or et d'argent 50-64. Questions pour cent 116-150. Intérêt simple 76-116. Caisse d'épargne 5-6. Escompte 40-64. Rentes sur l'État 45-53. Actions et obligations 12-18. Change et arbitrages 10-11. Progressions 20-31. Logarithmes 0-20. Intérêt composé 25-26. Annuités 17-29. Questions d'arithmologie 0-100. Polygones 35-40. Cercle 31-40. Polyèdres 25-32. Cylindre 25-32. Cône 23-30. Sphère 23-38. Formules arithmétiques. Formules pour la mesure des surfaces et des volumes. Table de nombres usuels. Cette dernière table contient la racine carrée et la racine cubique des dix premiers nombres entiers (qui ne sont pas carrés ou cubes parfaits), de π, de π^{-1}, la racine cubique de $\frac{4}{6}\pi$ et $(6:\pi)$, les multiples les plus utiles de π et de π^{-1}, les logarithmes des nombres entiers de 2 à 19, de π et $\frac{4}{3}\pi$, la valeur de π^2 et celle de π^{-2}. Toutes les valeurs sont données avec dix décimales.

« Dans les cent cinquante premières pages du Recueil, on a marqué d'un astérisque les problèmes que l'on peut indifféremment résoudre par l'arithmétique ou par l'algèbre, et d'un double astérisque les problèmes dont la solution arithmétique offre des difficultés spéciales. »

---

*SUR QUELQUES SÉRIES DE POINTS REMARQUABLES DANS LE TRIANGLE;

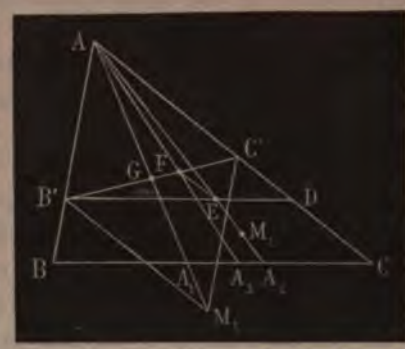
par M. Aug. Poulain, à Angers.

1. Problème. *Étant donnés deux points* M_1, M_2 *dans le plan du triangle* ABC, *construire un troisième point* M_3 *dont les coordonnées barycentriques soient égales aux produits* $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$ *des coordonnées barycentriques* $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ *de* M_1 *et* M_2.

Solution. Soient A_1, A_2 les points de rencontre des droites AM_1, AM_2

avec BC. Je dis que M_3 se déduit de M_1, M_2 par les deux opérations suivantes(*) :

1° (Le parallélogramme). Sur les côtés de l'angle A, on construit le parallélogramme $AC'M_1B'$, dont AM_1 est une diagonale.



2° (Le report). Sur la diagonale $B'C'$, on reproduit le rapport $A_2B : A_2C$; pour cela, on mène $B'D$ parallèle à BC et coupant AM_2 en E, ensuite EF parallèle à AC et rencontrant $B'C'$ en F.

La droite AF passe par le point cherché M_3.

Démonstration. Soient G le point d'intersection de AM_1 avec $B'C'$, A_3 celui de AF avec BC. Le faisceau des droites AC, AB, AF, AM_1 détermine sur les transversales CB, C'B' des quaternes de même rapport anharmonique; par conséquent,

$$\frac{A_3C}{A_3B} : \frac{A_1C}{A_1B} = \frac{FC'}{FB'} : \frac{GC'}{GB'}.$$

Or,

$$\frac{GC'}{GB'} = -1, \quad \frac{FC'}{FB'} = \frac{ED}{EB'} = \frac{A_2C}{A_2B} = -\frac{\beta_2}{\gamma_2}, \quad \frac{A_1C}{A_1B} = -\frac{\beta_1}{\gamma_1};$$

d'où

$$\frac{A_3C}{A_3B} = \frac{\beta_2\beta_1}{\gamma_2\gamma_1}.$$

Remarques. 1° On peut intervertir les rôles des points M_1, M_2.

(*) La double opération est effectuée successivement en deux sommets A, B du triangle de référence.

M. de Longchamps a obtenu une règle analogue (J. M. E., 1886, p. 178). Elle présente deux différences : on recourt au réciproque d'un des points et on ramène le cas du point $(\alpha_1\alpha_2, \cdots)$ à celui du point $\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \cdots\right)$.

2° La droite auxiliaire B'C' peut être remplacée par la sécante, dont la partie interceptée par l'angle A a son milieu en M_1; plus généralement, il suffit de prendre sur AC, AB des longueurs AB', AC' proportionnelles aux coordonnées normales y, z de M_1.

3. Problème. ***Étant donnés deux points dans le plan d'un triangle ABC, construire un troisième point dont les coordonnées barycentriques soient égales aux quotients des coordonnées barycentriques homologues des points donnés.***

Cette question revient à déduire, des points M_3, M_1 de la figure précédente, le point M_2. On construira donc le parallélogramme $AC'M_1B_1$; par le point d'intersection F des droites AM_3, B'C', on tirera une parallèle à AC jusqu'à la rencontre en E avec la droite B'D parallèle à BC. La droite AE passera par le point cherché.

3. *Cas particuliers.* 1° Si, dans le problème I, on fait coïncider les points M_1, M_2, on obtient le point $(\alpha_1^2, \beta_1^2, \gamma_1^2)$. En combinant ce dernier avec le point M_1, on obtient le point $(\alpha_1^3, \beta_1^3, \gamma_1^3)$; celui-ci conduit au point $(\alpha_1^4, \beta_1^4, \gamma_1^4)$, et ainsi de suite.

2° Du point (cos A, cos B, cos C), on déduit aisément le point $(\cos^n A, \ldots)$; de l'orthocentre (tg A, tg B, tg C), on déduit le point $(\mathrm{tg}^n A, \ldots)$.

3° Dans le problème I, prenons pour M_1 le centre du cercle inscrit, pour M_2 un point quelconque $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$; le point M_3 aura pour coordonnées $(a\alpha_2, b\beta_2, c\gamma_2)$. Dans ce cas, on a évidemment AB' = AC'.

Dans la construction du point $(a^2\alpha_2, b^2\beta_2, c^2\gamma_2)$, la droite B'C' devient une antiparallèle à BC.

4° En partant du centre du cercle inscrit, on peut obtenir les potentiels ordinaires (a^2, b^2, c^2), (a^3, b^3, c^3), ...

4. *Autre solution du problème I.* On peut donner une autre règle, qui généralise celle qu'a indiquée M. Neuberg pour les points réciproques d'ordre 1 (J. M. E., 1886, p. 113). 1° *Sur* AB, AC, *on prend les longueurs* AB', AC' *égales aux segments* A_1C, A_1B *déterminés par* AM_1 *sur* BC; 2° *on partage* B'C' *au point* F *dans le rapport* $z_2 : y_2$ des coordonnées normales de M_2. La droite AF passe par M_3.

Cette règle diffère de celle du n° 1 en ce que les distances AB', AC' sont maintenant proportionnelles aux coordonnées barycentriques (au lieu des coordonnées normales) de M_1 et que les segments de B'C' sont dans le rapport des coordonnées normales (au lieu des barycentriques) de M_2.

Pour la démontrer, observons que les transversales BC, B'C' du faisceau A (BCA_2A_1) donnent

$$\frac{A_2C}{A_2B} : \frac{A_1C}{A_1B} = \frac{FC'}{FB'} : \frac{GC'}{GB'}. \qquad (1)$$

Or, les perpendiculaires abaissées de G sur AC', AB' sont proportionnelles aux coordonnées y_1, z_1 de M_1, et les segments GC', GB' sont égaux à ces perpendiculaires divisées par sin C', sin B'; de plus

$$\sin C' : \sin B' = AB' : AC' = A_1C : A_1B = by_1 : cz_1.$$

De là, $FC' : FB' = c : b$. Substituant dans (1), on obtient

$$\frac{A_2C}{A_2B} = \frac{\beta_1}{\gamma_1} \cdot \frac{FC'.b}{FB'.c} = \frac{\beta_1\beta_2}{\gamma_1\gamma_2}.$$

5. *Sur quelques nouveaux points remarquables.* Soient α, β, γ les coordonnées barycentriques d'un point M. On sait que le point $\left(\frac{a^n}{\alpha}, \frac{b^n}{\beta}, \frac{c^n}{\gamma}\right)$ porte le nom de *réciproque d'ordre n*, de M. Le point $(\alpha a^n, \beta b^n, \gamma c^n)$, ou $(\alpha \sin^n A, \beta \sin^n B, \gamma \sin^n C)$, qui correspond à une opération plus simple sur (α, β, γ), n'ayant pas encore reçu de nom particulier, nous proposons de l'appeler le *sinusien d'ordre n* de M; inversement, ce dernier serait l'*antisinusien* du premier, ou le sinusien d'ordre $(-n)$. Si le sinus était remplacé par le cosinus ou la tangente, le point s'appellerait le *cosinusien* ou le *tangentien* d'ordre n de M. De la sorte M donne déjà naissance à trois séries de points.

Dans le cas particulier de $\alpha = \beta = \gamma$, les nouveaux points deviennent

$$I_n \equiv (a^n, b^n, c^n),$$

$$J_n = (\cos^n A, \cos^n B, \cos^n C), \quad H_n \equiv (\tang^n A, \tang^n B, \tang^n C).$$

Ces points seront les *sinusiens* proprement dits, etc. Les points I_n (a^n, b^n, c^n) sont aussi les potentiels proprement dits.

On peut déduire de M d'autres séries de points, en multipliant les angles par 2 ou $\frac{1}{2}$, 4 ou $\frac{1}{4}$, etc. Dans le cas des facteurs 2 et $\frac{1}{2}$, ces points peuvent s'appeler les doubles sinusiens, les demi-sinusiens.

Enfin, on peut remplacer les angles A, B, C par les différences B — C, C — A, A — B, ce qui donne les points

$$[\alpha \sin (B - C), \ldots], \quad [\alpha \cos (B - C), \ldots], \quad [\alpha \tang (B - C), \ldots], \text{ etc.}$$

6. *Construction des points précédents.* 1° Nous avons déjà indiqué la construction des sinusiens des différents ordres (n° 3).

2° Pour déterminer le premier cosinusien $J \equiv (\cos A, \ldots)$, il suffit d'observer que c'est le sinusien du réciproque de l'orthocentre et l'anti-sinusien du centre du cercle ABC. La construction suivante est très remarquable : Les bissectrices des angles BHC, CHA, AHB rencontrent respectivement BC, CA, AB en des points dont on prend les symétriques par rapport aux milieux de ces côtés; les droites qui joignent ces symétriques aux sommets opposés A, B, C concourent au point J.

3° Pour tous les autres points, il y a deux méthodes générales que nous allons indiquer avant de passer en revue les procédés qui sont particuliers à quelques-uns d'entre eux. Leurs coordonnées sont les sinus, cosinus ou tangentes d'angles A′, B′, C′ qui peuvent se déduire graphiquement de A, B, C; ainsi $A' = pA$, ou $\frac{A}{2p}$, ou $B - C$,.. donc ces lignes trigonométriques peuvent se construire sur le cercle trigonométrique, et on est ramené à chercher un point, sachant que ses coordonnées barycentriques sont proportionnelles à trois longueurs connues.

La seconde méthode est celle-ci : On construit un triangle M′BC dont les angles M′BC, M′CB sont égaux à B′, C′; la bissectrice de l'angle M′BC détermine sur BC le rapport de section que l'on cherche, etc.

7. *Quelques particularités de construction.* 1° Le point $(\sin 2A, \ldots)$ est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

Le point qui a pour coordonnées barycentriques $\cos 2A, \ldots$, ou $1 - 2\sin^2 A, \ldots$ divise la droite GK dans le rapport $2S \sin^2 A : 3$. Comme

$$\cos 2A = (1 - \sqrt{2}\sin A)(1 + \sqrt{2}\sin A),$$

le même point peut se déduire, au moyen de la règle du n° 1, des deux points $(1 - \sqrt{2}\sin A, \ldots)$, $(1 + \sqrt{2}\sin A, \ldots)$, qui divisent la droite GI dans le rapport $S \sin A\sqrt{2} : 3 = p\sqrt{2} : 3R$.

2° Le point $(\sin 4A, \ldots)$ résulte des deux points $(\sin 2A, \ldots)$, $(\cos 2A, \ldots)$.

3° Les points $\left(\sin^2\frac{A}{2}, \ldots\right)$, $\left(\cos^2\frac{A}{2}, \ldots\right)$ divisent harmoniquement la distance des points (1, 1, 1), (cos A, cos B, cos C) dans le rapport $(R + r) : 3R$. Leurs coordonnées étant mises sous la forme $(r_a - r, \ldots)$, $(r_b + r_c, \ldots)$ suggèrent un second mode de construction.

4° Le point $[\sin(B - C), \ldots]$ peut s'obtenir en observant que ses

coordonnées sont proportionnelles aux distances des milieux des côtés de ABC aux pieds des hauteurs correspondantes; on peut aussi le rattacher au point de Steiner, qui a pour coordonnées $\frac{1}{a \sin(B-C)}, \dots$

Le point $[\cos(B-C), \dots]$ est l'équicoordonné du centre du cercle des neuf points de ABC.

NOTES MATHÉMATIQUES.

14. ***Sur une propriété des courbes algébriques d'ordre m qui ont un point multiple d'ordre*** $(m-1)$, par M. H. BALITRAND, élève à l'École Polytechnique de Paris. L'équation

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

d'une courbe algébrique d'ordre m, renferme $\frac{m(m+3)}{2}$ coefficients arbitraires. Assujettir cette courbe à avoir, en un point donné, un point multiple d'ordre $m-1$, revient à établir entre ces coefficients $\frac{m(m-1)}{2}$ relations linéaires. L'équation (1) ne renferme plus alors que

$$\frac{m(m+3)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} = 2m$$

coefficients arbitraires; de sorte que si l'on assujettit la courbe (1) à passer par $2m-1$ points fixes, son équation ne renferme plus qu'un paramètre entrant sous forme linéaire, et que, par un point du plan passe une courbe et une seule telle que la courbe (1). Par le point multiple, menons deux droites arbitraires; les courbes (1) déterminent sur ces droites deux divisions homographiques, et les droites qui joignent les points homologues enveloppent une conique tangente aux deux droites considérées.

Cas particulier. Considérons un faisceau de coniques, et par un des points A de base du faisceau menons deux droites. Elles coupent chaque conique du faisceau en deux points; les cordes correspondantes enveloppent une conique tangente aux deux droites.

Si les droites considérées sont les droites isotropes issues du point A, l'enveloppe est une conique ayant pour foyer le point A.

On peut, au lieu des deux droites issues de A, considérer une conique

passant par deux des points de base A et B du faisceau ; l'enveloppe est encore une conique bi-tangente à la conique considérée.

15. *Sur une propriété des coniques* par Mme Prim. Dans le cours de *Géométrie analytique de Falisse*, on rencontre une démonstration, partiellement inexacte, du théorème suivant :

Lorsqu'une circonférence coupe une conique en quatre points C, D, E, F *les bissectrices des angles formés par un système de sécantes communes, telles que* CD, EF *sont parallèles aux axes principaux de la conique.*

Voici comment s'exprime l'auteur : « Je suppose d'abord qu'il s'agisse « d'une ellipse ; par le centre, je mène deux rayons OA, OB parallèles « aux cordes CD, EF ; on a

$$\frac{\overline{PC}.\overline{PD}}{\overline{PE}.\overline{PF}} = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OB}^2}.$$

« (P désigne le point de concours de CD, EF.)

« Mais puisque les deux cordes appartiennent au cercle, on a aussi :

$$\frac{\overline{PC}.\overline{PD}}{\overline{PE}.\overline{PF}} = 1,$$

« donc OA = OB. Ainsi les cordes CD, EF sont parallèles aux rayons « égaux de l'ellipse et par conséquent les bissectrices sont parallèles « aux axes.

« Dans l'hyperbole, il n'y a pas de rayons égaux à propremont parler ; « mais les rayons infinis dirigés suivant les asymptotes en tiennent « lieu ; car on démontre que la limite du rapport de deux rayons de « l'hyperbole est l'unité, lorsque les rayons tendent vers les asymptotes. « Ainsi dans l'hyperbole les cordes CD, EF sont parallèles aux « asymptotes et par conséquent les bissectrices sont parallèles aux axes.

« Cette propriété existe aussi pour la parabole, puisque la parabole « est la limite d'une ellipse. »

Si notre auteur s'était arrêté après avoir traité le cas de l'ellipse, nous n'aurions rien à reprendre dans sa démonstration ; il aurait même pu l'appliquer mot par mot à l'hyperbole. Mais en passant de l'ellipse à l'hyperbole, Falisse suppose que CD, EF sont parallèles aux diamètres *conjugués* égaux de l'ellipse, et il oublie qu'une sécante parallèle à une asymptote de l'hyperbole coupe la courbe en un point à distance infinie.

Je propose la démonstration suivante, qui s'appuie également sur le théorème de Newton et s'applique aux trois espèces de coniques.

Par un point P d'un axe principal de la conique, je mène les cordes *cd*, *ef* parallèles aux cordes CD, EF. Alors

$$\frac{PC \cdot PD}{PE \cdot PF} = \frac{pc \cdot pd}{pe \cdot pf}.$$

Si *cd* et *ef* sont symétriques par rapport à l'axe principal, on a $pc = pe$, $pd = pf$, d'où $PC \cdot PD = PE \cdot PF$; de sorte que les extrémités de deux cordes *antiparallèles* CD, EF appartiennent à une même circonférence. Réciproquement, si les points C, D, E, F appartiennent à une même circonférence, les cordes CD, EF sont antiparallèles; car s'il n'en était pas ainsi, on pourrait mener par E une corde EF′ antiparallèle à CD, et la circonférence CDE passerait à la fois par F et F′.

16. *Généralisation de la question* 666 par M. Deprez. La démonstration indiquée dans *Mathesis*, t. X, p. 46, s'applique aisément à la proposition suivante:

Par un point fixe P *de l'axe focal d'une ellipse ou d'une hyperbole, on mène une sécante quelconque, rencontrant la courbe en* M *et* M′. *De ces points, on mène les tangentes* MT, M′T′ *à une circonférence ayant son centre sur l'axe focal et touchant la conique. Démontrer qu'il existe une constante r telle que le produit* $(MT + r)(M'T' + r)$ *a une valeur invariable, quelle que soit la sécante menée par* P.

17. *Note sur la question* 530 (*Mathesis*, t. VI, p. 262), par M. E. Lucas. Pour mettre l'expression

$$N = 24(1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5) + 1$$

sous la forme d'une somme de deux carrés, il suffit d'observer que

$$N = 2n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1) + 1$$
$$= [n^2 + (n+1)^2][(n^2 + n - 1)^2 + (n^2 + n)^2].$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 429.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 94.)

Si des parallèles menées par les sommets d'un tétraèdre ABCD *rencontrent les faces opposées aux points a, b, c, d, le volume du tétraèdre abcd est triple de celui de* ABCD. (Malet.)

Solution par M. Mosnat. Soient (x_1, y_1, z_1), ... les coordonnées

des points A, B, C, D rapportées à trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, dont le premier est parallèle à Aa; les coordonnées de a, b, c, d sont

$$(x'_1, y_1, z_1),\ (x'_2, y_2, z_2),\ (x'_3, y_3, z_3),\ (x'_4, y_4, z_4).$$

Les points (a, B, C, D), ... étant dans un même plan, on a

$$\begin{vmatrix} x'_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x'_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \ \ldots .$$

Or,

$$6 \text{ vol. } abcd = \begin{vmatrix} x'_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x'_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x'_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x'_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Si de ce dernier déterminant on retranche les quatre précédents, on trouve

$$6 \text{ vol. } abcd = -\begin{vmatrix} 3x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ 3x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ 3x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ 3x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = -18 \text{ vol. ABCD}.$$

Généralisation. Rapportons la figure au tétraèdre de référence ABCD. Soient x, y, z, u les coordonnées barycentriques absolues d'un point quelconque P, de sorte que

$$x + y + z + u = 1,$$

et soient a, b, c, d les points où les droites AP, BP, CP, DP rencontrent les plans BCD, ... Les coordonnées absolues de a seront

$$0, \quad \frac{y}{y+z+u} = \frac{y}{s-x}, \quad \frac{z}{s-x}, \quad \frac{u}{s-x},$$

s désignant la somme

$$x + y + z + u.$$

Le rapport m des volumes $abcd$, ABCD est égal au déterminant formé

avec les coordonnées absolues des points a, b, c, d; par conséquent,

$$m = \begin{vmatrix} 0 & y & z & u \\ x & 0 & z & u \\ x & y & 0 & u \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} : (s-x)(s-y)(s-z)(s-u),$$

d'où

$$m(s-x)(s-y)(s-z)(s-u) = -3xyzu. \qquad (1)$$

Donc le lieu d'un point P tel, que le volume *abcd* soit constant, est une surface du quatrième ordre. Lorsque $m = -3$, l'équation (1) se décompose en deux autres

$$s = 0, \quad \Sigma x \Sigma xy - \Sigma xyz = 0,$$

de sorte que le lieu est formé par le plan de l'infini et par une surface du troisième ordre.

M. Pisani a donné une très bonne solution en prenant pour axes les droites DA, AB, DC; M. F. X. a traité la question par les quaternions. Le théorème de M. Malet fait l'objet de la question 8047 de l'*Educational Times;* nous en avons signalé la généralisation dans la question 8116 (mai 1885). (J. N.)

Question 521.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 119.)

Une corde AB, *de longueur donnée, se meut dans un cercle. On en joint les extrémités à un point fixe quelconque* P. *Trouver les lieux décrits par les points suivants :* 1° *le centre du cercle circonscrit au triangle* PAB; 2° *le centre du cercle inscrit;* 3° *le point de concours des hauteurs;* 4° *les pieds des hauteurs.* (de Rocquigny.)

Solution par M. Verniory. Le lieu du centre C du cercle PAB s'obtient facilement en coordonnées polaires $\rho = OC$, $\omega = COP$. Car, soit M le milieu de AB, et posons $OM = a$, $MA = b$, $OP = p$, $OA = r$; nous aurons

$$\overline{MC}^2 = CA^2 - \overline{MA}^2 = CP^2 - b^2,$$

d'où

$$(a-\rho)^2 = \rho^2 + p^2 - 2\rho p \cos\omega - b^2, \qquad \rho = \frac{r^2 - p^2}{2(a - p\cos\omega)}.$$

Le point C décrit donc une conique ayant pour foyer le point O; cette

courbe est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que $p < a$, $p > a$ ou $p = a$.

Soit H l'orthocentre du triangle PAB. Les droites CM, PH sont parallèles : PH = 2CM et OM est constant. Par conséquent, le point H décrit une conchoïde d'une conique semblable au lieu du point C.

Appelons P', A', B' les pieds des hauteurs du triangle PAB. Le point P' engendre une podaire de la circonférence, enveloppe de la corde AB.

Cherchons l'enveloppe de la hauteur AA'. En prenant pour axes OP et le diamètre perpendiculaire, on peut représenter les coordonnées des points A et B par $r\cos(\alpha \pm \delta)$, $r\sin(\alpha \pm \delta)$, où δ est une constante et α une variable. L'équation de AA' sera

$$y - r\sin(\alpha + \delta) = \frac{p - r\cos(\alpha - \delta)}{r\sin(\alpha - \delta)}[x - r\cos(\alpha + \delta)]$$

ou

$$[y\cos\delta + (x-p)\sin\delta]\sin\alpha - [y\sin\delta - (x+p)\cos\delta]\cos\alpha = \frac{px}{r} + r\cos 2\delta.$$

Ajoutons cette équation et sa dérivée par rapport à α, après avoir élevé les deux égalités au carré; nous aurons

$$[y\cos\delta + (x-p)\sin\delta]^2 + [y\sin\delta - (x+p)\cos\delta]^2 = \left(\frac{px}{r} + r\cos 2\delta\right)^2,$$

ou

$$x^2\left(1 - \frac{p^2}{r^2}\right) + y^2 - 2py\sin 2\delta + p^2 - r^2\cos^2 2\delta = 0.$$

L'enveloppe de AA' est donc une conique dont il est facile de déterminer les axes principaux. Le lieu de A' est la polaire de P par rapport à cette courbe; c'est donc une inverse de conique. Pour passer à l'enveloppe de BB', il suffit de changer δ en $-\delta$.

Les équations des droites PA, PB, AB étant

$$y = \frac{r\sin(\alpha \pm \delta)}{r\cos(\alpha \pm \delta) - p}(x - p), \quad x\cos\alpha + y\sin\alpha = r\cos\delta,$$

les coordonnées du centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle PAB vérifient les égalités

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - r\cos\delta = \rho,$$

$$(x-p)\sin(\alpha+\delta) - y\cos(\alpha+)\delta + \frac{py}{r} = \pm\rho\sqrt{1 + \frac{p^2}{r^2} - 2pr\cos(\alpha+\delta)},$$

$$(x-p)\sin(\alpha-\delta) - y\sin(\alpha-\delta) + \frac{py}{r} = \pm\rho\sqrt{1 + \frac{p^2}{r^2} - 2pr\cos(\alpha-\delta)},$$

entre lesquelles il faut éliminer α et ρ, si l'on veut avoir l'équation du lieu du centre.

Autres solutions analytiques par MM. Brocard et Déprez. Ce dernier Correspondant traite en même temps d'autres questions analogues, mais sans trouver de résultats suffisamment simples.

M. Cl. Servais détermine géométriquement les degrés de quelques-uns des lieux proposés dans la question 521. 1° Sur tout diamètre OU du cercle donné, il existe deux points qui sont les centres de cercles circonscrits aux triangles PAB; car on peut mener deux cordes AB et A'B', perpendiculaires à OU et ayant une longueur donnée. Le point O lui-même n'étant pas le centre d'un tel cercle, le lieu du centre est une conique; ce sera une hyperbole, une parabole ou une ellipse, suivant que l'on peut mener du point P deux tangentes réelles, une seule ou aucune à l'enveloppe de la corde AB. 2° Soit PV une droite parallèle à OU; elle renferme les orthocentres des deux triangles PAB dont la base est perpendiculaire à OU. Mais le point P est lui-même orthocentre de deux triangles PAB rectangles en P; donc le lieu de l'orthocentre est du 4me degré, avec un point double en P. 3° La hauteur AA' enveloppe une conique; car si une droite menée par P rencontre la circonférence donnée aux points B, B_1, et qu'on prenne *dans le même sens* les arcs BA, B_1A_1 égaux à celui que doit sous-tendre une corde de la longueur donnée, les perpendiculaires abaissées de A, A_1 sur la droite BB_1 sont les seules tangentes de l'enveloppe perpendiculaires à BB_1. 4° Les pieds des hauteurs AA', BB' décrivent des podaires de coniques, c'est-à-dire des courbes du 4me ordre.

×Question 574.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 148 et t. X, p. 152.)

Lorsque n est impair,

$$C_{2n,n} + 10\,C_{2n-2,n-1} = \mathcal{M}.\,(n+2). \qquad (1)$$

(E. Catalan.)

Solution par M. Emmerich. On a

$$C_{2n-2,n-1} = C_{2n,n} \cdot \frac{n}{2(2n-1)};$$

d'où, en désignant par N le premier membre de (1) :

$$N = C_{2n,n}\left(1 + \frac{5n}{2n-1}\right) = C_{2n,n}\left(3 + \frac{n+2}{2n-1}\right).$$

Or

$$3C_{2n,n} = \frac{3(n+2)(n+1)}{n(n-1)} C_{2n,n-2} = \mathcal{M}(n+2),$$

car $n+2$ est premier avec n et ne peut avoir avec $n-1$ d'autre diviseur commun que la différence $(n+2)-(n-1)=3$. De plus,

$$C_{2n,n}=\frac{2(2n-1)}{n-1}C_{2n-2,n}=\mathscr{M}.(2n-1),$$

$2n-1$ et $n-1$ étant premiers entre eux. Par conséquent, N est divisible par $n+2$.

Autre solution par M. JOACHIMESCU (Husi, Roumanie).

×Question 675.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 48.)

Le rapport anharmonique de quatre points A, B, C, D ***d'une conique est égal à la racine carrée du rapport anharmonique du faisceau*** P (ABCD), ***qui a pour centre le pôle*** P ***de la corde*** AB. (G. TARRY.)

Solution par M. ANDERSON (Galway). Soient $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ les équations de PA, PB, AB et $\alpha\beta=\lambda\gamma^2$ celle de la conique. Si nous représentons les droites AC, AD par $\gamma=\mu\alpha$, $\gamma=\nu\alpha$, le rapport anharmonique du faisceau A (BPCD) sera égal à $\frac{\mu}{\nu}$. Mais, si, dans l'équation de la conique, nous remplaçons γ par $\mu\alpha$ ou $\nu\alpha$, nous obtenons les équations des droites PC, PD sous la forme $\beta=\lambda\mu^2\alpha$, ou $\beta=\lambda\nu^2\alpha$; donc le rapport anharmonique du faisceau P (BACD) a pour valeur $\frac{\mu^2}{\nu^2}$.

NOTE. Dans sa ***Géométrie de position***, p. 174, v. Staudt énonce le théorème suivant dont la question 675 n'est qu'un cas particulier : ***Si*** M, N, A, B, A_1, B_1 ***sont six points d'une conique et*** S ***le point d'intersection des droites*** AA_1, BB_1, ***l'on a***

$$S(MNAB)=(MNAB)(MNA_1B_1).$$

Soient A_2, B_2, C les points d'intersection de MN avec les droites AA_1, BB_1, A_1B; on aura

$$\begin{aligned}S(MNAB)&=(MNA_2B_2)=(MNA_2C)(MNCB_2)\\&=A_1(MNAB)\times B(MNA_1B_1)=(MNAB)(MNA_1B_1).\end{aligned}$$

Pour démontrer la question 675, on peut projeter la conique suivant une circonférence de telle façon que les droites AB, CD deviennent paral-

lèles; alors, si A', B' sont les points de rencontre de CD avec PA, PB, on aura

$$\mathrm{ABCD} = \frac{\mathrm{CA'}}{\mathrm{DA'}}, \quad \mathrm{P(ABCD)} = \frac{\mathrm{CA'}}{\mathrm{DA'}} : \frac{\mathrm{CB'}}{\mathrm{DB'}},$$

d'où, à cause de $\mathrm{DA'} = \mathrm{CB'}$,

$$\mathrm{P(ABCD)} = (\mathrm{ABCD})^2.$$

Si $(\mathrm{ABCD}) = -1$, on a $\mathrm{P(ABCD)} = 1$ et les droites PC, PD coïncident; autrement dit, les tangentes en A et B se coupent sur CD.

(SERVAIS.)

Autre solution par M. DÉPREZ.

×Question 679.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 72.)

Résoudre l'équation

$$\sqrt{abx(x-a-b)} + \sqrt{bcx(x-b-c)} + \sqrt{cax(x-c-a)} = \sqrt{abc(a+b+c)}. \qquad \text{(GRAM.)}$$

Solution par M. DE STRÉKALOF (*St-Pétersbourg*). Posons

$$\sqrt{bcx(x-b-c)} = \alpha, \quad \sqrt{cax(x-c-a)} = \beta, \quad \sqrt{abx(x-a-b)} = \gamma,$$
$$\sqrt{abc(a+b+c)} = \delta.$$

On voit facilement que α, β, γ, δ représentent les doubles des aires des triangles dont les côtés sont respectivement

$$b+c, \quad x-b, \quad x-c;$$
$$c+a, \quad x-c, \quad x-a;$$
$$a+b, \quad x-a, \quad x-b;$$
$$b+c, \quad c+a, \quad a+b.$$

Considérons le triangle ABC construit avec les côtés $b+c$, $c+a$, $a+b$. Il existe dans son plan un point O dont les distances aux sommets A, B, C sont égales à $x-a$, $x-b$, $x-c$; c'est ce qui résulte de la relation $\alpha+\beta+\gamma=\delta$.

D'après des formules connues,

$$\sin\frac{1}{2}\mathrm{CAO}=\sqrt{\frac{a(x-a-c)}{(x-a)(c+a)}},\quad \cos\frac{1}{2}\mathrm{CAO}=\sqrt{\frac{cx}{(x-a)(c+a)}},$$

$$\sin\frac{1}{2}\mathrm{BAO}=\sqrt{\frac{a(x-a-b)}{(x-a)(a+b)}},\quad \cos\frac{1}{2}\mathrm{BAO}=\sqrt{\frac{bx}{(x-a)(a+b)}},$$

$$\sin\frac{1}{2}\mathrm{CAB}=\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}.$$

En substituant ces valeurs dans la relation

$$\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{CAB}=\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{CAO}\cos\tfrac{1}{2}\mathrm{BAO}+\cos\tfrac{1}{2}\mathrm{CAO}\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{BAO},$$

on obtient, après quelques simplifications,

$$bc(x-a)=b\beta+c\gamma.$$

Par analogie

$$ca(x-b)=c\gamma+a\alpha,\quad ab(x-c)=a\alpha+b\beta.$$

Retranchant de la somme des deux dernières égalités la première, on trouve

$$x(ca+ab-bc)-abc=2a\alpha=2a\sqrt{bcx(x-b-c)}$$

ou

$$[(ca+ab-bc)^2-4a^2bc]x^2+2abc(ab+bc+ca)x+a^2b^2c^2=0.$$

Le coefficient de x^2 peut prendre la forme

$$\mathfrak{S}b^2c^2-2abc\mathfrak{S}a=\mathfrak{S}^2bc-4\delta^2;$$

par conséquent, l'équation précédente se ramène à

$$(x\mathfrak{S}bc+abc)^2=4\delta^2x^2$$

d'où, en extrayant la racine carrée des deux membres

$$x=\frac{-abc}{bc+ca+ab\pm 2\delta}.$$

D'après ce qui a été dit ci-dessus, l'équation proposée répond au problème suivant : Trouver le rayon x d'une circonférence O tangente extérieurement à trois circonférences données A, B, C dont les rayons sont a, b, c et qui se touchent deux à deux. Ce problème a été proposé au concours général de mathématiques élémentaires en 1875; on en trouve une solution dans les *Nouvelles Annales*, 1876, p. 318; la valeur de x peut être écrite ainsi

$$\frac{1}{x}=\frac{2}{r}\pm\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

r désignant le rayon du cercle inscrit au triangle ABC. (J. N.)

Question 687.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 152.)

Les rayons vecteurs MF, MF' *d'un point d'une ellipse rencontrent la courbe une seconde fois en* P, P'.

Trouver 1° *le lieu du pôle de la corde* PP'; 2° *le lieu du point de rencontre de la corde* PP' *avec la tangente menée en* M; 3° *le lieu du point de rencontre* R *des perpendiculaires élevées en* F *sur* FM, *et en* F' *sur* F'M.

(H. Brocard.)

Solution par M. Déprez. 1° Soient $(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$ les coordonnées de M; celles de P, P' sont

$$x = a\frac{2ac - (a^2+c^2)\cos\varphi}{a^2+c^2-2ac\cos\varphi}; \quad x = a\frac{-2ac-(a^2+c^2)\cos\varphi}{a^2+c^2+2ac\cos\varphi};$$

$$y = \frac{-b^2\sin\varphi}{a^2+c^2-2ac\cos\varphi}; \quad y = \frac{-b^2\sin\varphi}{a^2+c^2+2ac\cos\varphi}.$$

On en conclut l'équation de la droite PP':

$$a(a^2+c^2)y\sin\varphi + b^2x\cos\varphi + ab^2 = 0. \qquad (1)$$

Donc, si X, Y sont les coordonnées du pôle Q de cette droite, on a

$$\frac{aY}{(a^2+c^2)\sin\varphi} = \frac{X}{b\cos\varphi} = -\frac{a}{b};$$

en éliminant φ entre ces relations et l'identité $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, on trouve

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{b^2Y^2}{(a^2+c^2)^2} = 1.$$

Le lieu géométrique du point (X, Y) est donc une ellipse concentrique avec la courbe donnée et ayant pour axes $2a$, $2(a^2+c^2):b$.

Remarque. Le point Q est situé sur la normale au point M et sur l'ordonnée du point diamétralement opposé à M.

2° La tangente au point M a pour équation

$$ay\sin\varphi + bx\cos\varphi = ab. \qquad (2)$$

Les coordonnées du point N où elle coupe PP' vérifient donc les équations (1) et (2); or, de celles-ci on déduit

$$\sin\varphi = -\frac{b^3}{c^2y}, \quad \cos\varphi = \frac{a^3}{c^2x},$$

d'où, en éliminant φ,

$$\frac{a^4}{x^2}+\frac{b^4}{y^2}=c^4.$$

Le lieu de N est donc une *Kreuzcurve*.

3° Soient H l'orthocentre du triangle MFF', P le pied de l'ordonnée de M; R est le symétrique de H par rapport au centre C de l'ellipse. Il suffit donc de chercher le lieu de H. Si x, y sont les coordonnées de ce point, on a

$$x=\mathrm{CP}=a\cos\varphi,\quad y=\mathrm{HP}=\frac{-\mathrm{PF}.\mathrm{PF}'}{\mathrm{MP}}=\frac{x^2-c^2}{b\sin\varphi},$$

d'où l'équation de la courbe décrite par H :

$$y=\frac{a^2(x^2-c^2)}{b\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Le point R décrit la même ligne.

Autres solutions par MM. Bellens et A. Denys.

×Question 693.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 216.)

Trouver dans le plan d'un triangle ABC *deux directions telles que les droites* AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1, CC_2 *menées par les sommets parallèlement à ces directions rencontrent les côtés opposés en six points* A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 *situés sur une même circonférence.* (Gob.)

Solution par M. Denys. A cause des droites parallèles BB_1 et CC_1, BB_2 et CC_2, l'on a

$$\mathrm{AB}.\mathrm{AC}=\mathrm{AB}_1.\mathrm{AC}_1=\mathrm{AB}_2.\mathrm{AC}_2.$$

Par hypothèse,

$$\mathrm{AB}_1.\mathrm{AB}_2=\mathrm{AC}_1.\mathrm{AC}_2.$$

D'où l'on déduit aisément

$$\mathrm{AB}_1=\mathrm{AC}_2,\quad \mathrm{AB}_2=\mathrm{AC}_1.$$

Donc le centre de la circonférence $B_1C_2C_1B_2$ est situé sur la bissectrice de l'angle BAC ou de son adjacent supplémentaire.

Il résulte de là que le centre O de la circonférence cherchée coïncide

avec le centre de l'une des circonférences tangentes aux trois côtés du triangle ABC.

Soit M la projection de O sur AB. On a

$$AC_1 + AC_2 = 2AM, \quad AC_1.AC_2 = AB.AC; \qquad (1)$$

donc on connaît la somme et le produit des inconnues AC_1, AC_2.

Par conséquent,

$$(AC_1 - AC_2)^2 = 4\overline{MC_1}^2 = 4\overline{AM}^2 - 4AB.AC,$$

$$\overline{OC_1}^2 = \overline{MC_1}^2 + \overline{OM}^2 = \overline{AM}^2 - AB.AC + \overline{OM}^2 = \overline{AO}^2 - AB.AC.$$

Soient I, I', I'', I''' les centres des cercles qui touchent les trois côtés de ABC. Si l'on prend pour O le centre I', on a

$$\overline{I'C_1}^2 = \overline{AI'}^2 - AB.AC = \overline{AI'}^2 - AI.AI' = AI'.II',$$

d'où une construction facile de IC_1. Le point I ne fournit pas de solution réelle.

QUESTIONS D'EXAMEN.

461. On divise les côtés AB, BC, CD, DA d'un parallélogramme ABCD, aux points M, N, P, Q en parties proportionnelles, de sorte que

$$\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PD} = \frac{DQ}{QA} = \frac{p}{q},$$

les droites MD, BP rencontrent la droite AN en X, Y, et la droite CQ en U, Z. Évaluer le rapport des parallélogrammes XYZU, ABCD.

$$\frac{XYZU}{ABCD} = \frac{XYZU}{MBPD} \cdot \frac{MBPD}{ABCD} = \frac{q}{p+q} \cdot \frac{UX}{DM};$$

$$\frac{DU}{UX} = \frac{DQ}{QA} = \frac{p}{q}, \quad \frac{MX}{BY \text{ ou } DU} = \frac{AM}{MB} = \frac{p}{p+q},$$

donc

$$DU = \frac{p}{q} UX, \quad MX = \frac{p^2}{q(p+q)} UX,$$

$$DM = DU + MX + UX = \left[1 + \frac{p}{q} + \frac{p^2}{q(p+q)}\right] UX.$$

D'où enfin

$$\frac{XYZU}{ABCD} = \frac{q^2}{p^2 + (p+q)^2}.$$

462. Soient a, b, c les côtés du triangle ABC, et α, β, γ les rayons des cercles circonscrits aux triangles BCD, CAD, ABD, D étant un point quelconque du plan ABC. Démontrer la relation

$$\frac{a^2b^2c^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} = \left(\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\right)\left(-\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\right)(\cdots)(\cdots).$$

(Sharp, *Ed. Times*, question 9254.)

Si, dans la formule de l'aire d'un triangle :

$$16S^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c),$$

on remplace a, b, c, S par 2R sin A, 2R sin B, 2R sin C, $2R^2$ sin A sin B sin C, on obtient une relation entre les sinus de trois angles A, B, C ayant pour somme π. Cette relation ne change pas, quand on remplace A, B, C par $m\pi \pm$ A, $m\pi \pm$ B, $p\pi \pm$ C; donc elle a lieu pour trois angles A', B', C' liés par l'égalité $A' \pm B' \pm C' = k\pi$. Prenons pour A', B', C' les angles BDC, CDA, ADB et observons que $\sin A' = \frac{a}{2\alpha}$, ...

463. Résoudre l'équation

$$\sqrt{x^2-a^2-b^2}+\sqrt{x^2-b^2-c^2}+\sqrt{x^2-c^2-a^2} = x,$$

et vérifier les solutions, a, b, c étant des nombres positifs donnés.

(*Journal de* VUIBERT.)

Solution

$$x = \pm\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{2abc}.$$

Soit $a > b > c$; alors la valeur positive de x vérifie l'équation proposée pourvu que les radicaux soient pris avec les signes + et que l'on ait $\frac{1}{c^2} < \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$; si l'on a $\frac{1}{c^2} > \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$, on prend les radicaux avec les signes —, +, +.

QUESTIONS PROPOSÉES.

***697.** Par les sommets A, B, C d'un triangle et par trois points α, β, γ pris sur les côtés BC, CA, AB, on fait passer trois circonférences $A\beta\gamma$, $B\gamma\alpha$, $C\alpha\beta$; puis, par A, B, C, trois parallèles AL, BM, CN rencontrant ces circonférences respectivement en L, M, N. Démontrer que L, M, N sont sur une même ligne droite avec le point I commun aux trois circonférences. (E. CATALAN.)

698. Etant donnés un point A et un angle CBD, trouver sur les côtés de l'angle deux points C, D, équidistants de A et tels que l'angle CAD soit égal à un angle donné. (F. F.)

DÉTERMINATION DES FOYERS, DES DIRECTRICES ET DES AXES DANS LES CONIQUES,

D'APRÈS LA CONCEPTION DE PLUCKER;

par M. VICTOR LAC DE BOSREDON, professeur à la Faculté catholique des Sciences d'Angers.

La conception de Plücker offre un exemple saisissant des avantages que l'on peut tirer de la théorie des quantités imaginaires associée à la théorie de l'infini. Elle est déjà employée pour les courbes de degré supérieur, où elle sert de définition aux foyers; mais elle est à peine mentionnée dans l'étude des coniques. On peut en déduire cependant une méthode extrêmement simple pour la détermination des foyers et des directrices dans les courbes du second ordre. Elle conduit aussi facilement à l'équation des axes. C'est ce que je me propose de démontrer dans ce mémoire.

Pour poser nettement la question, il est nécessaire de rappeler, en les précisant, quelques principes, assez mal définis du reste en général, relatifs à la théorie des points à l'infini.

Notions sur les points à l'infini. Si x et y sont les coordonnées d'un point du plan et que l'on pose $x = \frac{x'}{z'}$, $y = \frac{y'}{z'}$, x et y seront infinis pour la valeur $z' = 0$, en supposant que x' et y' restent finis, supposition toujours permise, puisque les trois variables x', y', z' ne sont déterminées que par leurs rapports.

Il en résulte que pour tous les points situés à l'infini on a $z' = 0$. Si donc on remplace dans l'équation d'une ligne plane x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, on obtiendra les points de la ligne situés à l'infini, en faisant dans son équation $z = 0$.

Si dans une équation algébrique de degré m, on remplace x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, et qu'on multiplie par z^m, on rendra cette équation homogène.

L'équation du premier degré

$$ax + by + c = 0,$$

rendue homogène devient

$$ax + by + cz = 0.$$

Elle représente une ligne droite, quelles que soient les valeurs des coefficients. Il en sera de même si $a = b = 0$. Mais alors elle se réduit à $cz = 0$ ou $z = 0$. Ainsi $z = 0$ représente une ligne droite, et, comme tous les points situés à l'infini sont caractérisés par la relation $z = 0$, on peut dire que tous les points à l'infini sont en ligne droite.

La droite qui renferme tous les points situés à l'infini est appelée la *droite de l'infini*.

L'équation

$$ax + by + cz = 0$$

est vérifiée quand on y fait à la fois

$$z = 0, \quad ax + by = 0.$$

L'équation $z = 0$ représente la droite de l'infini; l'équation $ax + by = 0$ représente une droite issue de l'origine. Comme deux droites se coupent en un seul point, l'intersection de ces deux droites détermine un point *unique* situé à l'infini. On peut donc dire qu'une droite n'a qu'un point à l'infini. La droite $ax + by = 0$ dont la direction détermine le point de l'infini relativement à la droite

$$ax + by + c = 0,$$

s'appelle le *rayon infini* de cette ligne.

Comme l'équation $ax + by = 0$ est la même pour toutes les parallèles à la droite $ax + by + c = 0$, toutes ces parallèle srencontrent la droite de l'infini au même point; elles passent toutes par le même point de l'infini. Ce point, qu'on pourrait appeler *le point parallèle*, a pour coordonnées homogènes

$$\left(z = 0, \ x = 1, \ y = -\frac{a}{b}\right).$$

Considérons maintenant une équation algébrique du degré m. En groupant les termes d'une manière convenable, on pourra mettre cette équation sous la forme

$$\varphi_m(x, y) + z\varphi_{m-1}(x, y) + z^2\varphi_{m-2}(x, y) + \cdots + z^m\varphi_0(x, y) = 0,$$

$\varphi_p(x, y)$ indiquant d'une manière générale l'ensemble des termes de degré p en x et y.

On satisfera à cette équation, en posant à la fois

$$z = 0, \quad \varphi_m(x, y) = 0.$$

Or, $\varphi_m(x, y) = 0$ représente m droites issues de l'origine. Comme $z = 0$ est la droite de l'infini, les m droites, issues de l'origine, sont les *rayons infinis* de la courbe. Chacun de ces rayons rencontrant la droite de l'infini en un point, on peut dire que la courbe a m *points à l'infini*. Ces points sont d'ailleurs réels ou imaginaires.

Ainsi, dans les courbes algébriques on obtient les rayons infinis en égalant à zéro l'ensemble des termes du degré le plus élevé. En particulier, si l'on considère l'équation générale des coniques

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

les rayons infinis seront fournis par l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0.$$

On voit que toutes les coniques ont deux rayons infinis, réels ou imaginaires, et par suite deux points à l'infini. Si $AC - B^2 > 0$, l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$$

a ses racines imaginaires; donc l'ellipse n'a pas de point réel à l'infini.

Si $AC - B^2 > 0$ l'équation a ses racines réelles; donc l'hyperbole a deux points réels à l'infini.

Si $AC - B^2 = 0$, l'équation a ses racines égales; donc la parabole a deux points confondus à l'infini et l'on peut considérer cette courbe comme tangente à la droite de l'infini.

Dans le cercle, représenté en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

les rayons infinis ont pour équation

$$x^2 + y^2 = 0, \quad \text{ou} \quad y = \pm x\sqrt{-1}.$$

Toutes les circonférences ont donc les deux mêmes points imaginaires à l'infini. Ces points sont appelés *points cycliques*, *points circulaires à l'infini* ou *ombilics*. Les points cycliques ont pour coordonnées rectangulaires

$$(z = 0, \quad x = 1, \quad y = \pm\sqrt{-1});$$

les directions déterminées par les coefficients angulaires $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$ s'appellent *directions isotropes*.

Toute droite menée par un point cyclique est parallèle à une direction isotrope. Car si la droite $y = mx + kz$ passe par un point cyclique

$(1, \sqrt{-1}, 0)$, son équation sera vérifiée par les coordonnées de ce point; on aura donc $m = \sqrt{-1}$.

Réciproquement, toute droite parallèle à une direction isotrope passe par un point cyclique. Car si la droite $y = mx + kz$ est parallèle à une direction isotrope, on a $m = \sqrt{-1}$. L'équation précédente devient donc $y = x\sqrt{-1} + kz$, et l'on voit qu'elle est vérifiée par les coordonnées du point cyclique $(0, 1, \sqrt{-1})$.

Foyers des coniques. Ces principes étant posés, considérons l'équation

$$(1) \qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (mx + ny + t)^2$$

en coordonnées rectangulaires. Elle représente une ellipse, une hyperbole, ou une parabole, suivant que la quantité $m^2 + n^2$ est inférieure, supérieure ou égale à l'unité.

L'équation (1) est susceptible d'une interprétation géométrique remarquable.

Soient F le point ayant pour coordonnées (α, β) et CD la droite représentée par l'équation

$$mx + ny + t = 0.$$

La distance du point M (x, y) de la conique au point F aura pour expression

$$\mathrm{MF} = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}.$$

D'un autre côté, la perpendiculaire MP abaissée du point M sur la droite CD aura pour valeur

$$\mathrm{MP} = \frac{mx + ny + t}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Il en résulte

$$\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MP}} = \frac{\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}}{mx + ny + t}\sqrt{m^2 + n^2}$$

et comme, en vertu de l'équation (1),

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = mx + ny + t$$

il vient

$$\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MP}} = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

Ainsi il existe dans le plan de la conique un point F et une droite CD

tels que le rapport des distances d'un point quelconque de la conique à ce point F et à cette droite CD est une quantité constante. Ce point a reçu le nom de *foyer* et la droite est la *directrice* de la conique.

Remarquons maintenant que l'équation (1) peut s'écrire :

$$(2)\quad [y-\beta-(x-\alpha)\sqrt{-1}][y-\beta+(x-\alpha)\sqrt{-1}]=(mx+ny+t)^2.$$

Considérons d'un autre côté l'équation

$$(3)\qquad \alpha\beta=\delta^2,$$

où α, β, δ sont des polynômes du premier degré en x et y. Cette dernière représente une conique dans laquelle les droites $\alpha=0$, $\beta=0$ sont deux tangentes et la droite $\delta=0$, la corde de contact.

Si l'on compare (2) et (3), on voit que les deux droites imaginaires

$$(4)\quad y-\beta-(x-\alpha)\sqrt{-1}=0,\quad y-\beta+(x-\alpha)\sqrt{-1}=0$$

sont deux tangentes de la conique (1) et la directrice est la corde de contact de ces deux tangentes. Or les tangentes imaginaires (4) sont parallèles aux directions isotropes. D'ailleurs, elles se coupent au point (α, β), c'est-à-dire au foyer. On peut donc considérer le foyer comme le point d'intersection de deux tangentes imaginaires parallèles aux directions isotropes, et la directrice comme la corde de contact ou la polaire de ces deux tangentes. Donc, si l'on mène à la conique deux tangentes respectivement parallèles aux deux directions isotropes, le point d'intersection de ces deux tangentes sera un foyer de la courbe. Comme une droite parallèle à une direction isotrope passe par un point cyclique et réciproquement, on peut dire aussi que, si par les deux points cycliques on mène des tangentes à la conique, le point d'intersection de ces deux tangentes sera un foyer de la courbe. Dans tous les cas, la corde de contact de ces deux tangentes sera une directrice de la conique.

En partant de cette conception, il est facile de déterminer les foyers et les directrices des coniques.

Ellipse. Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

On peut mener à cette courbe deux tangentes parallèles à la direction définie par le coefficient angulaire m, et ces tangentes ont pour équation

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$$

Si la direction est isotrope, on aura $m = \pm\sqrt{-1}$; les deux tangentes menées à l'ellipse parallèlement à la première direction isotrope seront donc représentées par l'équation

$$y = x\sqrt{-1} \pm \sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{-1}, \qquad (5)$$

et les deux tangentes menées parallèlement à la seconde direction isotrope, par l'équation

$$y = -x\sqrt{-1} \pm \sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{-1}. \qquad (6)$$

Pour avoir les foyers, il faut chercher les points d'intersection d'une tangente (5) avec une tangente (6). On obtient quatre points ayant pour coordonnées

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = c\sqrt{-1}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -c, \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = +c, \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0. \\ y = -c\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Nous supposons

$$a > b \quad \text{et} \quad c = +\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Il y a donc dans l'ellipse deux foyers réels situés sur le grand axe et deux foyers imaginaires sur le petit; ces points sont, deux à deux, symétriques par rapport au centre.

Cherchons l'équation de la directrice dans chacun des cas qui peuvent se présenter. La directrice est la polaire du foyer. Or la polaire du point (x', y') a pour équation

$$\frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} = 1.$$

Il faut donc remplacer dans cette équation x' et y' par les coordonnées du foyer. On trouve ainsi respectivement

$$y = \frac{b^2}{c}\sqrt{-1}, \quad x = -\frac{a^2}{c}, \quad x = \frac{a^2}{c}, \quad y = -\frac{b^2}{c}\sqrt{-1}.$$

Il y a donc dans l'ellipse deux directrices réelles et deux imaginaires. Les deux directrices réelles sont perpendiculaires au grand axe et à la même distance du centre, $\frac{a^2}{c}$. Les deux directrices imaginaires sont perpendiculaires au petit axe et à la même distance du centre, $\frac{b^2}{c}\sqrt{-1}$.

Hyperbole. Considérons maintenant l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

On obtiendra tous les résultats relatifs à cette courbe, en remplaçant b^2 par $-b^2$ dans les résultats trouvés pour l'ellipse.

L'hyperbole a donc quatre foyers qui ont pour coordonnées, en posant ici $\sqrt{a^2+b^2}=c$,

$$\begin{cases} x=0; \\ y=c\sqrt{-1}; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-c; \\ y=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=c; \\ y=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=0; \\ y=-c\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Deux de ces foyers sont réels et situés sur l'axe transverse; les deux autres, situés sur l'axe imaginaire, sont imaginaires.

Les directrices ont, respectivement, pour équations

$$y=-\frac{b^2}{c}\sqrt{-1}, \quad x=-\frac{a^2}{c}, \quad x=\frac{a^2}{c}, \quad y=\frac{b^2}{c}\sqrt{-1}.$$

Parabole. Considérons enfin la parabole $y^2=2px$. On ne peut mener à cette courbe qu'une tangente parallèle à la direction m, et elle a pour équation

$$y=mx+\frac{p}{2m}.$$

Si la direction m est isotrope, on aura $m=\sqrt{-1}$ ou $m=-\sqrt{-1}$. De là les deux équations

$$y=x\sqrt{-1}+\frac{p}{2\sqrt{-1}}, \quad y=-x\sqrt{-1}-\frac{p}{2\sqrt{-1}}.$$

Ces deux tangentes se coupent en un point unique

$$y=0, \quad x=\frac{p}{2}.$$

Par conséquent, la parabole a un foyer unique à distance finie, et ce foyer a pour coordonnées

$$\left(x=\frac{p}{2}, \quad y=0\right).$$

La polaire a ici pour équation

$$y'y=p(x+x').$$

En remplaçant x' et y' par les coordonnées du foyer, on trouve

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Il y a donc dans la parabole une directrice unique, qui est perpendiculaire sur l'axe de la courbe, et le sommet partage en deux parties égales la distance du foyer à cette directrice.

Autre méthode. On peut encore obtenir les foyers au moyen de l'équation quadratique du couple de tangentes menées d'un point (x', y', z') à une conique. Si l'on substitue dans cette équation aux coordonnées (x', y', z') les coordonnées $(1, \sqrt{-1}, 0)$ de l'un des points cycliques, on obtiendra une équation de la forme

$$P + \rho\sqrt{-1} = 0. \tag{7}$$

En substituant dans la même équation les coordonnées $(1, -\sqrt{-1}, 0)$ de l'autre point cyclique, on obtiendra l'équation

$$P - \rho\sqrt{-1} = 0, \tag{8}$$

qui ne diffèrera de la précédente que par le signe de $\sqrt{-1}$. Or, les foyers sont les intersections des lignes (7) et (8), et les points communs à ces deux lignes sont fournis par les équations

$$P = 0, \quad \rho = 0,$$

prises simultanément. Il suffira donc de former l'équation (7), pour avoir immédiatement les foyers de la conique.

Considérons, par exemple, l'ellipse rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

l'équation quadratique des tangentes issues du point (x', y', z') est, en coordonnées homogènes,

$$\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - z'^2\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2\right) = \left[\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - zz'\right]^2.$$

En posant,

$$x' = 1, \quad y' = \sqrt{-1}, \quad z' = 0,$$

on trouve

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2\right) = \left(\frac{x}{a^2} + \frac{y\sqrt{-1}}{b^2}\right)^2;$$

et en faisant $z = 1$, pour revenir aux coordonnées ordinaires, on a

$$y^2 - x^2 + a^2 - b^2 - 2xy\sqrt{-1} = 0;$$

les foyers seront donc les points d'intersection des deux lieux

$$xy = 0, \quad y^2 - x^2 + a^2 - b^2 = 0;$$

ce qui donne les quatre solutions

$$y = 0, \quad x = \pm\sqrt{a^2 - b^2},$$
$$x = 0, \quad y = \pm\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{-1}.$$

Considérons encore la parabole $y^2 = 2px$; l'équation quadratique des tangentes est ici

$$(y'^2 - 2px'z')(y^2 - 2pxz) = [y'y + p(x'z + z'x)]^2.$$

Si l'on pose

$$x' = 1, \quad y' = \sqrt{-1}, \quad z' = 0,$$

elle devient

$$-(y^2 - 2pxz) = (y\sqrt{-1} + pz)^2,$$

et, en faisant $z = 1$, on trouve

$$2x - p - 2y\sqrt{-1} = 0.$$

Par conséquent, les foyers seront fournis par les deux équations

$$2x - p = 0, \quad y = 0,$$

qui n'admettent qu'une solution.

Axes des coniques. La conception de Plücker conduit aussi facilement à l'équation des axes dans les coniques.

Soit

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation générale des coniques en coordonnées rectangulaires. L'équation quadratique des tangentes issues du point (x', y', z') est, en coordonnées homogènes

$$\begin{aligned}&(Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + 2Dx'z' + 2Ey'z' + Fz'^2)\\ &\times (Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2)\\ &= [Ax'x + B(y'x + x'y) + Cy'y + D(z'x + zx') + E(z'y + y'z) + Fz'z]^2.\end{aligned}$$

Si le point (x', y', z') est un point cyclique $(1, \sqrt{-1}, 0)$, cette

équation deviendra, en posant $z = 1$, pour revenir aux coordonnées ordinaires,

$$(A + 2B\sqrt{-1} - C)(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F)$$
$$= [Ax + B(x\sqrt{-1} + y) + Cy\sqrt{-1} + D + E\sqrt{-1}]^2;$$

en séparant la partie réelle et la partie imaginaire, on obtient les deux équations

$$(A - C)(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F)$$
$$= (Ax + By + D)^2 - (Bx + Cy + E)^2,$$

$$B(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F) = (Ax + By + D)(Bx + Cy + E),$$

qui déterminent les coordonnées des foyers.

Si l'on retranche ces équations l'une de l'autre, après avoir multiplié la première par B, la seconde par A — C, on obtient l'équation

$$B(Ax + By + D)^2 - B(Bx + Cy + E)^2$$
$$- (A - C)(Ax + By + D)(Bx + Cy + E) = 0$$

qui peut s'écrire

$$B(f'_x)^2 - B(f'_y)^2 - (A - C)f'_x f'_y = 0. \tag{9}$$

On en déduit, en résolvant par rapport à f'_y

$$f'_x\sqrt{4B^2 + (C - A)^2} - (C - A)f'_x + 2Bf'_y = 0, \tag{10}$$

$$f'_x\sqrt{4B^2 + (C - A)^2} + (C - A)f'_x - 2Bf'_y = 0. \tag{11}$$

Ces deux droites, passant par les foyers de la conique, ne peuvent être que les axes de la courbe, et par suite l'équation (9) est l'équation du système d'axes.

Dans le cas de la parabole, comme $B^2 = AC$, l'équation (10) devient

$$Af'_x + Bf'_y = 0, \tag{12}$$

et l'équation (11),

$$Cf'_x - Bf'_y = 0 \tag{13}$$

les équations (12) et (13) représentent les axes de la parabole. La droite (12) est l'axe ordinaire de la courbe, l'équation (13) développée se réduit à

$$(AC - B^2)x + CD - BE = 0$$

et, comme $AC - B^2 = 0$, elle représente la droite de l'infini. Le second axe de la parabole se confond par conséquent avec la droite de l'infini. Comme les droites (12) et (13) passent par les quatre foyers de la courbe,

on voit que deux de ces foyers se trouvent sur la droite de l'infini. Les deux autres sont situés sur l'axe ordinaire de la parabole; mais un seul est à distance finie, de sorte qu'en réalité, la courbe a trois foyers sur la droite de l'infini. On peut d'ailleurs se rendre compte de ce fait en remarquant que dans la parabole la droite de l'infini est tangente à la courbe. Par conséquent deux des tangentes menées par les points cycliques, coïncident avec la droite de l'infini; les deux autres déterminent le foyer unique de la parabole situé à distance finie.

SUR L'ANALYSE INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ;

par M. E. Catalan.

(Addition).

12. *Théorème de Paoli.* Ce théorème, dont il a été fréquemment question, depuis quelque temps, se trouve dans les *Opuscula analytica* (Livourne, 1780), de Pierre Paoli. Il est ainsi conçu(*) :

« Quaeratur valor β qui praebeat $n - a\beta$ per b divisibilem, et numerus modorum quaesitus aequalis erit numero integro proxime minori quantitatis

$$\frac{n - a\beta}{ab} + 1\,(**) \text{ ».}$$

13. *Théorème de Le Besgue.* A la p. 56 des *Exercices*, on lit cette intéressante remarque :

L'équation $ax + by = c$ *n'est jamais possible, en entiers positifs, pour*

(*) M. Cremona, mon illustre confrère et ami, a eu la bonté de faire copier, dans la bibliothèque du Prince Boncompagni, un long extrait des *Opuscula*.

(**) n est ce que nous désignons par c. Le Besgue a ainsi traduit ces quatre lignes: « *Le nombre des solutions, en nombres positifs, est égal à l'unité, plus l'entier immédiatement inférieur à* » $\frac{c - a\beta}{ab}$ (*Exercices d'analyse numérique*, p. 52, 1859). L'équation est $ay + bx = c$; β est la *moindre* valeur de y (0, 1, 2, ... $b - 1$) qui rende $c - a\beta$ divisible par b. On suppose $c > a\beta$.

Le savant arithmologue démontre ensuite, assez simplement, que le théorème de Paoli peut être remplacé par celui que j'ai publié en 1844.

$c = ab - (a + b)$; *elle l'est toujours pour* $c > ab - (a + b)$. On suppose $c < ab$.

14. Corollaire. *Dans l'équation* $ax + by = c$ *on peut supposer* $c < ab - (a + b)$ (*Mathesis*, octobre 1890, p. 221).

Liége, 4 décembre 1890.

BIBLIOGRAPHIE.

E. Mosnat. *Problèmes de Géométrie analytique.* Tome I. Un volume in-8°, de 350 pages. Paris, librairie Nony. Prix : 5 fr.

Voici la division de ce recueil, et le nombre des problèmes par chapitre :

Ligne droite : 11 problèmes résolus, 37 proposés. — *Cercle :* 10 résolus, 33 proposés. — *Lieux géométriques :* 14 résolus, 64 proposés. — *Des coniques en général :* 10 résolus, 38 proposés. — *Tangentes :* 12 résolus, 61 proposés. — *Normales :* 7 résolus, 37 proposés. — *Asymptotes :* 7 résolus, 21 proposés. — *Centre :* 13 résolus, 22 proposés. — *Diamètres :* 10 résolus, 23 proposés. — *Axes, sommets :* 12 résolus, 23 proposés. — *Foyers :* 18 résolus, 41 proposés. — Géométrie de l'espace : *Ligne droite et plan :* 5 résolus, 25 proposés.

Chaque chapitre est précédé d'un bon résumé des notions théoriques qui s'y rapportent. L'auteur donne les solutions analytiques (et quelquefois géométriques) des problèmes posés aux examens écrits de l'école centrale depuis 1862 et aux écoles navale, des ponts et chaussées et des mines de Saint-Étienne depuis une dizaine d'années.

Le livre de M. Mosnat est appelé à rendre de grands services aux professeurs et aux élèves. Nous sommes heureux de pouvoir le recommander, sans réserves, aux établissements belges : il s'adapte parfaitement au programme de la première scientifique des athénées et collèges de notre pays. (J. N.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 283.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 231 et t. VIII, p. 261.)

Trouver la valeur de l'intégrale

$$I = \int_{\infty} \frac{x^n dx}{\sqrt{(P_n x^n + P_{n-1} x^{n-1} + \cdots + P_1 (x+1)^{m-1}}}$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$P_i = \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+m-1)}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

m désignant un nombre entier plus grand que l'unité, et n un entier positif quelconque. (S. Realis.)

Solution par M. P. Ruex On a

$$P_k = \frac{1.2..(k+m-1)}{1.2...k.1.2..(m-1)} = \frac{m(m+1)...(m+k-1)}{1.2.3...k}.$$

Donc

$$X = 1 + P_1 x + P_2 x^2 + \cdots + P_n x^n$$
$$= 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m+1)}{1.2} x^2 + \cdots + \frac{m(m+1)...(m+n-1)}{1.2...n} x^n$$
$$= \text{partie de } (1-x)^{-m} \text{ de degré inférieur à } (n+1).$$

L'intégrale I peut s'écrire

$$I = \int x^n X^{\frac{1}{m}-1} dx.$$

de manière que

$$\frac{dI}{dx} = x^n X^{\frac{1}{m}-1}. \qquad (1)$$

La forme du second membre de (1) suggère la substitution

$$I = u X^{\frac{1}{m}}.$$

On trouve pour déterminer u la relation

$$\frac{du}{dx} X^{\frac{1}{m}} + \frac{u}{m} \frac{dX}{dx} X^{\frac{1}{m}-1} = x^n X^{\frac{1}{m}-1},$$

ou

$$\frac{du}{dx} X + \frac{u}{m} \frac{dX}{dx} = x^n. \qquad (2)$$

Écrivons pour X le développement de $(1-x)^{-m}$, diminué de tous les termes de degré supérieur à n, pour $\frac{dX}{dx}$, les termes du développement de $-m(1-x)^{-m-1}$ de degré inférieur à n. La dernière équation deviendra

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du}{dx}[(1-x)^{-m} - \text{termes de degré supérieur à } n] \\ &+ u[(1-x)^{-m-1} - \text{termes de degré supérieur à } n-1] \end{aligned}\right\} = x^n;$$

sous cette forme, on voit immédiatement que le premier membre devient

égal à un terme en x^n seul, si l'on fait $u = A(1-x)$, A étant une constante. Ce terme en x^n sera

$$x^n\left[-\frac{m(m+1)\dots(m+n-1)}{1.2\dots n}-\frac{(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}{1.2\dots(n-1)}\right]$$
$$=-Ax^n\frac{(m+1)\dots(m+n)}{1.2\dots n}.$$

On en conclut que

$$u=\frac{1.2\dots n}{(m+1)(m+2)\dots(m+n)}(x-1),$$

est une solution particulière de l'équation (2) et par suite, à une constante près, l'on a

$$\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt[m]{X^{m-1}}}=\frac{1.2.3\dots m}{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+m)}(x-1)\sqrt[m]{X}.$$

Exemples. Pour $m=2$, on a

$$X=(n+1)x^n+nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+3x^2+2x+1,$$

et

$$\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{X}}=\frac{1.2}{(n+1)(n+2)}(x-1)\sqrt{X}$$

Pour $m=3$, on a

$$X=\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n+\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}+\frac{(n-1)n}{2}x^{n-2}+\cdots+6x^2+3x+1,$$

et

$$\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt[3]{X^2}}=\frac{1.2.3}{(n+1)(n+2)(n+3}(x-1)\sqrt[3]{X}.$$

Pour $m=4$, on a

$$X=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3}x^n+\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}x^{n-1}+\frac{(n-1)n(n+1)}{2.3}x^{n-2}$$
$$+\cdots+10x^2+4x+1,$$

et

$$\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt[4]{X^3}}=\frac{1.2.3.4}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}(x-1)\sqrt[4]{X}.$$

etc.

Ce rôle curieux des nombres figurés, dans le calcul intégral, n'avait peut-être pas encore été signalé Il donne lieu, du reste, à des généralisations remarquables.

Une question analogue de M. Realis se trouve proposée sous le n° 1427, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1882, p. 527 et résolue (*ibid.*), 1883, p. 378.

M. Verniory nous a envoyé une bonne solution de la question 283, que le défaut d'espace nous empêche d'insérer.

QUESTIONS D'EXAMEN.

464. Donnez les formules qui expriment la mesure du rectangle et celle du cercle, lorsque l'unité de surface est la surface du cercle qui a pour rayon l'unité de longueur. (Réponse : $\frac{bh}{\pi}$, R^2).

465. Donnez les formules qui expriment les mesures du parallélipipède, de la sphère et du cylindre, lorsque l'unité de volume est le volume du cylindre ayant pour diamètre et pour hauteur l'unité de longueur.

QUESTIONS PROPOSÉES.

699. Si n femmes sont placées dans un ordre déterminé autour d'une table ronde, de combien de manières leurs maris peuvent-ils se placer à cette table en satisfaisant aux conditions suivantes : un homme se trouve toujours entre deux femmes et n'est jamais à côté de la sienne. (*Permutations circulaires discontiguës*). (Éd. Lucas.)

***700.** Si x, y, z sont des nombres entiers, le nombre

$$N = xyz(x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz) + x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3$$

est décomposable en deux facteurs entiers, et, par suite, ne peut être premier. (E. Catalan.)

Répartition des Solutions des Questions proposées dans les dix premiers volumes de *Mathesis*.

TOMES	ANNÉES	QUESTIONS	SOLUTIONS INSÉRÉES DANS LES DIFFÉRENTS VOLUMES										SOLUTIONS PUBLIÉES	QUESTIONS NON RÉSOLUES
			I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X		
I	1881	100	45	27	12	7	5	3	2	2	2	„	105	2
II	1882	100	„	36	38	9	6	4	4	„	1	5	103	„
III	1883	100	„	„	8	39	20	19	3	2	5	5	101	2
IV	1884	100	„	„	„	20	28	19	17	4	1	5	94	3
V	1885	100	„	„	„	„	17	28	20	22	3	7	97	3
VI	1886	50	„	„	„	„	„	14	16	7	4	8	49	3
VII	1887	50	„	„	„	„	„	„	9	18	15	2	44	4
VIII	1888	40	„	„	„	„	„	„	„	8	21	8	37	1
IX	1889	30	„	„	„	„	„	„	„	„	10	16	26	2
X	1890	30	„	„	„	„	„	„	„	„	„	12	12	4
Totaux . . .		700	45	63	58	75	76	87	71	63	62	68	668	24
Moyennes approximatives par mois			3 à 4	5 à 6	4 à 5	6 à 7	6 à 7	7 à 8	5 à 6	5 à 6	5 à 6	5 à 6	5 à 6	

Le nombre de solutions publiées dépasse généralement celui des questions énoncées, parce que certaines solutions ont paru à diverses reprises. Sauf pour le premier volume, le nombre de solutions publiées a toujours atteint son maximum durant l'année suivante, pour décroitre ensuite assez régulièrement.

TABLE DES MATIÈRES(*).

ARITHMÉTIQUE; ANALYSE INDÉTERMINÉE.

Pages.

×Théorème d'arithmétique; par M. Bernès 113
Criterium pour la formule de Paoli; par M. Ed. Lucas 129
×Questions d'arithmologie 139
Remarques sur une note de M. Ed. Lucas; par M. E. Catalan. 197
Sur l'analyse indéterminée du premier degré; par M. E. Catalan . 220, 243, 275
×Sur les différents systèmes de numération; par M. Éd. Lucas 245
×Question 637; solution par MM. Bellens, Denys, etc. 43
×Question 683; solution par un Abonné 151
Question 654; solutions par MM. Emmerich et Déprez 174
×Question 530; solution par M. E. Lucas 253
×Question 574; solution par M. Emmerich 257

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

×Extraction de la racine carrée par la méthode des deux moyennes; d'après M. B. Carrara; par MM. P. Mansion et E. Catalan 15
×Démonstration des formules $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$; par MM. Thiry et Clasen 54, 112
×Résolution d'une équation; d'après Servois 54
Résolution graphique des équations numériques du 3e et 4e degré 55
×Démonstration élémentaire de l'inégalité $x - \sin x < \frac{1}{6}x^3$; par MM. Desmons, Gelin, Bernès, Smeets 58, 112, 157
×Sur les nombres parfaits; par M. Éd. Lucas 74
×Question 658; solution par M. Brandza 22
×Question 637; solution par MM. Bellens, Denys, etc. 43

(*) Les articles marqués d'une croix n'exigent, pour être compris, que la connaissance des mathématiques élémentaires. (Pour les rectifications, voir pp. 24, 176, 216, 240. Page 249, l. 8, lire $GC' : GB' = c : b$; p. 250, l. 14, 2^p, au lieu de $2p$).

Pages.

×Question 664; solution par MM. Beyens, Brocard, etc. 44
Question 384; solution par MM. Molenbroeck, Déprez, etc. 62
×Question 386; solutions par MM. Beyens, Déprez 64
Question 385; solution par MM. Keelhoff et Déprez 86
×Question 657; solutions par MM. Klompers, Denys, etc. 90
Question 671; solution par M. J. G. Darboux 91
Question 273; solution par M. J. Neuberg 110
×Question 543; solution par M. Beyens 122
Question 622; solution par MM. Mosnat, Fr. Falisse, etc. 125
×Question 672; solution par MM. Sohie, Denys, etc. 149
×Question 682; solutions par MM. J. G. Darboux, Catalan, etc. 150, 155
×Question 686; solution par MM. Anderson, De Tilly, etc. 213
×Question 690; solution par MM. Sohie, A. Denys, etc. 239
×Question 679; solution par M. de Strekaloff 250

×GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Sur le tétraèdre orthocentrique; par M. G. de Longchamps 49, 77
Les propostions du 5e livre d'Euclide, réduites en formules; par M. G. Peano. 73
Complément de la théorie des polygones harmoniques; par M. Casey . . 96
Sur un nouveau cercle associé à un triangle; par M. W. Fuhrmann . . . 105
Sur le quadrilatère inscriptible; d'après M. Mannheim 155
Sur l'ennéagone régulier; par M. A. Denys. 162, 216
Surface et volume du tore; par M. E. Gelin 190
Paradoxe; d'après MM. Peano et Schwarz (P. M.) 222
Sur quelques séries de points remarquables dans le triangle; par M. A Poulain 246
Question 653: solutions par MM. Laurens, Decamps, etc. 20
Question 610; solution par M. Schoute 41
Question 669; solutions par MM. Foulon, Denys, etc. 47
Question 659; solution par MM. Déprez et Neuberg 67
Question 668; solutions par MM. Déprez, Denys, etc. 69
Question 645; solution par M. Déprez. 88
Question 674; solution par MM. Sohie, Decamps, etc. 94
Question 402; solutions par MM. Lemoine, Gob, etc. 119
Question 548; solutions par M. J. Neuberg 166
Question 549; solution par M. Déprez et Verniory 170
Question 673; solution par M. Déprez 211
Question 429; solution par M. Mosnat 253
Question 693; solution par M. Denys. 262

COURBES ET SURFACES DU SECOND ORDRE; GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

Sur quelques questions de signes en géométrie analytique; par M. Éd. Lucas. 5
Sur un groupe de trois paraboles; par M. H. Mandart. 30
Sur les coniques osculatrices (questions 414, 417); par M. Éd. Dewulf . . . 55

Pages.

Théorèmes sur la parabole; par M. Bergmans 116
Sur la réversibilité de la transformation linéaire; par M. Cl. Servais . . . 132
Sur l'emploi des coordonnées barycentriques; par M. E. Cesáro 177
A propos d'un problème sur le billard circulaire; par M. Del Re 217
Sur une propriété des coniques; par Me Prim 252
Détermination des foyers, des directrices et des axes dans les coniques, d'après la conception de Plücker; par M. Lac de Bosredon 265
Question 636; solution par MM. Russo, Denys, etc. 18
Question 639; solutions par MM. Servais, Keelhoff, etc. 18
Question 613; solution par M. Schoute 42
Question 666; solutions par MM. Choisis, Denys, etc. 46, 253
Question 494; solutions par MM. Brocard et Thiré. 144
Question 581; solution par MM. Stuyvaert et Déprez 148
Question 525; solution par M. J. Neuberg 230
Question 647; solutions par M. Klompers 233
Question 662; solution par MM. Déprez et Decamps 235
Question 675; solutions par MM. Anderson et Cl. Servais 258

COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Étude géométrique sur la cissoïde et la strophoïde; par M. Cl. Servais . . . 9
Sur la développante de la chainette; par M. E. Cesáro 135
Sur la transformation par rayons vecteurs réciproques; par M. Laisant . . 224
Sur une propriété des courbes algébriques d'ordre m: par M. Balitrand. . . 251
Question 628: solution par M. Déprez. 64
Question 663; solution par M. Déprez. 68
Question 438; solution par M. Anderson 87
Question 522; solution par M. Mosnat 121
Question 296; solution par M. J. Neuberg 142
Concours général de mathématiques spéciales; par M. V. Jamet 158
Question 517; solution par M. Brocard 165
Question 641; solution par M. Déprez 172
Question 390; solutions par MM Brocard et J. Neuberg 201
Question 391; solutions par M. Meurice 203
Question 457; solution par M. Pisani. 205
Question 652; solutions par MM. Jamet et Kluyver 207
Question 665; solution par M. E. Cesáro. 237
Question 521; solutions par M. Verniory. 255
Question 187; solution par M. Déprez. 261

CALCUL DIFFÉRENTIEL; CALCUL INTÉGRAL; THÉORIE DES SÉRIES.

Sur une question de limite (question 294); par M. Cesáro 25
Questions de licence; par M. Brocard. 60
Sur l'interversion des dérivations partielles; par M. G. Peano. 153

Pages.

Expression de e en produit infini 156
Questions 119 et 120; solutions par MM. Mantel et S. Realis. 38
Questions 160 et 162, solution par M P. Mansion 40
Question 195; solution par M. E. Cesáro 85
Question 688; solution par MM. Servais, Klompers, etc. 149
Question 208; solution par M. Mantel. 200
Question 283; solution par M. P. Ruex 276

VARIÉTÉS, BIBLIOGRAPHIE ET SUPPLÉMENT.

La devise de Mathesis; par M. Ph. Breton 13
Crelle ou Brocard; par M. P. Mansion. 28
La formule d'Ozanam est due à Snell; par M. Le Paige 34
G. Lalbalettrier. Trigonométrie 36
E. Lebon. Surfaces à plans de symétrie, etc. 37
Duran y Loriga. Formes algébriques 82
Tartinville. Arithmétique (P M. et J N.). 83
J. Casey. Géométrie élémentaire récente 133
G. de Longchamps. Géométrie de la règle et de l'équerre 133
Lecointe. Géométrie élémentaire. 134
E. Lebon. Géométrie descriptive (2d volume) 135
H. Liebr et von Luhmann. 1. Geometrische Konstructions-Aufgaben. 2. Stereometrische Aufgaben. 3. Trigonometrische Aufgaben. 135
W. Fuhrmann. Planimetrische Sätze 136
G. Z. Reggio. Complementi d'algebra 137
E. Gelin. Rekenkunde. 137
F. Dessenon. Trigonométrie rectiligne (J N.).. 244
J. Neuberg. Projections et contreprojections d'un triangle (E. S.) 245
F. Verhelst. Algèbre élémentaire (H. Gelin) 245
E. Gelin Problèmes d'arithmétique 246
Mosnat. Problèmes de géométrie analytique (J. N) 277
Supplément. — Em. Vigarié. Esquisse historique sur la marche du développement de la géométrie du triangle. 1-95

QUESTIONS D'EXAMEN.

Questions 426-428, 429-430, 431-435, 436-438, 440-450, 451-453, 454-459, 460, 461-463, 464, 465 . . . . . 24, 48, 71, 94, 126, 152, 215, 240, 263, 279
Concours général de mathématiques spéciales: par M. V. Jamet 158
École polytechnique; école normale (de Paris) 175

QUESTIONS(*).

	POSÉE T. I (ou IX), p.	RÉSOL. T. X, p.
17	30 (71)	
95	206 (71)	
T. II (ou IV)		
119	71	38
120	71	39
160	159	40
162	159	40
195	231 (71)	85
T. III (ou IX)		
×203	23	200
252	143 (71)	
267	175, 192 (71, 88)	
273	192	117
283	231 (71)	276
294	248	25
296	248	142
T. IV (VIII ou IX)		
310	48	R
317	71 (261)	R
×318	71 (262)	R
×333	119 (72)	
×346	143	R
353	159	R
×356	159 (72)	R
×357	159 (72)	R
×383	231 (72)	
×384	231 (72)	62
×385	231	86
×386	231	63
387, 2e p.	231 (72)	
390	247	201
391	247	203
T. V		
402	22	119
411	23	
412	23	
414	46	57
416	46	R
417	46	57
418	47	R
429	94	253
436	94	87
439	119	R
457	192	205
494	280	144
497	280	
T. VI		
×513	71	
517	96	165
519	119	
521	119	255
522	144	121
525	144	230
530	192	253
532	192	
×543	264	122
×548	280	166
×549	280	170
T. VII (ou X)		
×571	126	
×574	148 (152)	257
575	148	R
581	207	148
590	240	R
594	264	
597	280	
598	280	
T. VIII (ou X)		
×605, 2e p.	56 (176)	R
×610	104	41
613	128	42
622	216	125
628	240	64, 229
×634	279 (240)	R
×635	279	
636	280	18
×637	280	43
638	280	149
639	280	18
T. IX		
641	88	172
643	88	R
×645	104	88
647	128	233
652	152	207
×653	172	20
×654	172	174
655	172	
×657	207	90
×658	207	22
659	207	67
662	240	235
663	240	68
×664	240	44
665	240	237
666	264	46, 253
667	264	R
×668	264	69
×669	280	47
670	280	
T. X		
671	24	91
×672	24	149
×673	24	211
×674	48	94
675	48	258
676	48	
×677	72	R
678	72	R
×679	72	259
680	72	R
×681	95	R
682	95	150, 155
×683	95	151
684	128	R
685	128	
×686	128	213
687	152	261
×688	152	R
689	176	R
×690	176	239
691	216	R
692	216	R
×693	216	262
×694	216	R
695	240	R
×696	240	R
×697	264	R
698	264	R
699	279	
×700	279	

(*) La rédaction de *Mathesis* a en portefeuille de bonnes solutions des questions marquées de la lettre R ; elle engage ses collaborateurs à porter de préférence leurs efforts sur les autres questions.

QUESTIONS

de la ***Nouvelle Correspondance mathématique***

reproduites ou résolues dans ***Mathesis***.

N. C. M.		Mathesis	
Tome.	Numéro.	Énoncé.	Solution.
II (1876)	80	458	VII, 200
„	81	459	VIII, 21
„	96	221	IV, 92
„	102	260	VII, 191
„	107	238	IV, 158
„	108	293	IX, 82
„	161	353	„
„	166	597	„
„	167	231	IV, 155
„	169	232	VII, 230
„	170	244	VI, 86
„	205	239	IV, 189
„	210	pr mém.	II, 248
III (1877)	227	239	IV, 189
„	250	291	VI, 135
„	274	434	VI, 43
„	281	427	V, 279
„	282	435	VIII, 275
„	285	496	X, 87
„	288	426	VII, 197

N. C. M.		Mathesis	
Tome.	Numéro.	Énoncé.	Solution.
III (1877)	289	425	VII, 195
„	306	576	IX, 252
IV (1878)	323	256	VI, 87
„	374	313	IV, 230; V, 10
„	382	rétirée	„
„	399	292	V, 36
„	410	461	VII, 25
V (1879)	510	204	I, 116, 128. 191; V, 227
„	511	206	IX, 118
„	513	209	VIII, 167
VI (1880)	569	509	IV, 198
„	580	600	VIII, 103
„	581	468	VII, 163
„	582	490	IX, 192
„	588	460	VI, 189
„	590	pr mém.	V, 128
„	601	671	X, 91
„	602	671	X, 91
„	614	493	VIII, 172

La question 614 est la dernière de la N. C. M. La question 166 de la N. C. M. est reproduite sous le n° 1532 dans les N. A. M. On trouve aussi dans ce dernier recueil, en 1843, p. 87, la solution des questions 57 et 222 de la N. C. M.; en 1876, p. 550, sous le n° 1207, celle de la question 83; en 1878, p. 253, celle de la question 141; en 1885, p. 38, celle de la question 343; enfin, en 1881, p. 231, celle de la question 404. Nous devons ces renseignements et la table synoptique qui précède à l'obligeance de notre savant collaborateur, M. H. Brocard.

TABLE DES NOMS.

Agnesi, 134.
Alhazen, 219.
Anderson, 62, 88, 151, 213, 258.
Anne, 219.
Apollonius, 167.
Archimède, 16.
Aristote, 243.
Artzt, 108, 137, 166.
Aubert, 48.
Balitrand, 251.
Barlaam, 16.
Baudran, 236.
Bellens, 22, 43, 94, 151, 262.
Bergmans, 116.
Bernès, 112, 113.
Bernoulli, 244.
Bertot, 219.
Bertrand (J.), 83.
Besso, 126, 137.
Beyens, 38, 44, 63, 67, 122, 170.
Beziat, 219.
Bigoni, 219.
Blum, 220.
Boutin, 89.
Bouwmeester (Mlle), 70.
Bözóky (de), 18, 21, 62, 89, 90, 125, 175, 239.
Brandza, 22.
Breton (Ph.), 15.
Brocard, 15, 20, 23, 24, 28, 29, 30, 37, 44, 47, 48, 60, 72, 88, 96, 101, 102, 121, 128, 133, 142, 144, 151, 152, 165, 166, 167, 168, 171, 172, 175, 186, 187, 201, 211, 214, 216, 232, 257, 261, 286.
Bruno de Cabeda, 114.
Bruyr, 18.
Buffon, 243.
Cambier, 115.
Cantor (M.), 24.
Carrara, 15, 17.
Casey, 36, 96, 138, 245.
Cassini, 64, 229.
Catalan, 17, 42, 48, 76, 90, 94, 95, 125, 128, 130, 150, 152, 155, 166, 176, 197, 213, 214, 217, 219, 220, 241, 257, 264.
Cauchy 224.
Césáro (E.), 18, 25, 62, 63, 68, 76, 85, 95, 130, 138, 142, 169, 177, 200, 237, 244.
Chasles, 219.
Choisis, 21, 46, 67.
Christie, 95, 142, 151.
Clarke, 28.
Clasen, 112.
Clausen, 244.
Clebsch, 162.
Comberousse (de) 14, 58, 197
Comte (Aug.), 243.
Crelle, 28, 29, 162
Cremona, 162.
Cristesco, 23, 151, 239.
Curtis, 126.
Darboux (G.), 16.
Darboux (J G.), 91, 150.
Decamps, 21, 23, 44, 46, 47, 94, 149, 151, 235, 239.
Delpit, 53.
Del Re, 217.
Denys (A.), 18, 22, 23, 43, 44, 46, 47, 70, 90, 149, 151, 162, 216, 239, 262.
Déprez, 18, 20, 21, 22, 23, 44, 46, 62, 64, 67, 68, 70, 86, 88, 89, 120, 121, 144, 148, 170, 171, 172, 175, 207, 210, 211, 232, 235, 253, 257, 259, 261.
Descartes, 64, 134, 229.
Desmons, 58.
Dessenon, 244.
Dewulf, 55
Duhamel, 8.
Duran y Loriga, 82.
Dyrion, 143.
Emmerich, 20, 29, 47, 70, 72, 174, 239, 257.
Emsmann, 28, 29.
Euclide, 73, 75, 115.
Euler, 129, 187, 241, 242, 244.
F. (F), 264.
Falisse (Fr.), 125, 165
Falisse (V.), 252.
Faure, 210.
Fermat, 244.
Ferriot, 53.
Feuerbach, 28, 53.
Foulon, 47.
François, 67, 94, 151, 175, 210, 239.
Fuhrmann, 29, 105.
Gelin (E.), 58, 137, 190, 197, 246.
Gelin (H.), 245.
Genese, 18, 66.
Gergonne, 37, 67.
Gerono, 219.
Girard, 31
Gob, 120, 216, 240, 262.
Goudin, 54.
Gram, 72, 259.
Guldin, 136, 190.
Habich, 14.
Hacken, 20.

Hain, 20, 22, 215.
Hellwig, 28.
Hemming, 147.
Henry, 16.
Hermès, 157.
Hermite, 220.
Hesse, 162.
Heiberg. 16.
Huygens, 36.
Jacobi (C. F. A), 21, 28, 53.
Jacquier, 15.
Jamet, 24, 94, 161, 207.
Jeřábeck, 20, 21.
Joachimescu, 151, 238, 258.
Joffroy, 58.
Joostens, 239.
Jordan, 153.
Keelhoff, 18, 19, 95, 149, 176.
Kerckhofs, 137.
Kiepert, 21, 29, 137, 170, 180, 183, 186, 187, 188.
Klompers, 18, 86, 90, 149, 233.
Kluyver, 209.
Kummer, 162.
Lac de Bosredon, 265.
Lagrange, 15.
Laguerre, 129.
Laisant, 64, 164, 224.
Lalbalettrier, 36.
Lalisse, 23, 38, 44, 94.
Lampe, 157.
Laplace, 157.
Laurens, 20.
Le Besgue, 275
Lebon, 37, 71, 95, 135, 216.
Lecointe, 134.
Legendre, 191.
Leibniz, 243.
Lemoine (E.), 28, 29. 30, 37, 72, 88, 119, 133, 137, 166, 167, 168, 172, 186. 187, 188, 219, 235.
Le Paige, 34.
Le Seur 15.
Lhuilier, 53.
Lieber, 135, 136.
Limbourg, 201.
Lipschitz, 153.
Longchamps (de), 13, 28, 29, 37, 38. 49, 67, 77, 89, 127, 133, 183, 187, 207, 247.
Lucas (Ed.), 5, 74, 76, 129, 197, 198, 199, 216, 244, 253, 279.
Lühmann, 135, 136.
Luigi, 126, 137.
M'Cay, 245.
Maclaurin, 26, 134.
Mac-Mahon, 62, 149.
Malet, 253.
Mandart, 30, 105, 210.
Mannheim, 156.
Mansion, 8, 15, 17, 30, 34, 41, 60, 76, 85, 91, 153, 154. 224, 244.
Mantel, 25, 38, 40, 200.
Meurice, 20, 43, 219.
Mineur, 95.
Molenbroeck, 44, 62, 149, 238.
Monge, 209, 210.
Morel, 28, 219.
Mosnat, 121, 125, 253, 276.
Nagel, 67.
Neuberg, 21, 22, 29, 30, 47, 49, 50, 57, 68, 69, 70, 85, 86, 105, 110, 117, 133. 152, 156, 158, 162, 169, 171, 172, 178, 203, 207, 210, 214, 219, 230, 244, 245, 248, 255, 260.
Newton, 15, 134.
Nicolaïdès, 143.
Nicomède, 204.
Niewenglowski, 114.
Novarese, 72.
Ocagne (d'), 143.
Olivier, 47, 94.
Ovidio (d'), 217.
Ozanam, 34.
Paoli, 129, 219, 220, 275.
Pascal, 134.
Pesano, 73. 153, 223, 224.
Pilatte, 199.
Pisani, 205, 255.
Plücker, 265.
Poulain, 246.
Pourcheiroux, 219.
Prim (Mme), 239, 252
Puissant, 219.
Quetelet, 219.
Realis, 38, 39, 276.
Reggio, 137.
Retali, 233.
Reuschle, 55, 215.
Riccati, 219.
Ritter, 164.
Rocchetti, 120.
Rocquigny (de). 24, 43, 119, 139, 140, 141, 142, 255.
Rouché, 14, 58, 197.
Ruex, 277.
Russo, 18, 44, 47, 94, 127, 128, 151, 239.
S. E., 245.
Saladini, 219.
Salmon, 82.
Sanio, 157.
Sannia, 217.
Schlömilch, 28.
Schoute, 41, 42.
Schröter, 162, 209.
Schwarz, 153, 223.
Scott (Miss), 28.
Seauve, 127.
Seelhoff, 76, 156, 157.
Serret (A.), 16, 17, 83, 153.
Servais (Cl.), 9, 18, 57, 76, 132, 149, 234, 240, 259.
Servois, 54.
Sharp, 264
Simpson, 219.
Simson, 136, 184
Smeets, 157.
Smith, 244.
Snell, 34.
Sohie, 94, 149, 239.
Staudt (von), 258.
Steiner, 46, 53, 162, 183, 184, 186, 187, 209.
Stern, 74, 76.
Stevin, 243.
Strekaloff (de), 239, 259.
Stuyvaert, 148.
Sylvester, 48, 76.
Tarry, 48, 128, 186, 187, 188, 258.
Tartinville, 83.
Taylor, 133.
Thiré, 146.
Thiry (Cl.), 54, 216, 240.
Tilly (De), 214.
Transon, 219.
Tucker, 133, 166, 172.
Van Aubel (H), 41, 70.
Verhelst, 245.
Verniory, 18, 23, 44, 46, 70, 90, 170, 175, 238, 255, 279.
Viaggi, 237.
Vigarié, 28, 115, Suppl.
Vuibert, 264.
Weierstrass, 162.
Wigand, 28.
Wilson, 244.
Wolstenholme, 53, 122.
X. (F.), 255.

ASSOCIATION FRANÇAISE
POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES
Fusionnée avec
L'ASSOCIATION SCIENTIFIQUE DE FRANCE
(Fondée par Le Verrier en 1864)

CONGRÈS DE PARIS — 1889

M. Émile VIGARIÉ
A Toulouse.

ESQUISSE HISTORIQUE SUR LA MARCHE DU DÉVELOPPEMENT DE LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

— Séance du 9 août 1889 —

I

Dans le domaine des sciences mathématiques, la *Géométrie du triangle* est la plus récemment étudiée. Son existence propre, j'allais dire son autonomie, ne date guère que de 1873. Comme le déclarait dernièrement M. Davis, « la Géométrie du triangle est le progrès le plus remarquable qu'aient fait les Mathématiques élémentaires en ces derniers temps. Depuis quelques années, il est apparu dans le champ mathématique, si l'on peut ainsi parler, une planète nouvelle et étrange; maints télescopes sont braqués sur elle dans les divers pays civilisés et on l'observe avec soin. » (*Association for the Improvement of Geometrical Teaching*. Séance du 20 janvier 1888.)

Tous les géomètres qui se sont occupés du triangle ont été, de tout temps, amenés à considérer dans son plan certains points et certaines lignes qui jouissaient de propriétés remarquables. Aussi, le nombre des propriétés signalées avant 1873 étant considérable, il nous est impossible de les énoncer toutes ici, mais nous donnerons les principales afin de

montrer la marche qu'a suivie le développement latent de la géométrie du triangle et d'en fixer les origines.

En 1816, dans un de ses ouvrages, Crelle *(Ueber einige Eigenschaften des ebenen geradlinigen Dreiecks rücksichtlicht dreier durch die Winkelspitzen gezogenen geraden Linien*, Berlin 1816), donna une étude d'un certain point du plan du triangle *(point de Brocard)* (*) et les formules célèbres :

$$\operatorname{cotg}\omega = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S},$$

$$\operatorname{cosec}^2\omega = \operatorname{cosec}^2 A + \operatorname{cosec}^2 B + \operatorname{cosec}^2 C,$$

(ω = *angle de Brocard*), *a*, *b*, *c*, A, B, C étant les côtés et les angles du triangle de référence et S sa surface.

Dans un programme scolaire de Pforta (*De triangulorum rectilineorum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis*, Numburgi, 1825), C. F. A. Jacobi continue les études commencées par Crelle.

Simon Lhuilier (*Éléments d'Analyse géométrique et d'Analyse algébrique*, 1809, p. 296) s'occupe du point *(point de Lemoine)* tel que, dans le triangle et dans le tétraèdre, la somme des carrés de ses distances aux côtés et aux faces soit minima; il remarque en outre que, dans le triangle, la droite qui joint ce point à un sommet divise le côté opposé en segments proportionnels aux carrés des côtés adjacents. C'est par cette propriété que le point de Lemoine a souvent été signalé et d'après M. Tchebichef, qui en fit la remarque au Congrès de Lyon (1873), c'est ainsi que Gauss (1821-1826) l'aurait rencontré dans la méthode des moindres carrés; « mais, dit M. Lemoine (Congrès de Grenoble, 1885, p. 41), j'ai cherché en vain dans les *Œuvres de Gauss* la trace de cette remarque, à moins que l'on ne juge qu'elle résulte, comme cas très particulier, du problème même que l'on se propose de résoudre par la méthode des moindres carrés, problème qui est évidemment la recherche du point de l'hyperspace, tel que la somme des carrés de ses distances aux hyperplans représentés par les équations données soit minima. »

E. W. Grebe *(Archives de Grunert*, t. IX, p. 250 259, 1847) cherche le point *(point de Lemoine)* qui jouit de la propriété de minimum que nous venons d'énoncer; il donne les coordonnées normales de ce point et il trouve pour l'expression *m* de ce minimum la formule :

$$m = \frac{2S}{\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C}.$$

(*) Dans le courant de ce travail, nous mettrons entre parenthèses et en *italiques* les *correspondants de la nouvelle terminologie.*

En désignant par K ce point, il montre que les droites AK, BK, CK sont symétriques des médianes par rapport aux bissectrices correspondantes; qu'il est le centre de gravité de l'aire de son triangle podaire; qu'enfin, si, sur chaque côté de ABC on construit des carrés (tous à l'intérieur ou tous à l'extérieur), les côtés de ces carrés qui sont parallèles à ceux de ABC forment un second triangle homothétique à ABC, le centre d'homothétie étant le point K. C'est à cause de ce mémoire que le point de Lemoine est quelquefois appelé en Allemagne point de Grebe.

Hossard (*Nouvelles Annales de Math.*, 1848, p. 454) résolut le même problème que Simon Lhuilier.

M. Catalan (*Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire, par H. Ch. Lafrémoire, 2e édit., p. 161*, 1852) montre que le point qui jouit de la propriété d'être tel que la somme des carrés de ses distances aux côtés soit minimum est le centre de gravité de son triangle podaire et que les distances de ce point aux trois côtés sont proportionnelles à ces côtés.

Hoffmann (*Archives de Grunert*, 1847) se propose de trouver deux points (*points de Brocard*), Ω, Ω', tels que :

$$\Omega AC = \Omega BA = \Omega CB = \omega = \Omega' AB = \Omega' BC = \Omega' CA;$$

il donna les valeurs de $\sin^3 \omega$, $\operatorname{tg} \omega$, $\operatorname{cotg} \omega$. C'est, du reste, par la valeur des lignes trigonométriques de l'angle ω (*angle de Brocard*) que les points de Brocard ont été le plus souvent rencontrés et on en trouve des traces dans une foule d'auteurs : Grunert (1833), Nagel (1836), Stubbs (1846), Clarke (1849), Marqfoy (1851), Reuschle (1853), Emsmann (1854), Wiegand (1854), Helwig (1855)... Jacobi (1834), dans la traduction allemande de la géométrie de J. H. Van Swinden (*Grondbeginselen der meetkunde*, Groningue, 1833), donna les mêmes expressions et aussi plusieurs propriétés se rapportant aux points de Brocard.

Nous signalerons encore un point du triangle qui a souvent été étudié, c'est celui qui est tel que la somme de ses distances aux trois sommets du triangle soit minima. La recherche de ce point avait été proposée par Fermat à Torricelli, qui, après en avoir trouvé trois solutions, proposa le même problème à Viviani; ce dernier l'a inséré dans ses *De Maximis et Minimis* (1638). Ce point remarquable a été étudié par Thomas Simpson (*The theorie and application of Fluxions*, 1750), Fuss (1798), Tédenat et Lhuilier (1810), Grüson (1816), Steiner (*Œuvres complètes*, t. II, p. 16, 93, 739), Bertrand (1843), Lehmus (1854), Wetzig (*J. de Crelle*, t. LXII et *J. de Schlömilch*, t. XII), Lindmann (1856), Grunert (1867)...

Presque tous les points et presque toutes les droites remarquables ont été rencontrés par divers géomètres et il serait bien long et bien difficile [illegible] recherches toutes indépendantes et isolées. On avait si

peu vu leur importance collective et leur rôle considérable dans la géométrie que ces recherches ne se sont pas continuées, qu'elles n'avaient jamais été reliées les unes aux autres, et que leur souvenir, même, avait pour ainsi dire disparu. Il faut remonter jusqu'en 1873 pour trouver le germe d'études suivies et le souci de rassembler et de faire concorder les résultats se rapportant à des éléments remarquables du plan du triangle.

II

On voit par les extraits qui précèdent dans quel état se trouvait la géométrie du triangle : il existait une foule de propriétés, mais toutes isolées, peu connues ou même oubliées.

Nous ne saurions mieux fixer les origines de la géométrie du triangle et montrer la marche de son développement qu'en suivant pas à pas les principales publications qui ont été faites sur ce sujet depuis 1873.

Ainsi que nous l'avons déjà rappelé au Congrès de Toulouse, la géométrie du triangle a pris corps dans notre Association.

L'*Association française pour l'Avancement des Sciences* venait d'être fondée; l'un de ses plus ardents promoteurs, M. Würtz, en s'occupant de l'organisation des premiers Congrès, avait demandé à M. Lemoine de faire quelques communications à la Section de mathématiques. C'est en cherchant dans ses cahiers de 1857-1858 que M. Lemoine en trouva les éléments dans divers théorèmes qu'il communiqua au Congrès de Lyon (1873) sous le titre de : *Sur quelques propriétés d'un point remarquable du triangle.* En 1857-1858, M. Lemoine était élève de mathématiques spéciales et parmi les ouvrages qu'il avait sous la main se trouvaient les *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire*, par H.-Ch. Lafrémoire (2e édition, revue et corrigée par M. E. Catalan, 1852). Dans cet ouvrage, était résolu (page 160) le problème suivant : « Trouver dans le plan d'un triangle ABC un point M tel que la somme des carrés de ses distances aux trois côtés du triangle soit un minimum ». On y remarquait aussi deux propriétés de ce point M : l'une attribuée explicitement à M. Hossard : « La droite qui joint le point M à l'un des sommets du triangle partage le côté opposé en segments proportionnels aux carrés des côtés adjacents » ; l'autre : « les distances de M aux trois côtés sont proportionnelles à ces côtés », résultait (sans être exprimée) d'un calcul.

Voilà les seules données que possédait M. Lemoine, et c'est de là qu'il est parti pour énoncer les intéressantes propriétés du point qui porte aujourd'hui son nom.

M. Lemoine avait aussi traité comme exercice la question bien connue *suivante (cas particulier du théorème de Mac Laurin et Braikenridge)* :

Soit un triangle ABC et un point P dans son plan. Par P, menons une droite variable qui coupe AC en B′, BC en A′, et joignons AA′, BB′. Ces droites se coupent en un point M. Lieu de M. Ce lieu étant une conique circonscrite au triangle, M. Lemoine eut l'idée de chercher pour quelles positions de P la conique circonscrite est une hyperbole, un cercle, etc. Il trouva que si P était un certain point P_c (pôle de AB par rapport au cercle circonscrit), la conique était le cercle circonscrit et que les distances de tout point de CP_c à CB et à CA étaient proportionnelles à CB et à CA. La considération des points analogues P_b, P_a le conduisit tout naturellement à montrer que les trois droites AP_a, BP_b CP_c se coupent en un même point K dont les distances à BC, CA, AB sont proportionnelles aux côtés; d'où il conclut que le point K n'était autre que le point M considéré par MM. Hossard et Catalan (*).

Outre plusieurs propriétés de ce point qu'il appelait « centre des médianes antiparallèles », M. Lemoine montra l'existence de deux cercles *(Premier et second cercles de Lemoine)* dont l'un passe par les extrémités des parallèles, l'autre par les extrémités des antiparallèles aux côtés, menées par le point de Lemoine; plus généralement, il montra que les intersections des côtés de ABC avec ceux d'un triangle homothétique sont sur une conique qui devient un cercle *(Cercle de Tucker)* lorsque le centre d'homothétie est le point de Lemoine. (Lyon, 1873.)

M. Lemoine y détermina encore, par ses points remarquables, une hyperbole équilatère très étudiée depuis et nommée *Hyperbole de Kiepert*, du nom du géomètre qui donna, le premier, son équation (N. A. M., 1869, p. 41).

L'année suivante, au Congrès de Lille (1874), dans une *Note sur les propriétés du centre des médianes antiparallèles*, M. Lemoine publia de nouvelles propositions se rapportant aux mêmes éléments du triangle.

En somme, toutes les propriétés qui avaient été données isolément avant 1873 et qui se rapportaient au point appelé maintenant point de Lemoine se trouvent avec d'autres nouvelles dans ces deux mémoires de M. Lemoine et dans la *Note sur un point remarquable du plan du triangle* qu'il donna dans les N. A. M. de 1873: il est à remarquer que ce sont les plus importantes.

Le groupement des propriétés principales étant fait, pour la première fois, la géométrie du triangle était désormais prête à se développer.

Au Concours d'agrégation des Sciences mathématiques (1874), on pro-

(*) Nous remarquerons, en passant, que les premières lignes publiées par M. Lemoine se rapportaient à la géométrie du triangle; elles consistaient dans le théorème suivant: Dans tout triangle, il y a une ellipse inscrite qui a pour foyers le centre du cercle circonscrit et le point de concours des hauteurs; la longueur du grand axe est celle du rayon du cercle circonscrit. Terquem donna une autre forme à l'énoncé de la question et la publia dans les *Nouvelles Annales de Math.* (1858, p. 240). Le même théorème a été donné par M. Paul Serret (N., A., M., 1865, p. 438, Questions 737 et 739.)

posa aux candidats la démonstration de certaines propriétés du point de Lemoine (sans le nommer), et les solutions qui furent publiées par M. Neuberg (N. C. M., 1874) et par M. Chadu (N. A. M., 1874) en signalèrent de nouvelles ainsi que plusieurs relations métriques. La même année, M. Picquet (Congrès de Lille) montra qu'en général le centre des médianes antiparallèles n'existe pas dans le tétraèdre, et il rattacha ses propriétés au théorème de Brianchon.

Dès 1875, M. E. Hain, auquel on doit depuis un assez grand nombre d'intéressants théorèmes sur le triangle, donna (*Archives de Grunert*, pp. 84-89, 322-326) une construction et diverses propriétés du centre des médianes antiparallèles.

A ce moment entra en ligne un élément nouveau, qui a contribué pour une large part à concentrer l'attention des géomètres sur le triangle.

M. H. Brocard proposa (*Question* 1166, N. A. M., 1875) de trouver dans le plan d'un triangle ABC un point Ω tel que l'on ait entre les angles les égalités suivantes :

$$\Omega AB = \Omega BC = \Omega CA = \omega.$$

La solution de M. Chadu (N. A. M., 1875, pp. 286-288) fit connaître l'existence d'un second point analogue Ω′ et diverses relations métriques.

Les recherches semblèrent cesser pendant deux ans environ et c'est M. Brocard qui les reprit en poussant plus loin l'étude de la question 1166.

Ce que M. Lemoine avait fait pour le centre des médianes antiparallèles, M. Brocard le fit pour les deux points Ω, Ω′ qu'il appela points segmentaires à cause de leur mode de construction. Il détermina graphiquement leur position, retrouva toutes les propriétés qui avaient été données isolément pour ces deux points, les formules :

$$\operatorname{cotg}\omega = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C,$$
$$\sin^3\omega = \sin(A - \omega)\sin(B - \omega)\sin(C - \omega),$$

et les expressions de $\operatorname{cotg} 2\omega$, $\operatorname{tg} 2\omega$... etc. Il montrait aussi l'existence d'un nouveau cercle remarquable qu'il appela cercle des sept points, (*Cercle de Brocard*) (*). M. Neuberg, de son côté, indiquait de nouvelles propriétés de Ω et de Ω′; il donnait la formule:

$$\operatorname{cosec}^2\omega = \operatorname{cosec}^2 A + \operatorname{cosec}^2 B + \operatorname{cosec}^2 C$$

(*) Malgré ses recherches, M. Brocard n'avait trouvé dans aucun ouvrage, ni dans les recueils périodiques, qu'il avait pu se procurer, la trace de travaux sur le sujet qui l'occupait. Ce n'est qu'à la fin de la publication de son mémoire (*Propriétés du triangle*, N. C. M. 1877, 1879, 1880) qu'il apprit par M. Catalan que les expressions de $\operatorname{cotg}\omega$ et $\sin^2\omega$ avaient été données par M. Léonce Clarke, *dans ses Théorèmes et problèmes de trigonométrie rectiligne et sphérique*, Paris, 1849.

(Lettre à M. Catalan, N. C. M., 1879) et plusieurs propositions relatives au centre des médianes antiparallèles. *(Exercices de Math. Élément.*, N. C. M., 1880, p. 364).

M. Lemoine avait montré *(Congrès de Lille*, 1874) que la droite, qu'il appelait médiane antiparallèle et qui joint un sommet du triangle au centre des médianes antiparallèles, est symétrique de la médiane par rapport à la bissectrice correspondante. C'est en prenant cette propriété pour théorème fondamental que M. d'Ocagne, *(Note sur une ligne considérée dans un triangle rectiligne*, J. E., 1880) croyant le sujet nouveau, a consacré à la médiane antiparallèle une intéressante étude, qui, outre certains des théorèmes donnés par M. Lemoine, contient plusieurs propositions nouvelles.

M. Brocard continua bientôt l'étude commencée dans la N. C. M. et, dans une *Étude sur un nouveau cercle remarquable du plan du triangle* (Congrès d'Alger 1881), il s'attacha tout particulièrement à faire connaître le cercle des sept points. Ce travail remarquable établissait, dans l'étude du triangle, l'importance de ce cercle, des deux points Ω, Ω′, et par de nombreuses et intéressantes propriétés, complétait les mémoires précédents.

Toutes ces recherches n'auraient pas eu un retentissement aussi rapide et aussi général si M. J. Neuberg ne les avait réunies, mises en relief et enrichies de ses travaux personnels en les présentant, en 1881, dans *Mathesis* avec l'élégance et la pénétration qui caractérisent les productions de notre savant ami. Comprenant l'importance et le lien intime qui unissaient les travaux de MM. Lemoine et Brocard, M. Neuberg les montra *(Sur le centre des médianes antiparallèles*, 1881) sous un aspect nouveau. C'est lui qui proposa d'appeler points de Brocard les points segmentaires, cercle de Brocard, le cercle des sept points et point de Lemoine le centre des médianes antiparallèles; il donna de nouvelles propriétés de la série de cercles *(Cercle de Tucker* et ses cas particuliers) signalés par M. Lemoine (Lyon, 1873).

A partir de ce moment, ce fut comme une secousse galvanique parmi les géomètres qui, dans tous les pays, rivalisèrent d'ingéniosité pour étendre le domaine de la nouvelle géométrie; les uns en généralisant les résultats déjà acquis, les autres en trouvant de nouvelles propriétés, d'autres enfin en vulgarisant ces notions dans leur pays. Grâce à ces efforts soutenus, la curiosité des géomètres semble avoir été ramenée définitivement sur des études dont le point de départ était enseveli dans un oubli profond.

En 1881, M. H. Kiehl *(Zur Theorie der Transversalen*. Program. Scol. de Bromberg) fit d'intéressantes recherches sur le triangle et signala les centres isodynamiques.

En 1882, M. Gaston Tarry (*Mathesis*, p. 73), dans une voie antérieurement suivie par MM. Grouard *(Journal l'Institut*, 1870), de Laffitte,

(N. A. M., 1855 et 1857) et Liguine (N. A. M., 1873), rattacha la nouvelle géométrie à l'étude des figures semblables.

Néanmoins toutes ces études s'étaient encore peu répandues en France, et ce n'est qu'en 1883 qu'elles commencèrent à s'y acclimater véritablement, grâce à une très intéressante *Étude sur le cercle de Brocard* que publia M. A. Morel dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* et à la reproduction dans cette publication des *Nouvelles propriétés du triangle*, mémoire que M. Brocard avait présenté au Congrès de Rouen (1883). A la même époque, M. d'Ocagne inséra dans les N. A. M. plusieurs notes : l'une *Sur un élément rectiligne du plan du triangle* (1883), une autre sur les *Nouvelles propriétés segmentaires du triangle* (1883), enfin une troisième *Note sur la symédiane* (1884). Dans ces articles, M. d'Ocagne reprenait l'étude de la médiane antiparallèle, qu'il avait commencée trois ans auparavant dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* et il proposait de donner à cette droite le nom de Symédiane, terme aujourd'hui universellement adopté. Aux propriétés déjà connues, il en ajoutait de nouvelles, et il en faisait de nombreuses et élégantes applications.

En Angleterre, ce fut M. Tucker qui, le premier, croyons-nous, appela sur la géométrie du triangle l'attention de ses compatriotes. Dans deux mémoires sur *The triplicate ratio circle* parus en 1883 dans le *Quarterly Journal* et dans les *Proceedings of the London Mathematical Society*, M. Tucker étudiait un cercle qu'il appelait « triplicate ratio circle » (cercle du triple rapport) et qui n'était autre que l'un des cercles déjà considérés en 1873 par M. Lemoine *(Premier cercle de Lemoine)*; il retrouvait les propriétés de ce cercle, ainsi que plusieurs autres se rapportant au cercle et aux points de Brocard. A la même époque, M^lle^ C. A. Scott proposait *(Educational Times*, juillet 1883) la dénomination d'angle de Brocard et un moyen pour distinguer entre eux les points de Brocard. Continuant ses recherches, M. Tucker fut amené *(A group of Circles*, *Quarterly Journ.*, 1884) à considérer la série de cercles déjà mentionnés par MM. Lemoine (Lyon, 1873) et Neuberg *(Mathesis*, 1882) et à en faire une étude détaillée. Ce sont ces cercles que M. Neuberg a proposé d'appeler *Cercles de Tucker*. Une généralisation différente de celle de M. Tucker a été faite par M. H. M. Taylor *(On the relations of the Intersections of a circle with a triangle. Proceedings of the London M. Soc.)* (1884) et M. Neuberg a rattaché cette étude à la théorie des figures semblablement variables *(Proceedings of the Lond. Math. soc.*, 1883, p. 184-188). M. H. M. Taylor ramena l'attention sur un cercle qu'il avait considéré précédemment *(The Messenger of Math.*, 1882) et auquel M. Rowe *(Messenger of Math.*, 1883) avait proposé de donner le nom de Cercle de Taylor. Ce cercle avait d'ailleurs été rencontré par MM. Catalan, Neuberg et par d'autres géomètres.

Dans les Programmes scolaires du Gymnase de Recklinghausen, M. A. Artzt

a publié, en 1884 et 1886, une étude de six paraboles appelées maintenant Paraboles de Artzt. Il y considérait aussi plusieurs séries de triangles semblables circonscrits au triangle de référence et il arriva ainsi à des propriétés aussi nombreuses qu'intéressantes. Le même auteur a donné un mémoire *(Beiträge zur Geometrie des Brocard'schen Kreises)* qui fait suite aux précédents.

Tous ces résultats de la géométrie du triangle, M. Casey les a introduits dès 1884 dans l'enseignement classique en Angleterre, en les publiant dans son *A Sequel to Euclid* et dans son *A Treatise on the Analytical Geometry of the point, line, circle and conics sections* (1885). La rapidité avec laquelle se succèdent les éditions de ces deux ouvrages montre la popularité qu'ils ont chez nos voisins. Aussi l'approbation du savant qui fait autorité dans les universités de la Grande-Bretagne n'a pas peu contribué à y répandre l'étude de la géométrie du triangle.

En 1885, la géométrie du triangle semble vouloir se développer plus rapidement encore; on ne se contente plus des propriétés particulières; on essaie surtout de les rattacher à des théories plus générales et à généraliser par suite les résultats déjà acquis. Alors commencent les recherches bibliographiques, et la quantité de points et de lignes remarquables connus à ce moment fait songer à créer une terminologie logique et uniforme.

M. Lemoine, qui avait présenté des mémoires sur le triangle aux divers Congrès de l'*Association française* (La Rochelle, 1882; Rouen, 1883; Blois, 1884) et qui avait donné des nombreux *Théorèmes sur les parallèles et les antiparallèles aux côtés du triangle (Mathesis*, 1884; *Bulletin des Sc. math.*, 1884) indique des *Propriétés diverses du cercle et de la droite de Brocard (Mathesis* 1885); il montre enfin (N. A. M., 1885) comment, de la connaissance du point de Lemoine, on déduit géométriquement les points de Brocard et il généralise les propriétés relatives au cercle de Brocard et au point de Lemoine. Bientôt après (Congrès de Grenoble, 1885), M. Lemoine généralisa encore les résultats du mémoire précédent, ce qui donna naissance à la théorie des points brocardiens. Ces recherches le conduisirent ensuite (Congrès de Nancy, 1886) aux droites et aux figures brocardiennes. Enfin, il inséra dans le *Journ. de Math. élém.* (1885) la note *sur les points associés* présentée au Congrès de Blois (1884). Depuis longtemps, M. Neuberg avait remarqué que, quand, dans le plan du triangle, un point jouit d'une certaine propriété, il existe presque toujours trois autres points qui jouissent de propriétés analogues: ce sont ces idées, développées par M. Lemoine, qui ont donné les points associés.

M. Brocard qui, en 1884 *(Journ. de Math. spéc.)*, avait étudié l'hyperbole de Kiepert, reprit ses recherches l'année suivante. (Propriétés de

l'hyperbole des neuf points et de six paraboles remarquables, *J. spéc.*, 1885). Il montra l'importance de cette courbe et celle de six paraboles associées au triangle *(Paraboles de Artzt)*.

M. d'Ocagne publia une *Monographie de la Symédiane* (J. E., 1885) et une *Note sur la Symédiane* (N. A. M., 1885) qui résumaient et complétaient ses travaux antérieurs. M. M'Cay étudia *(Transactions of the Royal Irish Academy*, 1885) trois cercles qui portent aujourd'hui son nom.

Revenant à la méthode de transformation (*) par droites inverses due à M. le colonel Mathieu *(Étude de Géométrie comparée*, N. A. M., 1865), nous avons appliqué cette théorie à la géométrie du triangle, ce qui nous a permis de donner *(Droites et points inverses*, J. E., 1885) des démonstrations très simples de propositions énoncées par MM. Lemoine, d'Ocagne et Neuberg et d'en découvrir de nouvelles.

M. Lemoine termina le mémoire présenté au Congrès de Grenoble (1885) et cité précédemment par des renseignements historiques et bibliographiques du plus haut intérêt. C'est pour l'établissement de la liste des ouvrages qui se rapportent à ce sujet que MM. Lemoine, Brocard et Neuberg recherchèrent, dans les diverses publications qu'ils avaient sous la main, les traces de travaux antérieurs à 1873.

Sur ce sujet, l'étude bibliographique des auteurs anciens ou même seulement de ceux qui se rapportent à la première partie de ce siècle présente les plus grandes difficultés parce que les mémoires sont dispersés et que les géomètres ne les ont pas facilement à leur disposition. Quand en 1885, par exemple, MM. Lemoine, Brocard et Neuberg se livrèrent à ces recherches, ils ne remarquèrent d'abord, outre ce qu'ils connaissaient par les ouvrages de Lafrémoire et de Clarke déjà signalés, que les articles de MM. Stubbs et Hossard (N. A. M. 1846-48-49). Ils rencontrèrent ensuite la traduction allemande par Jacobi de la *Geometrie de Van Swinden* et quelques articles des *Nouvelles Annales de Mathematiques*; il n'est pas étonnant que le mémoire de Crelle et d'autres encore retrouvés récemment par M. Emmerich aient été oubliés. Il a fallu toute l'agitation à laquelle a donné lieu la recherche des travaux antérieurs à 1850 pour arriver à connaître des mémoires qui n'ont même guère été remarqués en Allemagne à leur apparition, soit que l'esprit des géomètres ne fût pas alors attiré vers ce genre de spéculations, soit peut-être à cause de la publicité trop restreinte qu'ils avaient eue.

Donc, puisque les résultats obtenus par Crelle avaient été oubliés dans son propre pays, on ne peut être surpris qu'ils ne fussent pas connus ailleurs et

* Parmi les mémoires qui ont puissamment contribué au développement de la géométrie du triangle, nous devons citer la Note sur *Méthode pour découvrir des théorèmes en géométrie* que M. Magnus, de Berlin, publia en français dans le *Journal de Crelle* en 1833. Ce travail paraît être l'origine des méthodes de transformations si étendues depuis.

que d'autres chercheurs les aient retrouvés et donnés comme nouveaux à divers intervalles, en France et à l'étranger, dans les publications parues depuis 1873. Ces études ont pris, du reste, une extension et une importance que ni Crelle ni les auteurs anciens n'avaient soupçonnées et que les géomètres modernes ont poussées à un degré vraiment inattendu.

S'il est intéressant pour chaque nation de revendiquer sa part de priorité à la découverte des vérités mathématiques, l'histoire de la science doit prétendre à de plus hautes visées. Il importe moins, croyons-nous, que Crelle, Hoffmann, Grebe, Lhuilier et d'autres géomètres aient ou non rencontré les *premiers* tels ou tels théorèmes *isolés*, s'ils n'ont pas reconnu leur importance réelle pour le développement, l'avenir et les ressources de la géométrie du triangle, que de signaler ceux qui ont effectivement créé la nouvelle géométrie. Le mérite principal appartient à ceux qui, comme MM. Lemoine, Brocard et Neuberg, par exemple, ont compris tout le parti qu'on pouvait tirer de ces découvertes, qui les ont développées (sans connaître, du reste, les travaux antérieurs) et ont ajouté à la géométrie un chapitre véritablement nouveau. A ce point de vue, comme l'a si bien dit M. le Dr Casey dans son *A Sequel to Euclid* (4e édit., 1866, p. 179), « M. Lemoine doit être regardé comme le fondateur de la géométrie moderne du triangle ».

Après la publication de la notice historique de M. Lemoine, les amis de la géométrie du triangle semblèrent rivaliser d'ardeur pour étendre encore son domaine.

M. de Longchamps contribua beaucoup à ses progrès et à sa vulgarisation. Placé alors, depuis un an à peine, à la tête du *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales*, que M. Bourget, appelé au rectorat de l'Académie de Clermont-Ferrand, ne dirigeait plus, M. de Longchamps pouvait mieux que personne aider au développement de la géométrie du triangle. Il y était, pour ainsi dire, préparé de longue date; car, dès 1866, il avait donné une nouvelle méthode de transformation (*Annales de l'Ecole normale supérieure* et N. A. M.) qui se trouva s'appliquer remarquablement bien aux nouvelles études sur le triangle et qui a donné les points et les transversales réciproques. Ces notions furent bientôt reprises par lui dans un article étendu sur les *Généralités de la géométrie du triangle* (J. E., 1886), où il imagina les points réciproques d'ordre quelconque. Dans ce travail furent traitées avec la plus grande généralité les diverses associations de points et de droites : on y trouvait un commencement de nomenclature basée sur l'emploi des coordonnées barycentriques, dont MM. Neuberg et de Longchamps ont fait un usage si heureux dans toutes les questions relatives au triangle. M. E. Hain (*Archives de Grunert*, 1885) venait d'avoir l'idée des points complémentaires en coordonnées normales; M. de Longchamps la généralisa. Il proposa d'appliquer les termes de

complémentaires et anticomplémentaires dans le cas des coordonnées barycentriques, pendant que M. Neuberg proposait les termes de points supplémentaires et antisupplémentaires pour désigner les points déterminés de la même façon en coordonnées normales. Dans sa note *Sur une cubique remarquable du plan du triangle* (Nancy, 1886), M. de Longchamps étudia la figure supplémentaire du cercle circonscrit; son article *Sur un nouveau cercle remarquable du plan du triangle* (J. S. 1886), appelé par M. Casey, Cercle de Longchamps, se rapporte au cercle anticomplémentaire du cercle conjugué; enfin, dans *Mathesis* (1886), il étudia la courbe transcendante qu'il désigna sous le nom de Potentielle triangulaire.

M. P. H. Schoute, en cherchant le lieu des points dont les triangles podaires ont un même angle de Brocard donné, trouva *(Over een nauwer verland tusschen hoek en cirkel van Brocard, Groningue,* 1886) une série de cercles appelés aujourd'hui Cercles de Schoute.

M. Kœhler, dans le tome I de ses *Exercices de géométrie analytique* (1886), publia un grand nombre de questions sur le triangle; il inséra la même année dans le J. E. une note sur une *Cubique remarquable du plan du triangle*. Cette cubique, celle qui se trouve dans une question proposée dans les N. A. M. par M. Darboux (1866, p. 95, *Question* 752), celles qui résultent d'une question proposée par M. E. Lucas (N. A. M., 1876, p. 240, *Question* 1207) sont des cas particuliers d'une classe étendue de cubiques que M. Boutin fera prochainement connaître.

M. Brocard considéra un *groupe de trois paraboles (Académie de Montpellier*, 1886) qui sont les figures anticomplémentaires d'un groupe de paraboles de Artzt. M. Tucker donna deux notes: *Conjugate Tucker circles (Proceedings, Lond. Math. Soc.*, 1886) et *Geometrical Notes (Educat. Times*, 1886) et M. Simmons, *A Theorem in conics (Proceedings*, 1886). M. E. Uhlich, dans un *Programme scolaire du Gymnase de Grimma* (1886), résuma un grand nombre de résultats acquis et donna de précieuses indications bibliographiques. M. le Dr Lieber *(Programme scol. du Gymn. de Stettin)* publie chaque année, depuis 1886, un résumé fort intéressant des propriétés du triangle en s'attachant tout particulièrement à celles qui concernent les points de Brocard et de Lemoine. M. Lemoine, aux Congrès de Nancy (1886), Toulouse (1887), Oran (1888), a encore donné des *Questions diverses sur le triangle* et, en collaboration avec M. Neuberg, des *Notes sur la géométrie du triangle (Mathesis*, 1886). Les centres isogones ont été étudiés par M. Azzarelli dans les *Atti di Nuovi Lincei* (1886). Enfin, nous avons publié nous-même, en 1886, dans le *Journal de Math. élément.*, les trois notes suivantes: *Sur le point de Nagel; Propriétés générales des cercles de Tucker* et *Théorèmes sur les intersections d'un cercle et d'un triangle.*

Au Congrès de Toulouse (1887), plusieurs notes ou mémoires furent présentés: M. C.-A. Laisant détermina, par la méthode des équipollences, *les asymptotes de l'hyperbole de Kiepert* et, dans une note sur l'*Inversion d'un système de* n *points*, il arriva à une construction élégante des foyers de l'ellipse maxima inscrite au triangle. M. E. Cosserat donna diverses *propriétés de l'hyperbole de Kiepert* et nous présentâmes un résumé contenant la définition des termes employés dans la géométrie du triangle, les équations des principaux points et des principales lignes remarquables, sous le titre de *Premier inventaire de la géométrie du triangle.*

M. G. Tarry, en cherchant la solution géométrique des théorèmes énoncés par M. Brocard (Alger, 1881), rencontra un point qui possède des propriétés remarquables *(point de Tarry)* et qui, sur la circonférence circonscrite au triangle, est diamétralement opposé à un autre point *(point de Steiner)*, jouissant aussi de curieuses propriétés. M. Neuberg étudia ces deux points dans deux notes : *Sur le point de Tarry (Mathesis*, 1887) et *sur le point de Steiner* (J. S. 1887). C'est à ce propos qu'il rencontra deux points intéressants déduits de ceux de Brocard *(isobariques des points de Brocard)*. En se servant des coordonnées d'inertie, M. E. Cesaro *(Remarques sur la géométrie du triangle;* N. A. M., 1887) a donné d'élégantes démonstrations de résultats connus et plusieurs propositions nouvelles. Dans *Mathesis* (1887), nous avons publié une note *sur les points complémentaires* où nous faisons la théorie de ces points que nous appliquons ensuite à l'étude de plusieurs éléments remarquables. Enfin, dans le J. E. (1887), nous avons fait connaître les propriétés des *cercles de Neuberg et de M'Cay.*

Depuis cette époque, le nombre des mémoires sur le triangle est devenu de plus en plus considérable et, pour ne pas allonger démesurément ce travail, nous nous contenterons d'en donner une liste qui, quoique fort longue, est encore incomplète. Nous avons d'abord donné les titres des mémoires qui nous ont été signalés depuis la publication de la notice bibliographique de M. Lemoine (1883); à la suite se trouvent, année par année, tous les travaux parus depuis cette époque et dont nous avons eu connaissance.

ABRÉVIATIONS EMPLOYÉES

M. Mathesis.
J. S. Journal de Mathématiques Spéciales.
J. E. Journal de Mathématiques Élémentaires.
E. T. Educational Times.
Q. J. Quarterly Journal of pure and applied Mathematics.
P. L. Proceedings of the London Mathematical Society.
M. M. Messenger of Mathematics.
A. F. Association Française pour l'Avancement des Sciences.

B. M. Bulletin des Sciences Mathématiques.
S. M. Bulletin de la Société Mathématique.
A. G. Annales de Mathématiques de Gergonne.
J. C. Journal für die reine und angewandte Mathematik. *(Journal de Crelle.)*
N. A. M. Nouvelles Annales de Mathématiques.
N. C. M. Nouvelle Correspondance Mathématique.
A. G. H. Archiv. der Physik und Mathematik. *(Archives de Grunert-Hoppe.)*
Z. Zeitschrift für Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterricht. *(Journal d'Hoffmann-Schlömilch.)*
(3) VI. 363-366 signifie : 3me série, tome VI, pages 363 à 366.

1° ADDITIONS A LA NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE DE M. LEMOINE

1750. T. Simpson . . . . . Doctrine and application of Fluxions. Londres.
1798. Fuss . . . . . Nova acta academ. Petropol. XI.
1810. Tedenat. . . . . Solution de questions de minimum, A. G., I, 285-291.
Lhuillier. . . . . Solution de questions de minimum, A. G., I., 297-301.
Un abonné . . . . . Solutions purement géométriques des problèmes de minimis. A. G., I, 375-384.
1816 Crelle . . . . . Ueber einige Eigenschaften des ebenen geradlinigen Dreiecks rücksichtlich dreier durch Winkelspitzen gezogenen geraden Linien. Berlin.
1822. Feuerbach . . . . . Eigenschaften einigen merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren.
1825. C. F. A. Jacobi. . . De triangulorum rectilineorum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis. Numburgi.
1833. Grunert . . . . . Supplemente zu Klügels mathematischen Worterbuchs, erste abtheilung, artikel Dreieck. Leipzig.
1836. C. H. Nagel . . . . Untersuchungen über die wichtigsten zum Dreieck gehörigen Kreise. Leipzig.
C. H. Nagel. . . . . Untersuchungen über die Kreise am Dreieck.
1844. A. Peyronny . . . . Construction géométrique du rapport $\frac{a^p}{b^p}$ N. A. M. (1) III, 371-374.
1846. O. Terquem. . . . . Sur les méthodes métamorphiques et théorie des points correspondants, N. A. M. (1) V, 497-508.
Fasbender. . . . . Ueber die gleichseitigen Dreieck, welche um ein gegebenes Dreiecks gelegt werden können. J. C., XXX, 230-231.
1847. E. W. Grebe. . . . Das geradlinige Dreiecks in Beziehung auf quadrate der Perpendikel, welche man von einem Punkte seiner Ebene auf seine Seiten fällenkann betracht. A. G. H. IX, 250-259.

H. HOFFMANN . . . . In ein gegebenes Dreieck ein ähnliches zu reichnen, dessen Seiten mit den homologen des ersteren einen gegebenen Winkel φ bilden A. G. H., IX, 280-292.

1851. C. A. JACOBI . . . . Die Entfernungsörter geradliniger Dreiecke (Progr, de Pforta).

1852. LAFRÉMOIRE et CATALAN } Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire, 2e édition.

1853. REUSCHLE . . . . . Mathematische Abhandlung (Prog. de Stuttgart).

1854. G. EMSMANN. . . . . Ueber einen merkwürdigen Punkt in Dreiecke. Halle.

A. WIEGAND. . . . . Ein mathematische Thema aus der Schule. Halle.

1855. HELLWIG . . . . . Die durchgeschriebenen Kreise und die Kreisternionspunkte des Dreiecks. Halle.

1856. F. LINDMANN. . . . . Problema. A. G. H, XXVII, 295-300.

1857. L. CREMONA. . . . . Mota intorno ad alcuni teoremi di geometria segmentaria (Progr. Cremone), in-4°, 14 pages.

1863. J. GRIFFITHS . . . . Sur le cercle des neuf points. N. A. M. (2), II, 339-340.

J. GRIFFITHS . . . . Sur les équations de quelques cercles. N. A. M. (2), II, 543-547.

WETZIG. . . . . Ueber das Minimum oder Maximum der Potenzsumme der Abstände eines Punktes von gegebenen Punkten, Geraden oder Ebenen. J. C. LXII, 346-396.

1864. F. J. HARNISCHMACHER. Ueber einen merkwürdigen Punkte des Dreiecks. A. G. H., XLII, 90-94.

REUSCHLE. . . . . Geometrische Notiz zur Wahrung einer Priorität. A. G. H., XLII, 352-354.

J. GRIFFITHS. . . . . Note on the nine point circle. Q. J., VI, 229-230.

J. GRIFFITHS. . . . . Geometrical theorems. Q. J., VI, 357-360.

UNFERDINGER. . . . . Uebungsaufgaben für Schüler. A. G. H., XLII, 227.

1865. GERONO. . . . . Note sur la détermination des points de contact du cercle qui passe par les milieux des côtés d'un triangle avec les cercles tangents à ses côtés. N. A. M., (2), IV, 220-224.

J. GRIFFITHS. . . . . Geometrical Theorems. Q. J., VII, 46-51, 341-346.

H. R. GREER . . . . The geometry of triangle on the equation of a certain envelope. Q. J., VII, 70-74.

GROUARD . . . . . Étude sur les figures semblables. L'Institut, *Bulletin de la Soc. philom.*, 68-73, 104-109.

1866. G. DE LONGCHAMPS. . Sur une nouvelle méthode de transformation en géométrie. A. E. N. (1), III, 321.

G. DE LONGCHAMPS. . Étude de géométrie comparée. N. A. M. (2), V, 118-128.

1868. GRUNERT . . . . . Ueber zwei merkwürdige Punkte des Dreiecks. A. G. H., XLVIII, 37-78.

1870. GROUARD . . . . . Sur les figures planes semblables. L'Institut, 4-6, 51-56, 74-77, 115-118.

1871. A. Hochheim . . . . Ueber den fünften merkwürdigen Punkt. A. G. H. LII, 26-40.

1873. Grouard . . . . . Sur les figures semblables dans l'espace. L'Institut, 34-36, 47-49.

1876. E. Hain. . . . . Ueber den Feuerbach'schen Kreis. A. G. H., LIX, 323-328.

1877. A. Laisant . . . . . Sur quelques propriétés des polygones. A. F. (Le Havre), 142.

E. Hain. . . . . Ueber isogonal entsprechende Punkte des Dreiecks. A. G. H., LX, 92-98.

M. Greiner . . . . . Ueber das Dreieck. A. G. H., LXI, 225-263.

1878. W. Fuhrmann. . . . Der neunpunktekreis des Dreiecks. A. G. H. LXII, 218-219.

1879. G. de Longchamps . . Sur les Conchoïdales. N. C. M., V, 145.

G. de Longchamps . . Sur les cubiques unicursales. N. C. M., V, 403.

1880. M. d'Ocagne. . . . . Note de géométrie. J. E. (1), IV, 535-538.

M. d'Ocagne. . . . . Sur une ligne remarquable du triangle. Antibissectrice. J. E. (1), IV, 158-164.

1882. H. M. Taylor. . . . On a six point circle connected with a triangle. M. M., XI, 177-179.

E. Hain. . . . . Zur Construction reciproker punkte des Dreiecks. A. G. H., LXVIII, 442-444.

1883. R. C. Rowe. . . . . Note on Mr. H. M. Taylor's six point circle. M. M., XII, 36.

R. Tucker. . . . . Note on Mr. H. M. Taylor's six point circle. M. M., XII, 181-182.

H. Brocard. . . . . Nouvelles propriétés du triangle. 4 pages autographiées (Constantine).

H. Brocard. . . . . Démonstration des propriétés du triangle. 8 pages autographiées (Constantine).

E. Hain . . . . . Ueber das gleichseitige Dreieck. A. G. H., LXIX, 44-53.

1884. d'Ocagne . . . . . Sur les transformations centrales des courbes planes. M., IV, 73, 97.

R. Tucker . . . . . The triplicate ratio-circle. Q. J., XX, 57-59.

R. Tucker . . . . . The Symmedian point axis of an associated system of triangles. Q. J., XX et Reprint E. T., XLII.

H. Brocard . . . . . Nouvelles analogies entre l'hyperbole équilatère et le cercle. Hyperbole des neuf points. 8 pages autographiées, in-4°. Montpellier.

R. Tucker . . . . . Symmedian and T. R. circle. Reprint E. T., XLI, 26.

G. de Longchamps. . Applications nouvelles des transversales réciproques. J. S. (2), III, 121-126, 145-152.

G. de Longchamps. . Transversales réciproques et applications. J. S. (2), III, 272.

O Krimmel. . . . . Nekrolog des K. Württembergischen oberstudienraths Dr. Christian-Heinrich Nagel. Tübingen, 18 pages.

E. Hain. . . . . Ueber einen geometrischen ort. A. G. H., LXXI, 94-96.

M. Greiner . . . . . Eigenschaften der Punkte mit reciproken Dreiecks-coordinaten und deren Anwendung auf das Dreieck. A. G. H., LXXI. 130-147.

2° LISTE DES MÉMOIRES PARUS DEPUIS 1885.

1885.

J. Neuberg. . . . Sur le quadrilatère harmonique. M. V. 202-204, 217-221, 241-248, 265-269.

M. d'Ocagne . . . Monographie de la Symédiane. J. E. (2), IV, 173-175, 193-197.

E. Vigarié . . . Note de géométrie (Droites et points inverses). J. E. (2), IV, 33-36, 54-60, 76-79, 101-103, 126-127, 171-173, 224-226, 244-248, 265-267.

E. Lemoine. . . . Sur les points associés du plan d'un triangle ABC (Reproduction du mémoire sur les points associés... A. F. Blois, 1884). J. E. (2), IV, p. 193-196, 217-218, 241-244.

E. Lemoine. . . . Propriétés diverses du cercle et de la droite de Brocard, M. V., 103-108.

E. Lemoine. . . . Sur une généralisation des propriétés relatives au cercle de Brocard et au point de Lemoine. N. A. M. (3), IV, 201-223.

M. d'Ocagne . . . Note sur la Symédiane. N. A. M. (3), IV, 360-367.

M. d'Ocagne . . . Sur une transformation polaire des courbes planes. *Jornal de Sciençaz Math. e Astronom.*, VI, 3-12.

G. de Longchamps. Géométrie analytique. Tome I (Delagrave, Paris), 18.

M. d'Ocagne . . . Étude de géométrie segmentaire. *Jornal de Sciençaz Math. e Astronom.*, VI, 125-128.

H. Brocard. . . . Propriétés de l'hyperbole des neuf points et de six paraboles remarquables. J. S. (2), IV, 12, 30, 58, 76, 104, 123.

R. Tucker . . . . Some properties of a quadrilateral in a circle under rectangle whose opposite sides are equal. Reprint, E. T., XLIV, 125-135.

M. d'Ocagne . . . Nouvelles remarques sur la droite de Simson. J. E. (2), IV.

G. de Longchamps. Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. J. S. (2), IV, 131.

E. Lemoine. . . . Propriétés relatives à deux points ω,ω' du plan d'un triangle ABC qui se déduisent d'un point K quelconque du plan comme les points de Brocard se déduisent du point de Lemoine., A. F. (Grenoble), XIV.

J. Casey. . . . . A treatise on the analytical geometry (Londres et Dublin), 245-257.

W. M'Cay . . . . On three circles related to a triangle. T. R. I., XXVIII, 453-467.

J. Neuberg. . . . Sur les cercles de Tucker. Reprint, E. T. XXXVIII, 71.

J. Neuberg. . . . Sur les figures semblablement variables. P. L., XIV, N° 244 185-189.

G. Boubals. . . . Note de géométrie. J. E. (2), IV, 31.

J. MATHIEU . . . . Remarque sur l'article de M. d'Ocagne (page 360). N. A. M. (3), IV, 471-472.

E. HAIN . . . . . Ueber complementäre Punkte. A. G. H. (2), III, 214-217.

1886.

E. LEMOINE . . . . Note sur quelques points remarquables du plan du triangle. J. E. (2), V, 9-11.

G. DE LONGCHAMPS. Sur un nouveau cercle remarquable du plan du triangle. J. S. (2), V, 57-60, 85-87, 100-104, 126-134.

J. NEUBERG. . . . Sur le point de Steiner. J. S. (2), V, 6-9, 28-30, 51-52, 73-76.

J. NEUBERG. . . . Sur le point de Tarry. M., VI, 5-7.

J. KŒHLER . . . . Exercices de géométrie analytique et de géométrie supérieure. Première partie (Gauthier-Villars, Paris), 182-187, 191-192.

E. LEMOINE et J. NEUBERG. . . . Notes sur la géométrie du triangle. M., VI, 55-59, 73-75.

J. CASEY. . . . . On the harmonic hexagon of a triangle. P. R. I. A. (2), IV, 345-356.

G. TARRY. . . . . Sur les figures semblables associées. M., VI, 97-100, 148-151, 196-203.

G. DE LONGCHAMPS. Le centre de la conique de Kiepert. J. S. (2), V, 77-79.

H. BROCARD. . . . Lettre au sujet de la conique de Kiepert. J. S. (2), V, 91-92.

R. TUCKER . . . . Geometrical notes. Reprint E. T., XXXIX.

H. LIEBER . . . . Ueber die Gegenmittellinie und den Grebes'chen Punkt. Stettin. Grand in-4°, 14 pages.

G. DE LONGCHAMPS. Généralités sur la géométrie du triangle. J. E. (2). V, 109-114, 127-133, 154-158, 177-179, 198-206, 229-233, 243-250, 270-279.

E. VIGARIÉ . . . . Théorèmes sur les intersections d'un cercle et d'un triangle d'après M. H. M. Taylor. J. E. (2), V, 106-109, 151-153.

J. NEUBERG. . . . Centre d'une conique inscrite à un triangle. M., VI, 31-32.

J. CASEY . . . . . A Sequel to Euclid. 4e édition (Dublin), 165-222.

E. VIGARIÉ . . . . Sur le point de Nagel. J. E. (2), V. 158-160.

E. VIGARIÉ . . . . Propriétés générales des cercles de Tucker. J. E. (2), V, 195-198, 222-227.

J. KŒHLER. . . . Sur une cubique remarquable du plan du triangle. J. S. (2), V, 169-175.

R. DAVIS. . . . . Geometrical note on an envelope in connexion with confocal conics. Reprint, E. T., XLV (4 pages).

E. VIGARIÉ . . . . Sur la question 5 (J. Neuberg). J. E. (2), V, 180-181.

R. TUCKER . . . . Geometrical notes: 1° Conjugate Tucker circles; 2° The orthocentroïdal circle. P. L., VII, 420-431.

E. LEMOINE. . . . Quelques questions se rapportant à l'étude des antiparallèles aux côtés d'un triangle. B. S., XIV, 107-128.

LIGNIÈRES. . . . . Le cercle de Feuerbach. J. E. (2), V, 3-6.

E. LEMOINE. . . . Notes à propos du cercle des neuf points. J. E. (2), V, 193-196.

A. BOUTIN . . . . Exercices divers. J. E. (2), V, 233, 250, 279.

E. LEMOINE. . . . Sur quelques points remarquables du plan du triangle ABC. J. S. (2), V, 9-11.

G. DE LONGCHAMPS. La question 199 (Boutin) et l'hyperbole de Kiepert. J. S. (2), V, 231-235.

G. TARRY. . . . . Lettre au sujet du cercle découvert par M. de Longchamps. J. S. (2), V, 235-237.

J. NEUBERG. . . . Équation générale des cercles de Tucker. J. S. (2), V, 241-245.

J. NEUBERG. . . . Géométrie du triangle. Transformation de coordonnées. J. S. (2), V, 265-269.

E. LEMOINE. . . . Sur le cercle des neuf points. N. A. M. (3), V, 122-127.

P. SCHOUTE. . . . Over een nauwer verband tusschen hoek en cirkel van Brocard (Bulletins de l'Académie d'Amsterdam), 39-62. Une planche.

C. THIRY. . . . . Sur le cercle des neuf points. M., VI, 106-108.

J. CASEY . . . . . Propriétés du cercle des neuf points. M., VI, 108.

G. DE LONGCHAMPS. Sur la potentielle triangulaire. M., VI, 246-248.

E. UHLICH . . . . Altes und Neues zur Lehre von den merkwürdigen Punkten des Dreieks (Programme scolaire de Grimma, 34 pages).

H. BROCARD . . . Propriétés d'un groupe de trois paraboles. (Mémoires de l'Académie des Sciences de Montpellier. XI, 51-58.)

P. SCHOUTE. . . . Système de coordonnées des cercles dans le plan (en allemand). (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Vienne, 786-793).

A. ARTZT. . . . . Untersuchungen über ähnliche Dreiecke, die einem festen Dreieck umschrieben sind, nebst einer Anwendung auf die gerade der zwölf harmonischen Punktreihen und ihre beiden gegenbilder, die Ellipse und den Kreis der zwölf harmonischen Punktsysteme (Kreis Brocard's). (Suite au Progr. de 1884.) Programme de Recklinghausen (28 pages et une planche).

A. ARTZT. . . . . Beiträge zur Geometrie des Brocard'schen Kreises (4 pages).

E. LEMOINE. . . . Questions diverses sur la géométrie du triangle. A. F. (Nancy), XV, 83-100.

G. DE LONGCHAMPS. Étude d'une conique remarquable du plan du triangle. A. F. (Nancy), XV, 69-83.

G. TARRY et J. NEUBERG. . . . Sur les polygones et les polyèdres harmoniques. A. F. (Nancy), XV, 12-26.

T. C. SIMMONS . . A Theorem in Conics. P. L., XVII, 418-419.

G. DE LONGCHAMPS. Supplément au Cours de Mathématiques spéciales (Delagrave), 101.

G. DE LONGCHAMPS. Détermination des points d'inflexion dans les cubiques circulaires, unicursales, droites. A. F. (Nancy), XV, 5-11.

1887.

E. CESARO . . . . Remarques sur la géométrie du triangle. N. A. M. (3), VI, 215-242.

C. THIRY . . . . Le troisième livre de géométrie. Théorie des médianes antiparallèles. Gand et Paris.

E. LEMOINE . . . Quelques questions relatives à l'étude des points inverses. J. S. (3), I, 28-31, 53-57, 97-101.

E. VIGARIÉ. . . . Géométrie du triangle. Étude bibliographique et terminologique J. S. (3), I., 34-45, 58-62, 77-82, 127-132, 151-157, 175-177, 199-203, 217-219, 248-250 *(à suivre)*.

J. CASEY. . . . . Propriétés de trois figures semblables. M., VII, 14-15.

R. TUCKER . . . . Sur le cercle triplicateur. M., VII, 12-14.

E. VIGARIÉ. . . . Sur les points complémentaires. M., VII, 6-12, 57-62, 84-89, 105-110.

E. CESARO . . . . Sur la droite de Simson. N. A. M. (3), VI, 257-266.

R. TUCKER . . . . The Sine-Triple-Angle-Circle. M. M., XVI, 125-126.

A. EMMERICH . . . Konstructionsaufgaben zur Geometrie des Brocard'schen Kreises. (Program. de Mülhem-Ruhr), 18 pages.

H. LIEBER . . . . Ueber die gegenmitelline und des Grebe'schen Punkt. (Progr. scol. de Stettin.) *(Suite à celui de 1886.)*

W. FUHRMANN . . Der Brocard'sche Winkel des Dreiecks. A. G.-H. (2), VI, 38 pages.

W. STEGEMANN . . Neuere Untersuchungen betreffend die Geometrie des Brocard'schen Kreises. Z. H. XVIII, 94-106.

R. TUCKER . . . . The Cosine orthocentres of a triangle and a cubic through them. M. M. n° 199, 97-103.

R. TUCKER . . . . Circular notes. Reprint. E. T. 137-139.

R. TUCKER . . . . Uni-brocardal triangles. P. L., XVIII, 393-400.

T.-C. SIMMONS . . A new method for the investigation of harmonic polygons. P. L., XVIII, 289-304.

A. BOUTIN . . . . Exercices divers *(suite)*. J. E. (3), I, 42, 86, 107, 135, 155, 179.

E. VIGARIÉ. . . . Sur quelques cercles remarquables (cercles de Neuberg et de M'Cay). J. E. (3), I, 121, 145, 169, 193, 217.

C. THIRY. . . . . Note sur le quadrilatère harmonique. J. E. (3), I, 222-225.

J. CASEY. . . . . Propriétés de trois figures semblables. M., VII, 14.

E. VIGARIÉ. . . . Premier inventaire de la géométrie du triangle. A. F. (Toulouse), XVI, 87-112.

E. LEMOINE. . . . Questions diverses sur la nouvelle géométrie du triangle. A. F. (Toulouse), XVI, 13-42.

C.-A. LAISANT . . Sur les asymptotes de l'hyperbole de Kiepert. A. F. (Toulouse), XVI, 113-114.

C.-A. LAISANT . . Sur l'inversion d'un système de n points; construction de deux points remarquables du triangle. A. F. (Toulouse), XVI, 282-285.

E. LEMOINE. . . . Solution de la quest. 1565, N. A. M. (3), VI, 582.

H. VAN DORSTEN . Application des propriétés de trois figures semblables. M., VII, 161-162.

O. KRIMMEL . . . Biographie de Nagel. M., VII, 114-115.

J. NEUBERG . . . Sphère de Samuel Roberts. M., VII. 134-135.

W. M'CAY . . . . Sur l'hyperbole de Kiepert. M., VII, 208-220.

C.-A. LAISANT . . Asymptotes de l'hyperbole de Kiepert. M., XVII, 245.

E. VIGARIÉ. . . . Question 171. (Centre des parallèles égales et points de Jerabek.) J. E. (3), I, 209-211, 229-232.

A. EMMERICH . . . Problèmes de construction se rapportant à la géométrie du cercle de Brocard. M., VII, 246-248.

J. NEUBERG . . . Transmutations d'un triangle d'après M. C.-A. Laisant. M., VII, 180-181.
G. ROGIER . . . . Note sur les points isobariques. J. S. (3), I, 103-107.
M. D'OCAGNE . . . Quelques propriétés du triangle. M., VII, 265-271.
A. EMMERICH . . . Sur les points du diamètre de Brocard. M., VII, 272-273.
C. SERVAIS . . . . Sur les transformations birationnelles quadratiques. M., VII, 90-91, 110-114, 129-134, 187-190.
C.-A. LAISANT . . Théorie et applications des équipollences (1 vol., Gauthier-Villars, Paris).

1888

E. CESARO . . . . Sur les cercles inscrits à un triangle. N. A. M. (3), VII, 99-103.
M. D'OCAGNE . . . Note sur les points complémentaires. M., VIII, 62-63.
E. CESARO . . . . Sur la potentielle triangulaire. N. A. M. (3), VII, 257-268.
J. NEUBERG. . . . Sur l'hyperbole Γ' inverse de la droite d'Euler. M., VIII, 81-88.
W. FUHRMANN . . Sur l'hyperbole Γ'. M., VIII, 115-116.
J. NEUBERG. . . . Sur les triangles équibrocardiens. A. F. (Oran), XVII, 135-144.
E. LEMOINE. . . . Notes sur diverses questions de la géométrie du triangle. A. F. (Oran), XVII, 165-175.
C. THIRY. . . . . Considérations sur les symédianes. J. E. (3), II, 25-30.
J. NEUBERG. . . . Géométrie et mécanique. J. E. (3), II, 49-51, 73-76.
E. GELIN. . . . . Relations trigonométriques entre les trois angles d'un triangle. J. E. (3), II, 92-95, 104-108.
J. KŒHLER. . . . Exercices de géométrie analytique et de géométrie supérieure. (Paris), 2me partie.
J. CASEY. . . . . A Sequel to Euclid, 5me édition. (Dublin et Londres), 165-248.
E. LEMOINE. . . et E. VIGARIÉ. . . Note sur les éléments brocardiens. J. E. (3), II, 51-56.
H. PLAMENEWSKY . Les équations des points remarquables. J. E. (3), II, 89-92, 101-104.
J. NEUBERG. . . . Sur quelques espèces particulières de triangles (d'après M. Reuschle). M., VIII, 245-247.
T.-C. SIMMONS . . An Introduction to the recent geometry (chapitre du Companion to the weekly problems papers, par M. J. Milne).
H. LIEBER . . . . Ueber den Brocard'schen Kreis (Progr. de Stettin), (suite aux Program. de 1886 et 1887). 11 pages.
J. CASEY. . . . . A Treatise on plane Trigonometry (Dublin et Londres).
E. GELIN. . . . . Éléments de Trigonométrie plane et sphérique (Namur et Huy).
E. CATALAN. . . . Mélanges mathématiques, III (Paris, Gauthier-Villars).
H. KIEHL. . . . . Die durch drei ähnliche Punktreihen erzeugten Dreiecke und Kegelschnitte (14 pages). (Progr. de Bromberg.)
A. BOUTIN . . . . Exercices divers. J. E. (3), II, 206, 222.

J. NEUBERG. . . . Lettre sur une propriété de deux triangles polaires réciproques. J. E. (3), II, 134-137.

E. VIGARIÉ. . . . Sur le premier cercle de Lemoine. J. E. (3), II, 244-251.

A. EMMERICH . . . Renseignements bibliographiques. J. E. (3), II, 256-257.

A. POULAIN. . . . Sur la terminologie de la géométrie du triangle. J. E. (3), II, 257 et 275.

M. D'OCAGNE . . . Remarques sur les transversales réciproques. J. S. (3), II, 241-242.

E. LEMOINE. . . . Lettre au sujet du point de Steiner. J. S. (3), II, 254-255.

E. VIGARIÉ. . . . Géométrie du triangle. Étude bibliographique et terminologique *(suite)*. J. S. (3), II, 9, 57, 102, 127, 182, 199, 242, 276.

S. ROBERTS. . . . On the analogous of the nine-points circle in space of three dimensions, and connected theorems. P. L., XIX. 152-161.

R. TUCKER . . . . Isosceles. P. L., XIX, 163-170.

F. DAVIS. . . . . The recent geometry of triangle. *(Association for the improvement of Geometrical Teaching)*, 35-46.

R. TUCKER . . . . A group of isostereans. P. L., XIX, 218-220.

R. TUCKER . . . . Note on a rectangular hyperbola. *Reprint*. E. T., XLIX.

DELASSUS. . . . . Une application des transversales réciproques. J. S. (3), II, 3-4.

COLLIGNON . . . . Examen de certaines séries numériques et applications à la géométrie. A. F. (Oran), XVII, 4-24.

E. CESARO . . . . Sur l'analyse barycentrique des courbes. A. M. (2), XV, 313-323.

1889

A. EMMERICH . . . Der Brocard'sche Winkel des Dreiecks. *(Progr. scolaire de Mülheim.)*

W. FUHRMANN . . Der Brocard'sche Winkel. *(Prog. de Königsberg.)*

J. CASEY. . . . . Géométrie élémentaire récente. M., IX, 1-70.

A. BOUTIN . . . . Exercices divers *(suite)*. J. E. (3), III, 14-16, 39-41, 62-65, 82-85 *(à suivre)*.

E. LEMOINE. . . . Lettre à M. de Longchamps sur les points de Brocard. J. E. (3), III, 17-18.

A. POULAIN. . . . Des coordonnées tripolaires. J. S. (3), III, 3-10, 51 *(à suivre)*.

E. VIGARIÉ. . . . Étude bibliographique et terminologique *(suite et fin)*. J. S. (3), III., 18-19, 27-30, 55, 83-86.

E. LEMOINE. . . . Note sur deux faisceaux de trois droites. J. S. (3), III, 35-40.

M. D'OCAGNE . . . Remarques sur une transformation biquadratique. *(Mémoires de la Société royale de Liège)*.

A. GOB. . . . . Notes de géométrie récente (Sur la droite et le cercle d'Euler. — Sur les cercles de Neuberg). *(Mémoires de la Société royale des sciences de Liège)* (2), XVI.

E. LUCAS. . . . . Sur les coordonnées tripolaires. M., IX, 129-134 *(à suivre)*.

E. VIGARIÉ. . . . Lettre à M. de Longchamps. J. S. (3). III, 138.

A. BOUTIN . . . . Géométrie du triangle. Angles et distances. J. E. (3), III, 73-78.

M. D'OCAGNE . . . Note sur le problème du myosotis. J. E [illegible]

A. Boutin . . . . Sur les centres isodynamiques et sur les centres isogones. J. E. (3), III, 99-102 *(à suivre)*.

E. Vigarié . . . . Note sur la question 269. J. E. (3), III, 115-116.

M. d'Ocagne . . . Note sur la question 261. J. E. (3), III, 116-117.

G. Tarry. . . . . Lettre à M. de Longchamps sur le point de Steiner. J. E. (3), III, 134.

H. Plamenewsky . Distance de deux points des coordonnées barycentriques. J. E. (3). III, 150-152.

J. Neuberg. . . . Remarques sur une transformation quadratique. *(Mémoires de la Société royale des sciences de Liège.)* (2), XVI.

R. Tucker . . . . On the recent geometry of triangle. Reprint. E. T.

M. Cay . . . . . On three similar figures, with an extension of Fuerbach's theorem. *(Transactions of the royal Irish Academy.)* XXIX. Part X, 303-320.

A. Muller. . . . Untersuchungen über die merkwürdigen Punkte und Linien des Dreiecks. Kempten.

Nous ajouterons que nous avons publié dans le *Journal de mathématiques spéciales* (1887-1888 et 1889), une *Étude bibliographique et terminologique du triangle*. Elle contient, outre de nombreux renseignements bibliographiques, des notions sur les principales méthodes de transformations employées dans la géométrie du triangle, les définitions, les équations et les principaux théorèmes concernant les éléments les plus remarquables. Ce travail renferme un essai de terminologie.

LISTE DES QUESTIONS RELATIVES A LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

PUBLIÉES DANS DIVERS RECUEILS

I. A. M. 1207 (Lucas); 1556 (Neuberg); 1562 (Schröter); 1242 (Mathieu); 1565 (Cesaro).

J. E. 243, 250 (de Longchamps); 186, 195 (Boubals); 219, 220 (Boutin); 240, 241, 268, 269, 282, 296, 297 (Vigarié); 279 (Gelin); 224 (Reboul); 298 (d'Ocagne); 299, 300 (Lemoine); 243 (X**); 228, 229 (Catalan); 5 (Neuberg).

J. S. 199 (Boutin); 209 (Bourgarel); 135 (Lemoine); 169, 170, 171 (X**).

M. 258, 380, 450 (Neuberg); 553, 557, 561 (Lemoine); 443 (Taylor); 72 (E. Van Aubel); 548, 432 (Brocard); 501, 507 (de Rocquigny); 447 (Neuberg et Jenkins); 469 (Tucker); 596 (Vigarié); 487 (Desprez); 536, 465 (Verniory).

E. T. 7794 (J. Brill); 7747, 8167, 7756 (Miller); 7717, 7614, 7819, 8287, 9950, 10007, 10101, 10139, 8402, 8322, 8527, 8449 (Tucker); 8116, 8349, 8155, 8471, 8434, 8755, 9114 (Neuberg); 9498 (Chakravarti); 8379, 8502 (H. Rau); 8326, 8407, 8283, 8485, 8492, 8361, 8531, 8924, 8613, 8397, 8446, 8728, 8816, 8697, 8531, 9055 (Brocard); 8384, 8039, 8346 (M'Clelland); 8828, 8875 (Nash); 8089, 8168 (S. Roberts); 7839 (Casey); 8189 (Mathews); 9501 (Emmerich); 8409, 8459, 9323, 9057, 9140, 9184 (Vigarié); 8323 (Jenkins); 8375, 8528, 8573, 8821 (Simmons); 8371 (Miss Scott); 8388 (Davis); 8344 (Knowls); 8574 (Réalis); 8831 (Hudson); 8890 (Hine); 9295 (Perrin); 9287 (White); 9202 (Beyens); 9206 (Schoute); 8493 (M'Cay).

Z. 467, 553, 554 (Fuhrmann); 468-470 (Stoll); 495-497 (Artzt); 521-523 (Brocard); 577, 604-609 (Stoll); 578 (Emmerich); 625 (Kiehl); 635, 636 (Artzt); 647 (Fuhrmann); 665, 681 (Stoll); 676, 698 (Emmerich); 677 (Artzt); 678, 720 (Fuhrmann); 736 (Stegemann); 754, 779 (Glaser); 778 (Kiehl).

Les géomètres ne s'en sont pas tenus à l'étude des propriétés du triangle; ils ont essayé de les étendre au quadrilatère, à l'hexagone, puis aux polygones et dans l'espace au tétraèdre et aux polyèdres.

En 1874, M. Picquet (Congrès de Lille) avait montré, ainsi que nous l'avons dit, que, d'une manière générale, il n'existait pas de point qui, dans le tétraèdre, possédât des propriétés analogues à celles dont jouissait le point de Lemoine dans le triangle.

Dix ans après, M. J. Neuberg, dans un admirable *Mémoire sur le tétraèdre (mémoires couronnés de l'Acad. royale de Belgique*, 1884), généralisa dans le tétraèdre la notion du point de Lemoine et des points de Brocard ; ses études le conduisirent à faire connaître de nouvelles propriétés et à étudier plusieurs points remarquables. Cette première tentative ne resta pas isolée.

L'année suivante, M. Tucker (*Some properties of a quadrilateral in a circle under rectangle, whose opposite sides are equal. Educat. Times*, 1885) fit voir que si on prend un quadrilatère assujetti à certaines conditions (celle d'avoir un point de Lemoine), les propriétés connues du point de Lemoine, des points et du cercle de Brocard se retrouvaient immédiatement. Cette étude fut reprise dans *Mathesis* et M. Neuberg (*Sur le quadrilatère harmonique*, 1885) montra que toutes les propriétés démontrées pour le triangle se vérifiaient dans ce quadrilatère particulier qu'il appela harmonique. Les mêmes généralisations furent étendues à l'hexagone par M. Casey (*On the Harmonic Hexagone of a triangle, Royal Irish Academy*, 1886) et enfin aux polygones et aux polyèdres par MM. Neuberg et Tarry (*Sur les polygones et les polyèdres harmoniques, Nancy*, 1886). Plus récemment, M. T. C. Simmons (*Proceedings of the Lond. Math. soc.* 1887) a indiqué une nouvelle méthode pour l'étude des polygones harmoniques (*A new method for the investigation of Harmonics polygons*). Malgré les nombreuses études qui ont été faites, la géométrie du triangle ne s'est pas, à notre avis, développée en France autant qu'elle l'aurait dû. Cela tient, croyons-nous, à ce qu'il n'existe aucun ouvrage spécial, écrit en français, qui contienne un résumé complet didactique et élémentaire de cette nouvelle branche des sciences mathématiques. En Angleterre, grâce aux ouvrages de M. le Dr John Casey (*A Sequel to Euclid; A treatise on Conic Sections*) et de MM. Milne et T. C. Simmons (*Companion to the weekly problem papers*), la géométrie du triangle est devenue classique. Nous n'avons, en français, que la traduction dans le journal *Mathesis* (1889) du chapitre qui, dans la dernière édition du *Sequel to Euclid* (1888) de M. Casey, se rapporte au triangle. M. Neuberg s'est déjà préoccupé de combler cette lacune. Nous espérons que la publication prochaine d'un traité spécial dû au savant professeur belge contribuera dans une large mesure à développer encore et à faire aimer cette science si féconde et si intéressante.

Dans l'esquisse que nous venons de donner, nous n'avons signalé que les principaux mémoires afin de mieux faire ressortir par ses grandes lignes la marche du développement de la géométrie du triangle. Il existe dans les publications françaises et étrangères une multitude de mémoires et de questions isolées, nous ne les signalons pas tous ici, il s'en faut; mais nous avons entrepris de les recueillir et de les résumer; nous espérons faire ainsi une œuvre utile et rendre un juste hommage à tous ceux qui se sont occupés du triangle.

En résumé, comme le montrent les pages précédentes, avant 1873 la géométrie du triangle n'existait pas ; les géomètres avaient énoncé divers théorèmes isolés sans y attacher d'importance et sans voir le lien qui les unissait entre eux. En 1873 parurent les premières propositions d'ensemble sur un point remarquable dont M. Lemoine reconnaissait l'importance par rapport au triangle et dont il continua l'étude les années suivantes. En 1875, M. H. Brocard proposa la détermination graphique des points qui portent aujourd'hui son nom. Enfin, en 1881, grâce surtout aux efforts persévérants de MM. Brocard et Neuberg, la géométrie du triangle devint véritablement une branche distincte des sciences mathématiques, branche que les géomètres ont développée depuis d'une façon si inattendue. Quoi qu'il en soit, M. Lemoine doit être regardé comme le fondateur de la géométrie moderne du triangle et c'est une science toute française qui a pris naissance dans nos Congrès. L'*Association française* doit être doublement heureuse de ce résultat: c'est une large application de sa devise:

Par la Science, pour la Patrie!

IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 3901-3-90.

MATHESIS

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'Ecole normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Liège, Membre de la Société royale des Sciences de Liège, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis!
PH. BRETON

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME I. — ANNÉE 1891.

(TOME XI DE LA COLLECTION.)

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
47, RUE DES CHAMPS, 47

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & FILS
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
55, QUAI DES AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1891

ABRÉVIATIONS.

B. B. Bulletins de l'Académie royale de Belgique.

C. R. Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

N. A. M. Nouvelles Annales de Mathématiques (depuis 1842).

N. C. M. Nouvelle Correspondance Mathématique (1874-1880).

J. M. E. (ou J. M. S). Journal de Mathématiques élémentaires (ou Journal de Mathématiques spéciales), fondé en 1877 par BOURGET, continué par G. DE LONGCHAMPS.

Crelle, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par CRELLE en 1826, continué d'abord par BORCHARDT, puis par KRONECKER et WEIERSTRASS, enfin par KRONECKER (en allemand surtout).

Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par LIOUVILLE en 1836, continué d'abord par RESAL, puis par JORDAN.

(2), III, 327-333 signifie : Deuxième série, tome troisième, pages 327 à 333

PRÉFACE.

Le modeste recueil mathématique que nous avons fondé en 1881 est entré dans la onzième année de son existence. Grâce au nombre toujours croissant de nos abonnés, nous avons pu considérablement augmenter le volume de *Mathesis* que nous avions promis de publier annuellement(*) et, par suite, réaliser, mieux que par le passé, les promesses de notre programme.

Ce programme comprend la publication 1° d'articles originaux; 2° de discussions relatives à des points controversés de méthodologie mathématique; 3° de solutions de questions choisies; 4° d'articles bibliographiques et d'extraits analytiques.

Les articles ou mémoires originaux n'ont pas manqué de 1881 à 1890. Pour en faire apprécier la valeur et l'intérêt, il nous suffira d'énumérer les noms de quelques uns de nos collaborateurs : MM. Barbarin, Berg-

(*) En 1880, nous avions annoncé que nous publierions annuellement 192 pages grand in-8°, soit en dix ans, 1920 pages. Nous en avons publié en réalité 3380, soit 75 p. °/₀ de plus.

mans, Ph. Breton, Brocard, Casey, Catalan, Cavallin. E. Cesáro, Chomé, Déprez, De Tilly, Dewulf, Fauquembergue, Gelin, Gilbert, Goedseels, Günther, Habich, Jamet, Jeřábek, Laisant, Lemoine, Le Paige, de Longchamps, Ed. Lucas, Malet, Mister, d'Ocagne, Peano, Petit-Bois, Realis, de Rocquigny, Schoentjes, Schoute, Servais. Sylvester, Teixeira, Van Aubel, Verstraeten, Vigarié, Weill, etc. La plupart de ces auteurs nous continuent leur concours bienveillant et nous avons en portefeuille des articles d'un grand nombre d'entre eux. Nous rappelons, en particulier, qu'on peut trouver dans *Mathesis* de nombreuses recherches sur la géométrie récente (avec un exposé méthodique de cette branche nouvelle de la science), sur les aires approchées, sur les équations différentielles linéaires, sur les transformations linéaires et quadratiques, sur les nombres parfaits, sur divers systèmes de coordonnées, sur la théorie élémentaire des fonctions d'une variable imaginaire, etc.

Les questions controversées de méthodologie mathématique ne peuvent guère être traitées dans les manuels élémentaires. C'est pourquoi nous y avons attaché une importance spéciale. Il a déjà paru, dans *Mathesis*, des études sur la théorie élémentaire des maxima et des minima, sur l'homogénéité, sur les fractions périodiques, sur les fractions continues, sur la théorie des limites, sur les infiniment petits, sur la notion de longueur d'une courbe et d'aire d'une surface courbe, sur divers principes du calcul différentiel et de géométrie projective, etc. Nous avons touché incidemment, à propos d'articles bibliographiques, à un grand nombre d'autres points. Nous y reviendrons dans la suite. En particulier, toutes les questions qui tiennent de près ou de loin à l'emploi de l'infini en mathématiques, continueront à être examinées avec soin, afin de provoquer les réflexions de nos lecteurs et surtout de prémunir les jeunes gens contre des conceptions fausses, obscures ou arbitraires.

La moitié de chaque numéro du journal est consacrée aux solutions de *questions proposées* dans les livraisons antérieures. Ces questions sont extrêmement utiles pour les élèves et pour les professeurs. Les exercices contenus dans beaucoup de manuels sont insuffisants, trop peu variés

et si l'on peut ainsi dire, trop connus; on les rencontre, en effet, dans tous les recueils. En proposant de nombreuses questions nouvelles, nous avons voulu exciter l'émulation dans la jeunesse des écoles, développer le goût des recherches originales et vulgariser les *procédés particuliers de solution* qui ne se prêtent pas toujours à un enseignement régulier. Nous avons fait tout notre possible pour publier dans *Mathesis* des solutions *vraiment complètes* des questions proposées, en comparant attentivement les réponses données par nos différents collaborateurs et en les accompagnant de commentaires à la fois pédagogiques, scientifiques et bibliographiques.

Les *questions d'examen* permettent aux aspirants-élèves des écoles spéciales de juger par eux-mêmes de leurs connaissances mathématiques, de se familiariser avec les épreuves qu'ils doivent subir et de s'y préparer convenablement en abordant des problèmes peu connus. Nous insérons aussi, parmi les questions d'examen, les propositions nouvelles, suffisamment intéressantes, que nous envoient nos jeunes abonnés.

Dans la *Bibliographie*, nous avons jusqu'ici pu faire connaître à nos lecteurs, à la fois, de bons manuels destinés aux élèves, et des ouvrages dépassant le cadre des programmes officiels, mais indispensables à ceux qui veulent posséder une instruction mathématique sérieuse. Nous avons aussi publié assez d'extraits analytiques de mémoires ou d'articles pouvant intéresser nos abonnés (méthode des isopérimètres ; théorie des fonctions hyperboliques, etc.). Nous continuerons à signaler les meilleurs ouvrages mathématiques paraissant en France, en Belgique et à l'étranger, et à analyser les articles les plus remarquables des revues analogues à la nôtre.

Un programme aussi varié ne peut être réalisé dans les limites d'une seule année; mais nous comptons sur la confiance persévérante de nos abonnés. Jusqu'ici le succès n'a pas fait défaut à notre entreprise, comme le prouvent les noms de nos collaborateurs et l'accueil fait, à l'étranger, à nos articles et à nos questions. Mais il faut que ce succès soit durable, pour que nous puissions apporter à notre revue toutes les

améliorations désirables. Nous faisons donc appel au zèle de ceux qui nous ont aidés jusqu'ici et de tous ceux qui ont à cœur les progrès de l'enseignement des mathématiques. Nous leur demandons de faire connaître *Mathesis*(*) à leurs amis, à leurs collègues ou à leurs condisciples.

15 janvier 1891.

P Mansion, J. Neuberg.

(*) Un mot sur le nom et la devise de notre journal, pour nos nouveaux abonnés.

Μάθησις, en grec classique, signifie *science, doctrine;* en latin ancien, *mathesis* = astrologie et, quelquefois, *mathématiques;* en latin moderne, le dernier sens a prévalu, comme si les mathémathiques formaient la science par excellence. Le spirituel Terquem, à propos de ce nom de *Mathesis* donné aux mathématiques par les modernes cite le passage si connu de la Bible : « Dieu a tout arrangé avec nombre, poids et mesure (*Sap.*, XI, 21), » puis il fait cette remarque : « Si, dans les temps modernes, les sciences physiques ont fait des progrès si considérables, c'est qu'on a suivi, *salva venia*, la voie divine » (N. A. M., 1861, *Bull. bibl.*, p. 50).

Quant à notre devise, imitée d'Horace, elle exprime, sous une forme un peu paradoxale, la haute utilité d'une étroite alliance entre les abstractions de l'analyse et les intuitions de la géométrie.

MATHESIS

SUR LES THÉORÈMES ÉNONCÉS PAR FERMAT, EULER, WILSON, STAUDT ET CLAUSEN;

par M. Ed Lucas, professeur au lycée St Louis.

Désignons par $a, b, c, \ldots$, des nombres premiers, inégaux deux à deux. et posons

$$A = a^{\alpha},\ B = b^{\beta},\ C = c^{\gamma}, \cdots$$
$$q = ABC \ldots,$$
$$\lambda = \alpha + \beta + \gamma + \cdots$$

On sait par le *théorème de Fermat généralisé*, que, s'il y a $\varphi(q)$ nombres premiers et inférieurs à q, pour tout entier x premier à q, la différence

$$x^{\varphi(q)} - 1$$

est un multiple de q, et par conséquent de A. Pour étendre cette congruence à toutes les valeurs entières de x, il suffit de multiplier par x^{α} et *à fortiori*, par x^{λ}; donc l'expression

$$x^{\lambda}(x^{\varphi(q)} - 1)$$

est un multiple de A, B, C, ...; et puisque ces nombres sont premiers entre eux deux à deux, cette expression est divisible par q pour toutes les valeurs entières de x. On a ainsi un *énoncé, plus général, du théorème de Fermat généralisé par Euler*, qui conduit à des conséquences importantes.

Supposons, par exemple, que l'on veuille calculer les restes de la division de x^n par q, en supposant $n > q$. Posons

$$n - \lambda = h\varphi(q) + r, \tag{1}$$

r désignant un entier plus petit que $\varphi(q)$. D'ailleurs, on déduit de (1) l'identité algébrique

$$x^{n-\lambda} - 1 = (x^{\varphi(q)} - 1)Q(x) + x^r - 1,$$

et en multipliant les deux membres par x^{λ},

$$x^n = x^{\lambda}(x^{\varphi(q)} - 1)Q(x) + x^{r+\lambda},$$

donc pour toute valeur entière de x, les restes des puissances

$$x^n \quad \text{et} \quad x^{r+\lambda}.$$

par q sont égaux ; il en sera de même de leurs différences successives et en particulier des restes de la division par q, de

$$\Delta^{q-1}x^n \quad \text{et} \quad \Delta^{q-1}x^{r+\lambda}.$$

Nous allons faire voir que la différence

$$\delta = q - 1 - (r + \lambda)$$

est nulle ou positive ; remplaçons r par sa plus grande valeur $\varphi(q) - 1$, on a

$$\delta \geq q - \varphi(q) - \lambda.$$

Si q ne contient qu'un seul nombre premier a, alors

$$\varphi(a^\alpha) = a(a^{\alpha-1} - 1) \quad \text{et} \quad \delta \geq a^{\alpha-1} - \alpha.$$

1° Pour $\alpha = 1$, on a $\delta = 0$, et q est premier ;

2° Pour $\alpha = 2$, on a $\delta = 0$, si $a = 2$ et alors $q = 4$; mais δ est toujours positif pour $a > 2$, et $\alpha = 2$;

3° Pour $\alpha > 2$, on a toujours $\delta > 0$; il suffit de le vérifier pour la plus petite valeur 2 de a, en développant la puissance d'exposant $(\alpha - 1)$ du binôme $(1 + 1)$.

Considérons maintenant le cas général $q = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$; alors on a

$$\varphi(q) = a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}(a-1)(b-1)(c-1).$$

De l'identité

$$a^\alpha = a^{\alpha-1}(a-1) + a^{\alpha-1},$$

et des résultats précédents, on déduit

$$\begin{aligned} a^\alpha &\geq a^{\alpha-1}(a-1) + \alpha, \\ b^\beta &\geq b^{\beta-1}(b-1) + \beta, \\ c^\gamma &\geq c^{\gamma-1}(c-1) + \gamma, \end{aligned}$$

et en multipliant ces inégalités membre à membre,

$$q > \varphi(q) + \lambda,$$

puisque les coefficients de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, dans le produit des seconds membres, sont au moins égaux à l'unité.

Par conséquent, δ est toujours positif pour q composé > 4 ; et par suite, les restes de la division de

$$\Delta^{q-1}x^n \quad \text{ou de} \quad \Delta^{q-1}x^{r+\lambda}$$

par q sont nuls, puisque l'exposant $(r + \lambda)$ de x est inférieur à l'ordre

des différences. Il nous reste donc à étudier les cas de $q = 4$ et de q premier, que nous remplacerons alors par p.

Pour $q = 4$, les restes des puissances de x^n, pour des valeurs entières et consécutives de x, ainsi que ceux des différences sont données dans le tableau suivant, pour n impair :

Restes de	x^n :	0	1	0	3	0	1	0	3	0
»	Δx^n :	1	3	3	1	1	3	3	1	
»	$\Delta^2 x^n$:	2	0	2	0	2	0	2		
»	$\Delta^3 x^n$:	2	2	2	2	2	2			

par conséquent, les restes de $\Delta^3 x^n$ par 4 sont tous égaux à 2 pour n impair, et ceux des différences d'ordre supérieur sont nuls. On démontre de même que pour n pair, les restes de $\Delta^3 x^n$ sont tous égaux à 2 et ceux de $\Delta^3 x^n$ à 0. On déduit encore de ce tableau que les nombres Δx^n sont toujours impairs.

Enfin pour q premier et égal à p, on peut avoir $r < p - 2$ ou $r = p - 2$; dans le premier cas, n n'est pas un multiple de $(p - 1)$, alors δ n'est pas nul et par conséquent, comme pour q composé > 4, les restes de $\Delta^{p-1} x^n$ sont nuls. Mais si $r = p - 2$, on a $\delta = 0$ et par suite, il faut considérer l'expression

$$\Delta^{p-1} . x^{p-1} = 1 . 2 . 3 \ldots (p - 1);$$

donc cette différence est constante; mais par une autre formule bien connue, du calcul des différences, on a encore

$$\Delta^{p-1} 0^{p-1} = (p - 1)^{p-1} - C^1_{p-1} (p - 2)^{p-1} + \cdots - C^{p-2}_{p-1} . 1^{p-1} + 0^{p-1};$$

en remplaçant les puissances par 1, d'après le théorème de Fermat on voit donc que les restes de

$$\Delta^{p-1} . x^{p-1} \quad \text{et} \quad (1 - 1)^{p-1} - 1$$

par p sont égaux; par suite les restes de $\Delta^{p-1} x^{p-1}$ par p sont égaux à -1. En comparant ce résultat avec le précédent, on en déduit que tout nombre premier quelconque p divise $(p - 1)! + 1$; c'est précisément le *théorème de Wilson*.

En résumé, les résidus de $\Delta^{r-1} x^n$ par q sont constants et égaux à

-1, si q est un nombre premier tel que $(q - 1)$ divise n;
$+2$, si $q = 4$ et si n est impair;
0, dans tous les autres cas.

Théorème de Staudt et Clausen(*). Si l'on désigne, pour abréger, $\Delta^n 0^n$ par Δ_n, la formule d'interpolation de Newton donne l'identité

$$x^n = x\Delta_1 + \frac{x(x-1)}{1.2}\Delta_2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta_3 + \cdots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots n}\Delta_n.$$

Désignons par S_n la somme des puissances d'exposant n des $(x-1)$ premiers nombres; remplaçons successivement x par $1, 2, 3, \ldots (x-1)$ dans la formule précédente. En ajoutant les égalités obtenues, par le procédé de Fermat, on trouve

$$S_n = \frac{x(x-1)}{1.2}\Delta_1 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta_2 + \cdots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n)}{1.2.3\ldots(n+1)}\Delta_n.$$

Si l'on désigne par B_n le coefficient de x dans le développement de S_n, on a

$$B_n = -\frac{\Delta_1}{2} + \frac{\Delta_2}{3} - \frac{\Delta_3}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{\Delta_n}{n}.$$

Telle est l'expression des *nombres de Bernoulli* en fonction des différences de 0^n. Mais, d'après les résultats précédents, les fractions qui ne se réduisent pas à des nombres entiers sont toutes celles dont le dénominateur q est un nombre premier tel que $q-1$ divise n ou $q=4$ pour n impair; mais à l'exception de B_1, les nombres d'indice impair sont tous nuls; donc n est pair et la fraction de dénominateur 4 se réduit à un nombre entier; les autres fractions pour q premier, satisfaisant à la condition énoncée se réduisent à un entier d iminué de 1. Donc, *on a pour les nombres de Bernoulli l'expression*

$$B_n = A_n - \frac{1}{2} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \cdots - \frac{1}{l},$$

dans laquelle A_n *désigne un nombre entier* et $2, b, c, \ldots, l$, *tous les nombres premiers qui surpassent de* 1 *tous les diviseurs de* n.

Paris, 10 janvier 1890.

(*) Voir *Mathesis*, t. III, p. 25.

NÉCROLOGIE.

J. CASEY.

Monsieur le Dr John Casey, professeur à l'Université catholique de Dublin, vient de mourir, le 3 janvier, enlevé par une bronchite aiguë.

Cette triste nouvelle nous est arrivée trop tard pour que nous puissions apprécier dans cette livraison l'œuvre de notre savant collaborateur. Qu'il nous suffise de rappeler que Casey a publié d'importants Mémoires de haute géométrie, particulièrement dans les *Transactions* de la Société royale de Londres dont il était membre effectif, et plusieurs ouvrages d'enseignement à la fois pratiques et originaux.

Dans les pays de langue anglaise, Casey était l'un des plus éminents promoteurs de la *Géométrie récente* du plan, dont il avait donné un exposé complet dans ses ouvrages classiques (*A sequel to Euclid*, *Géométrie analytique*, *Trigonométrie*), en la rattachant étroitement à la fois à la géométrie élémentaire et à la géométrie projective.

Puisse l'expression de notre vive sympathie et de nos regrets, auxquels, nous n'en doutons pas, s'associent les lecteurs de *Mathesis*, apporter quelque consolation à la douleur de sa famille!

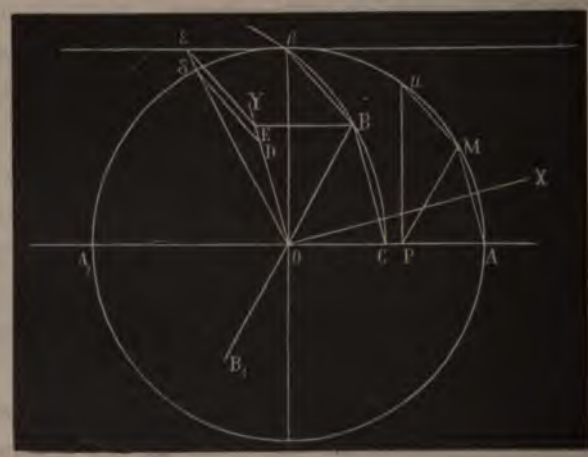
P. M. et J. N.

QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE;

par MADAME PRIM.

I. *Une ellipse étant déterminée par deux diamètres conjugués* AA_1, BB_1, *construire les points où la circonférence décrite sur* AA_1 *comme diamètre rencontre l'ellipse.*

Menons dans la circonférence le rayon $O\beta$ perpendiculaire à AA_1, et joignons βB. On sait qu'à chaque point M de l'ellipse correspond un point μ de la circonférence de façon que la parallèle à OB par M et la parallèle à $O\beta$ par μ se rencontrent en un point P de AA_1. Les triangles $MP\mu$, $BO\beta$ sont homothétiques et AA_1 y est sa propre homologue. Supposons maintenant que M soit le point d'intersection de l'ellipse et de la circonférence. Alors la circonférence $A\beta A_1$ étant rapportée au triangle $MP\mu$ a pour homologue, dans le triangle $BO\beta$, la circonférence passant



par B et β, et ayant son centre sur AA_1. Si donc cette dernière courbe rencontre la droite AA_1 en C, on obtiendra le point M en menant AM parallèle à CB.

II. *Trouver les axes d'une ellipse dont on donne, en grandeur et en position, deux diamètres conjugués* AA_1, BB_1.

La solution de cette question résulte immédiatement de celle du problème précédent.

En effet, les cordes supplémentaires MA, MA_1 étant à angle droit, les

axes de l'ellipse sont dirigés suivant les droites OY, OX parallèles à MA, MA_1. Soit D une extrémité du premier axe, δ le point correspondant de la circonférence $A\beta A_1$. Or, la transformation au moyen de laquelle on passe de l'ellipse proposée à la circonférence $A\beta A_1$, change la droite OD en la droite $A\delta$; et l'on obtient évidemment deux points homologues E, ε de ces droites en menant BE parallèle à AA_1, et $E\varepsilon$, $\beta\varepsilon$ parallèles à $B\beta$, AA_1. La droite $O\varepsilon$ coupe donc la circonférence ABA_1 en un point δ, par lequel il suffit de mener une parallèle δD à βB.

III. *Étant donnée une ellipse* E *rapportée à deux diamètres conjugués* AA_1, BB_1, *on mène par un point quelconque* M *de cette courbe des parallèles à* AA_1, BB_1 *et terminées, respectivement, en* Q, P *aux droites* BB_1, AA_1. *Trouver l'enveloppe de l'ellipse* ε, *qui a pour demi-diamètres conjugués* OP et OQ, O *désignant le centre de* E.

Si l'on pose $OA = a$, $OB = b$, les coordonnées de M sont de la forme $OP = a\cos t$, $OQ = b\sin t$, et l'équation de ε est

$$\frac{x^2}{a^2\cos^2 t} + \frac{y^2}{b^2\sin^2 t} = 1,$$

ou

$$\sin^4 t + \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\sin^2 t + \frac{y^2}{b^2} = 0. \qquad (1)$$

Considérons $\sin^2 t$ comme un paramètre variable; alors l'équation de l'enveloppe de ε s'obtient en égalant à zéro le discriminant de l'équation (1). On trouve

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = \pm 1;$$

l'enveloppe se compose donc des quatre droites AB, A_1B, AB_1, A_1B_1.

IV. *Étant donné un ellipsoïde* E *rapporté à trois diamètres conjugués* AA_1, BB_1, CC_1, *on mène par un point quelconque* M *de cette surface des plans parallèles aux plans* BOC, COA, OAB *et rencontrant* OA, OB, OC *aux points* P, Q, R. *Trouver l'enveloppe de l'ellipsoïde* ε *dont* OP, OQ, OR *sont un système de trois demi-diamètres conjugués.*

On peut représenter les coordonnées de M par $(a\cos\alpha, b\cos\beta, c\cos\gamma)$, sous la condition

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

l'ellipsoïde ε a donc pour équation

$$\frac{x^2}{a^2\cos^2\alpha}+\frac{y^2}{b^2\cos^2\beta}+\frac{z^2}{c^2\cos^2\gamma}=1.$$

Celle-ci est vérifiée par les valeurs

$$x=\pm a\cos^2\alpha,\quad y=\pm b\cos^2\beta,\quad z=\pm c\cos^2\gamma. \tag{2}$$

Le plan tangent au point qui a pour coordonnées les expressions (2), a pour équation

$$\pm\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}\pm\frac{z}{c}=1. \tag{3}$$

Comme il est indépendant de α, β, γ, l'ellipsoïde ε a pour enveloppe les huit plans représentés par l'égalité (3), c'est-à-dire les plans ABC, ABC_1, A_1BC, etc.

Remarque. L'enveloppe proprement dite se compose de huit *portions* de plans limitées par les triangles ABC, ABC_1, ... cependant, on peut même admettre ces plans *indéfinis* comme constituant l'enveloppe cherchée, pourvu que l'on considère également certains hyperboloïdes, que nous allons définir. Remplaçons l'ellipsoïde E par l'hyperboloïde E′ dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

désignons par a', b', c' les coordonnées d'un point M′ de E′ et prenons sur OA, OB, OC les longueurs $OP'=a'$, $OQ'=b'$, $OR'=c'$; enfin, construisons l'hyperboloïde ε' qui a pour demi-diamètres conjugués OP′, OQ′, OR′, dont les deux premiers sont transverses et le troisième imaginaire. L'enveloppe de ε' est encore constituée par certaines portions des plans ABC, ABC_1, etc. Le lecteur voit facilement qu'il y a encore à considérer d'autres hyperboloïdes analogues à ε'.

V. *Étant donnée une surface s rapportée à trois axes* OX, OY, OZ, *on déduit, de chaque point m de cette surface ayant pour coordonnées* x, y, z, *un autre point* M *dont les coordonnées* X, Y, Z *résultent des égalités*

$$X=x,\quad Y=y+kx,\quad Z=z+lx, \tag{4}$$

k et l étant des constantes. Connaissant le plan tangent au point m de la surface s, trouver le plan tangent au point M *de la surface* S, *lieu de* M.

Nous pouvons représenter S et s par les équations

$$f(X, Y, Z) = 0, \quad f(x, y + kx, z + lx) \equiv \varphi(x, y, z) = 0$$

et les plans tangents aux points M, m par les équations

$$(\alpha - X)\frac{df(X,Y,Z)}{dX} + (\beta - Y)\frac{df(X,Y,Z)}{dY} + (\gamma - Z)\frac{df(X,Y,Z)}{dZ} = 0, \quad (5)$$

$$(\alpha - x)\frac{d\varphi(x, y, z)}{dx} + (\beta - y)\frac{d\varphi(x, y, z)}{dy} + (\gamma - z)\frac{d\varphi(x, y, z)}{dz} = 0. \quad (6)$$

En vertu des relations (4), les équations (5) et (6) prennent la forme

$$(\alpha - x)\frac{df}{dX} + (\beta - y - kx)\frac{df}{dY} + (\gamma - z - lx)\frac{df}{dZ} = 0,$$

$$(\alpha - x)\left(\frac{df}{dX} + k\frac{df}{dY} + l\frac{df}{dZ}\right) + (\beta - y)\frac{df}{dY} + (\gamma - z)\frac{df}{dZ} = 0,$$

f étant mis pour $f(X, Y, Z)$. En y faisant $\alpha = 0$, on trouve la même équation. Donc les deux plans tangents se coupent sur le plan YZ, ce qui permet de les déduire l'un de l'autre.

BIBLIOGRAPHIE.

Traité d'Arithmétique élémentaire par C. BERGMANS, professeur à l'Athénée royal de Gand, chargé de cours à l'École normale des Sciences annexée à l'Université de la même ville. Mons, Hector Manceaux, 1890 (in 8° cartonné, VIII-263 pages).

Le nouveau livre de M. Bergmans fait suite à son *Précis d'Arithmétique*, petit ouvrage excellent destiné aux élèves de septième et de sixième. A cause de cette circonstance, l'auteur a pu rédiger d'une façon plus concise la partie élémentaire du nouveau traité et condenser ainsi, en une bonne centaine de pages, les théories inscrites au programme des Athénées belges.

La rigueur des raisonnements et la correction du langage sont les qualités essentielles d'un ouvrage destiné à l'enseignement. Le *Traité d'Arithmétique* les possède; M. Bergmans s'y révèle comme professeur, comme érudit et comme lettré.

Nous ferons toutefois quelques observations critiques sur des points secondaires. Certaines règles nous semblent démontrées d'une façon trop laconique; en outre nous n'aimons guère l'emploi des petits caractères pour les démonstrations : les élèves seront enclins à les considérer comme peu importantes. Enfin, tout en reconnaissant que la matière est bien subdivisée, nous craignons que l'usage trop fréquent de titres et de sous-titres ne finisse par nuire à la clarté

Ces réserves faites, nous aurions à rendre hommage au mérite du *Traité d'Arithmétique* qui est avant tout une œuvre originale : l'auteur n'a pas hésité à sortir de l'ancienne ornière et les innovations sont nombreuses, soit dans les règles, soit dans la marche adoptée pour l'exposé des théories. Ainsi la numération des nombres entiers et celle des nombres fractionnaires sont traitées en même temps. De cette façon, on peut, dès le début, énoncer les conventions qui permettent de donner une définition générale de la multiplication. Le multiplicateur s'écrit avant le multiplicande et devient ainsi un véritable coefficient (le signe × s'énonce « fois »). L'élévation aux puissances et l'extraction des racines sont rangées parmi les opérations fondamentales, etc. On peut, sans doute, être adversaire de ces réformes et préférer l'ancien système ; on n'en sera pas moins heureux de trouver un traité qui n'a pas été jeté dans le moule invariable d'où sont sorties tant d'œuvres banales.

La partie théorique est suivie d'un bon recueil de problèmes.

Quelques questions spéciales telles que les différents systèmes de numération, la théorie élémentaire des congruences, etc. sont traitées en appendice Nous voudrions voir figurer à cet endroit ou même dans le corps de l'ouvrage, un exposé général des caractères de divisibilité et une théorie des fractions périodiques basée sur la méthode des limites, au lieu de trouver ces questions reléguées dans les notes à la fin du volume.

Une grande partie de l'intérêt du livre réside dans ces notes ; il y a là quelques pages qui représentent une somme considérable de travail et qui contiennent une foule de renseignements curieux. Un grand nombre de publications scientifiques ont été consciencieusement passées en revue et, si cette partie du *Traité* n'est pas d'une utilité immédiate pour les élèves, elle sera lue avec plaisir par tous les professeurs.

Au point de vue matériel, le volume est bien soigné, sauf quelques imperfections de détail qui disparaîtront, sans doute, à la seconde édition.

Nous donnons ci-après le sommaire des matières traitées :

PRÉFACE. Notions préliminaires

LIVRE I. *Numération*. Formation des nombres entiers et fractionnaires. Numération.

LIVRE II. *Calcul et théorie des nombres*. Opérations fondamentales sur les nombres entiers : addition, soustraction, multiplication, division, extraction des racines. Nombres premiers, plus grand commun diviseur. Caractères de divisibilité Décomposition en facteurs. Moindre multiple. Fractions ordinaires : transformations et opérations fondamentales. Généralisation de la théorie des fractions. Fractions décimales. Conversion des fractions ; fractions périodiques. Nombres complexes.

LIVRE III. *Rapport et proportions* (avec applications).

LIVRE IV. *Problèmes d'application*. Intérêt ; escompte ; échéance commune ; rentes sur l'état ; caisse d'épargne ; questions diverses. Mélanges et alliage. Problèmes relatifs à la géographie, à la cosmographie, à la chimie, à la physique, aux sciences juridiques, etc. Questions proposées dans les concours.

APPENDICE (cent pages). I. Systèmes de numération; en particulier, système de Cauchy avec des nombres négatifs. II. Numération des Grecs et des Romains. III. Théorie élémentaire des congruences; application aux preuves des opérations. IV. Système métrique. Anciennes mesures belges. Mesures hollandaises, anglaises, allemandes. Calendrier. V. Machines à calcul; règles à calcul; calcul par le trait. Tables de calculs faits; bâtons de Néper; cercle à calcul. VI Vocabulaire étymologique.

NOTES. Ces notes, au nombre de 34, renferment une foule de renseignements historiques et scientifiques très intéressants : n. 8. Méthodes abrégées pour la multiplication; n 9, pour l'élévation au carré; n. 14, pour la division; n. 16, pour la racine carrée; n. 17, pour la racine cubique; n. 21, caractères de divisibilité (avec une notice sur Mondeux et les autres calculateurs-prodiges); n. 24, les nombres parfaits; n. 32, problèmes curieux; n. 34, mesures grecques et romaines.

(M. STUYVAERT.)

SUR LE TERME COMPLÉMENTAIRE DE LA SÉRIE DE TAYLOR;

par M. M D'OCAGNE, ingénieur des ponts et chaussées.

Soit $f(x)$ une fonction ayant une dérivée d'ordre $n+1$, finie et déterminée dans l'intervalle de x_0 à x_0+h. Posons

$$(1) \qquad f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^n(x_0) + R,$$

et cherchons l'expression du terme complémentaire R. Remarquant que ce terme doit s'annuler en même temps que h, on peut écrire

$$R = P\,[f^n(x_0+h) - f^n(x_0)].$$

Pour déterminer P nous formerons la fonction

$$F(x) = f(x_1) - [f(x) + (x_1 - x)f'(x) + \cdots + \frac{(x_1-x)^n}{n!} f^n(x)] - P[f^n(x_1) - f^n(x)],$$

où $x_1 = x_0 + h$ et où P a une valeur constante égale à celle qu'il s'agit de déterminer.

La fonction $f^{n+1}(x)$ étant finie et déterminée dans l'intervalle de x_0 à x_1, les fonctions $f^n(x), f^{n-1}(x), \ldots, f'(x), f(x)$ sont continues dans cet intervalle; par suite, il en est de même de la fonction $F(x)$; comme

d'ailleurs cette fonction s'annule pour $x = x_0$ par hypothèse, et pour $x = x_1$, identiquement, il en résulte, d'après le théorème de **M. Bonnet**(*), que sa dérivée s'annule pour une valeur de x intermédiaire entre x_0 et x_1. Or, cette dérivée est donnée par

$$F'(x) = -f^{n+1}(x)\left[\frac{(x_1 - x)^n}{n!} - P\right].$$

Si donc nous supposons que la dérivée $f^{n+1}(x)$ *ne s'annule pas dans l'intervalle de* x_0 *à* x_1, nous voyons que l'on doit avoir

$$\frac{(\theta h)^n}{n!} - P = 0, \quad \text{avec} \quad 0 < \theta < 1.$$

Par suite, d'après (1),

$$R = \frac{(\theta h)^n}{n!}[f^n(x_0 + h) - f^n(x_0)]. \tag{2}$$

Si on remplace x_0 par 0 et h par x, on a

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^n(0) + \frac{(\theta x)^n}{n!}[f^n(x) - f^n(0)]. \tag{6}$$

Comme $\frac{x^n}{n!}$ tend vers zéro quand n croît indéfiniment, on voit que si la limite de $f^n(x) - f^n(0)$ est finie, le terme complémentaire tend vers zéro. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si, à partir d'un certain rang, aucune des dérivées de $f(x)$ *ne s'annule entre* 0 *et* x, *et si la limite de* $f^n(x) - f^n(0)$ *est finie lorsque* n *croit indéfiniment, la fonction* $f(x)$ *est développable, pour la valeur de* x *considérée, par la formule de Maclaurin.*

La réciproque n'est pas vraie. La condition énoncée est, en effet, suffisante, mais nullement nécessaire.

(*) Ou plutôt de Rolle. Cauchy, le premier a démontré rigoureusement ce théorème. Serret en a donné, en l'attribuant à M. Bonnet, une démonstration incomplète (P. M.).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 575.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 148.)

On donne deux cercles Δ, Δ′ *qui se coupent aux points* O, Q ; *on mène par* O *une transversale qui coupe l'un des cercles en* M, *l'autre en* M′. *Soit* P *le conjugué harmonique de* O *par rapport à* MM′. *Démontrer que, quand la transversale tourne autour de* O, *le point* P *décrit une strophoïde dont le point double est en* O. *Déterminer les cercles osculateurs en* O.

(DEWULF.)

Solution par MM. MEURICE, MANDART *et* LIÉNARD. Transformons la figure par rayons vecteurs réciproques, le pôle de transformation étant placé en O. Soient m, m', p, q les inverses des points M, M′, P, Q ; les cercles Δ, Δ′ se transforment en deux droites δ, δ' passant par q, et comme

$$\frac{1}{OP} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'}\right),$$

on a

$$Op = \frac{1}{2}(Om + Om').$$

Donc le lieu de p s'obtient en prenant les milieux des segments que deux droites fixes δ, δ' interceptent sur les droites menées par O. Soient μ, μ' les milieux de qm, qm' ; les points m, m' engendrant deux ponctuelles projectives, il en est de même des points μ, μ', et les droites μp, $\mu' p$ se correspondent dans deux faisceaux projectifs dont les sommets sont à l'infini sur δ, δ'. Il résulte de là que p décrit une hyperbole (H) passant par q, O, ayant ses asymptotes parallèles à δ, δ' et pour centre le milieu de qO.

Le lieu de P est l'inverse de (H) par rapport à O. C'est donc une cubique ayant un point double au point O, transformé des points de (H) situés à l'infini sur δ, δ' ; les tangentes en ce point sont, évidemment, parallèles à δ, δ', et se confondent, par conséquent, avec les tangentes aux cercles Δ, Δ′. Les cercles osculateurs en O sont les inverses des asymptotes de (H) ; leurs rayons sont donc doubles de ceux de Δ, Δ′.

Si les cercles Δ, Δ′ se coupent à angle droit, le lieu de P est une

strophoïde de Quetelet : s'ils se touchent en O, le lieu est une circonférence.

NOTE. M. SERVAIS arrive aux mêmes résultats en observant que le lieu de P est la transformée birationnelle quadratique de troisième espèce du cercle Δ', le pôle étant en O et le cercle Δ étant la conique fondamentale de la transformation. Notre honorable correspondant donne aussi la construction de la tangente et du cercle osculateur au point P : 1° Si M_1, M'_1, P_1 sont les positions des points M, M', P sur une seconde sécante menée par O, les droites MM_1. $M_1M'_1$, PP_1 concourent en un même point, car $(OMM'P) = (OM_1M'_1P_1)$; il en résulte que les tangentes menées en M, M', P aux lieux décrits par ces points concourent en un même point. 2° Si $\frac{1}{\rho} = \varphi(\omega)$ est l'équation d'une courbe en coordonnées polaires (ρ, ω), le rayon de courbure r est donné par la formule

$$r = \frac{1}{\varphi(\omega) + \varphi''(\omega)} \cdot \frac{1}{\sin^3 u},$$

u désignant l'angle de la tangente avec le rayon vecteur.

Or, entre les rayons vecteurs ρ, ρ_1, ρ_2 des courbes décrites par les points P, M, M', on a la relation

$$\frac{2}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2},$$

d'où l'on déduit la relation entre les rayons de courbure :

$$\frac{2}{r \sin^3 u} = \frac{1}{r_1 \sin^3 u_1} + \frac{1}{r_2 \sin^3 u_2}.$$

M. DÉPREZ traite la question plus générale où les circonférences Δ, Δ' sont remplacées par les coniques

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = 0, \quad A'y^2 + \cdots + E'x = 0;$$

en passant par les coordonnées polaires, il trouve pour le lieu de P,

$$\frac{2}{\rho} = -\frac{A \sin^2 \omega + 2B \sin \omega \cos \omega + C \cos^2 \omega}{D \sin \omega + E \cos \omega} - \frac{A' \sin^2 \omega + \cdots}{D' \sin \omega + E' \cos \omega},$$

et en repassant aux coordonnées rectangulaires,

$$(Ay^2 + 2Bxy + Cx^2)(D'y + E'x) + (A'y^2 + 2B'xy + C'x^2)(Dy + Ex) + 2(D'y + E'x)(Dy + Ex) = 0.$$

×Question 605.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 56 et t. X, p. 176.)

Les constantes A, B, C *étant données, déterminer* A_1, B_1, C_1 *de façon que l'expression*

$$P=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\frac{A_1}{(x-a)^2}+\frac{B_1}{(x-b)^2}+\frac{C_1}{(x-c)^2}$$

soit le carré d'une fonction rationnelle en x. A quelle condition le problème est-il possible? Les constantes a, b, c sont supposées différentes.

Solution d'après MM. Ch. Lavallée-Poussin *et* Vladimirescu. Posons

$$A_1=\alpha^2,\quad B_1=\beta^2,\quad C_1=\gamma^2.$$

On aura évidemment

$$\sqrt{P}=\frac{\alpha}{x-a}+\frac{\beta}{x-b}+\frac{\gamma}{x-c}.$$

En élevant au carré, on trouve dans P les doubles produits

$$\frac{2\alpha\beta}{(x-a)(x-b)}=\frac{2\alpha\beta}{b-a}\left\{\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-a}\right\},$$

$$\frac{2\beta\gamma}{(x-b)(x-c)}=\frac{2\beta\gamma}{c-b}\left\{\frac{1}{x-c}-\frac{1}{x-b}\right\},$$

$$\frac{2\gamma\alpha}{(x-c)(x-a)}=\frac{2\gamma\alpha}{a-c}\left\{\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-c}\right\}.$$

On devra donc avoir

$$\frac{2\gamma\alpha}{a-c}-\frac{2\alpha\beta}{b-a}=A,\quad \frac{2\alpha\beta}{b-a}-\frac{2\beta\gamma}{c-b}=B,\quad \frac{2\beta\gamma}{c-b}-\frac{2\gamma\alpha}{a-c}=C$$

Si l'on ajoute entre elles ces équations, on trouve

$$A+B+C=0.$$

C'est la condition qui doit être remplie pour que le problème soit possible; si elle est vérifiée, la question admettra une infinité de solutions. En effet, posons

$$2\frac{\beta\gamma}{c-b}=p,\quad 2\frac{\gamma\alpha}{a-c}=q,\quad 2\frac{\alpha\beta}{b-a}=r.$$

On en conclura

$$\alpha^2 = A_1 = \frac{1}{2}\frac{(a-c)(b-a)}{c-b}\frac{qr}{p}, \quad \beta^2 = B_1 = \frac{1}{2}\frac{(b-a)(c-b)}{a-c}\frac{rp}{q},$$

$$\gamma^2 = C_1 = \frac{1}{2}\frac{(c-b)(a-c)}{b-c}\frac{qp}{r},$$

p, q, r satisfaisant aux équations

$$q - r = A, \quad r - p = B, \quad p - q = C.$$

Il n'y a là que deux équations distinctes; nous pouvons introduire une quantité arbitraire $K = p + q + r$. On a alors

$$p = \tfrac{1}{2}(K + C - B), \quad q = \tfrac{1}{2}(K + A - C), \quad r = \tfrac{1}{2}(K + B - A).$$

Ces valeurs reportées ci-dessus donnent les valeurs de A_1, B_1, C_1 en fonction d'une quantité arbitraire K.

Question 680.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 72.)

Soient $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ des quantités positives quelconques; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_{n-1}$ des quantités positives ou négatives dont la valeur absolue est au plus égale à l'unité Démontrer que le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} a_0+a_1 & -\lambda_1 a_1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ -\lambda_1 a_1 & a_1+a_2 & -\lambda_2 a_2 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 a_2 & a_2+a_3 & -\lambda_3 a_3 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & a_{n-2}+a_{n-1} & -\lambda_{n-1}a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & -\lambda_{n-1}a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}$$

est nécessairement positif. (Novarese.)

Solution d'après MM. E. Baudran *et* Lalisse. Je développe D_n suivant les éléments de la dernière ligne : il vient

$$D_n = (a_{n-1} + a_n) D_{n-1} - \lambda_{n-1}^2 a_{n-1}^2 D_{n-2}$$
$$= a_n D_{n-1} + a_{n-1}(D_{n-1} - \lambda_{n-1}^2 a_{n-1} D_{n-2}).$$

Donc, si

$$D_{n-1} > 0 \text{ et } D_{n-1} > a_{n-1} D_{n-2},$$

il s'ensuit

$$D_n > 0 \text{ et } D_n > a_n D_{n-1}.$$

Or

$$D_1 = a_0 + a_1, \text{ c'est-à-dire } D_1 > 0,$$

$$D_2 = (a_0 + a_1)(a_1 + a_2) - \lambda_1^2 a_1^2$$

$$= a_2 D_1 + a_1 (a_0 + a_1 - \lambda_1^2 a_1), \text{ c'est-à-dire } D_2 \overset{>}{>} 0 \; a_2 D_1;$$

donc, etc.

Il va sans dire que la proposition subsiste si l'on écrit partout λ_i au lieu de $-\lambda_i$.

Autre solution par M. Sohib. M. E. Cesáro nous a envoyé une généralisation de la question 680 que nous espérons publier ultérieurement.

×Question 688.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 152.)

On donne le système

$$a \sin(x - \alpha) \sin(y - z) + b \sin(y - \beta) \sin(z - x) + c \sin(z - \gamma) \sin(x - y) = 0,$$
$$a \cos(x - \alpha) \sin(y - z) + b \cos(y - \beta) \sin(z - x) + c \cos(z - \gamma) \sin(x - y) = 0.$$

En déduire les valeurs de $y - z$, $z - x$, $x - y$. (J. Neuberg.)

Solution par MM. Joachimescu (Bucharest), Lalisse, Cristesco, Decamps (Piéton), de Strékalof (St-Pétersbourg) Ch. de la Vallée-Poussin et Denys (Avesnes). Les équations proposées sont homogènes par rapport aux quantités $a \sin(y - z)$, $b \sin(z - x)$, $c \sin(x - y)$; donc celles-ci sont proportionnelles aux déterminants formés avec les éléments

$$\begin{Vmatrix} \sin(x - \alpha), & \sin(y - \beta), & \sin(z - \gamma) \\ \cos(x - \alpha), & \cos(y - \beta), & \cos(z - \gamma) \end{Vmatrix}$$

et l'on peut écrire, λ étant un facteur de proportionnalité,

$$\lambda a \sin(y - z) = \sin(y - \beta) \cos(z - \gamma) - \cos(y - \beta) \sin(z - \gamma)$$
$$= \sin(y - \beta - z + \gamma), \text{ etc.} \qquad (1)$$

Posons

$$y - z = X, \quad z - x = Y, \quad x - y = Z,$$
$$\beta - \gamma = A, \quad \gamma - \alpha = B, \quad \alpha - \beta = C;$$

les équations (1) prennent la forme

$$\lambda a \sin X = \sin(X - A) = \sin X \cos A - \cos X \sin A, \text{ etc.}$$

ou

$$\cot X = \cot A - \lambda a \operatorname{cosec} A, \text{ etc.}$$

Pour déterminer λ, observons que les égalités

$$X + Y + Z = 0, \quad A + B + C = 0,$$

entraînent

$$\Sigma \cot Y \cot Z = 1, \quad \Sigma \cot B \cot C = 1.$$

Il résulte de là que

$$\Sigma (\cot B - \lambda b \operatorname{cosec} B)(\cot C - \lambda c \operatorname{cosec} C) = 1,$$

donc

$$\lambda = \frac{\Sigma a \operatorname{cosec} A (\cot B + \cot C)}{\Sigma bc \operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C} = -\frac{\Sigma a \sin A}{\Sigma bc \sin A}.$$

Remarque I. D'après les égalités (1), le triangle construit avec les côtés $a \sin(y-z)$, $b \sin(z-x)$, $c \sin(x-y)$ a pour angles

$$\pi - (y - z + \gamma - \beta), \quad \pi - (z - x + \alpha - \gamma), \quad (y - x + \alpha - \beta) - \pi.$$

(Denys.)

Remarque II. Menons trois droites OA, OB, OC faisant avec un axe ζ les angles α, β, γ, et prenons les longueurs OA, OB, OC égales à a, b, c. Je dis que les inclinaisons x, y, z de BC, CA, AB sur l'axe ζ vérifient les équations proposées. En effet, on a l'équipollence

$$OA \cdot BC + OB \cdot CA + OC \cdot AB = 0. \qquad (A)$$

Mais

$$OA = a\varepsilon^{-\alpha}, \quad OB = b\varepsilon^{-\beta}, \quad OC = c\varepsilon^{-\gamma};$$

les longueurs BC, CA, AB étant proportionnelles aux sinus des angles du triangle ABC, on peut écrire

$$BC = \mu \sin(y-z)\varepsilon^{x}, \quad CA = a \sin(z-x)\varepsilon^{y}, \quad AB = \mu \sin(x-y)\varepsilon^{z}.$$

Par conséquent, l'équipollence (A) prend la forme

$$a \sin(y-z)\varepsilon^{x-\alpha} + b \sin(\alpha - x)\varepsilon^{y-\beta} + c \sin(x-y)\varepsilon^{z-\gamma} = 0,$$

et donne, par dédoublement, les deux équations proposées. (Laisant.)

Autres solutions partielles ou complètes par MM. Cristesco, Decamps, Lalisse.

×Question 694.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 216.)

Chercher le minimum de la bissectrice d'un des angles aigus d'un triangle rectangle dont la hauteur relative à l'hypoténuse est donnée. (Cl. Thiry)

Solution par MM. Decamps, Brocard, Cristesco, Lalisse, Russo, E. Baudran, Denys, de Bözóky, Brandza, M^lle^ Pompilianu, Ch. de la Vallée-Poussin, Déprez *et* Vladimirescu (Bucharest). Si h est la hau-

teur donnée du triangle ABC rectangle en A, la bissectrice x de l'angle B a pour expression

$$x = \frac{AB}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{h}{\sin B \cos\frac{B}{2}}.$$

Le minimum de x correspond donc au maximum du produit

$$\sin^2 B \cos^2\frac{B}{2} = 4 \sin^2\frac{B}{2}\cos^4\frac{B}{2} = 4 \sin^2\frac{B}{2}\left(1 - \sin^2\frac{B}{2}\right)^2;$$

les facteurs

$$\sin^2\frac{B}{2}, \quad 1 - \sin^2\frac{B}{2}$$

ayant une somme constante, doivent être proportionnels à leurs exposants. On a donc

$$\frac{\sin^2\frac{B}{2}}{1} = \frac{1 - \sin^2\frac{B}{2}}{2}, \quad \sin\frac{B}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad B = 70°31'40'', \quad x = \frac{3}{4}h\sqrt{3}.$$

Seconde solution par M. VLADIMIRESCU. — On a encore

$$\cos B = \frac{1}{3}, \quad AB = \frac{1}{3}BC.$$

L'angle cherché B est la mesure du dièdre du tétraèdre régulier. (J. N.)

QUESTIONS D'EXAMEN.

466. Les côtés d'un triangle forment une progression arithmétique, ayant pour raison le quart du rayon r du cercle inscrit. Exprimer ces côtés en fonction de r.

On peut représenter ces côtés par $x - \frac{1}{4}r$, x, $x + \frac{1}{4}r$. Substituons-les dans la formule

$$pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

il vient $x = \frac{7r}{2}$.

Si la raison de la progression est kr, le côté moyen du triangle est $2r\sqrt{k^2+3}$.

467. Démontrer que

$$2(a + \sqrt{a^2+b^2})(b + \sqrt{a^2+b^2}) = (a + b + \sqrt{a^2+b^2})^2.$$

462. Résoudre le système

$$\frac{a^2}{5y}+\frac{4}{20x}=\frac{a}{xy},\quad 3ax-a=\frac{2y^2-2y}{y-1}.$$

(École des Beaux-Arts, Paris, 1890.)

Solutions

$$y=1,\quad x=\frac{5a-1}{a^2};\quad x=\frac{11}{2a+3},\quad y=\frac{v(15-a)}{2a+3},$$

QUESTIONS PROPOSÉES(*).

17. (Voir *Mathesis*, (1) I, p. 30). Si A, B, C sont des quantités positives, a, b, c des quantités réelles, les trois racines de l'équation

$$(x-a)(x-b)(x-c)-A(x-a)-B(x-b)-C(x-c)=0$$

sont réelles. Calculer le discriminant de cette équation et le mettre sous une forme telle qu'on reconnaisse qu'il est toujours négatif.

95. (Voir *Mathesis*, (1) I, p. 206). Trouver l'équation des lignes de courbure d'une surface du second degré ayant pour équation

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gxz+2hxy+2\alpha x+2\beta y+2\gamma z+\delta=0.$$

252. (Voir *Mathesis*, (1) III, p. 143). I. Si q, r, s sont des entiers plus grands que 2 et p un entier quelconque, démontrer que les nombres de Bernoulli déterminés par la relation symbolique

$$(B+1)^q-B^q=0$$

vérifient la relation

$$B^p(B+1)^q(B+2)^r(B+3)^s=B^s(B-1)^r(B-2)^q(B-3)^p.$$

II. Démontrer, sans se servir des séries, la relation symbolique

$$(2B+1)^p+2^pB_p-2B_p=0. \qquad \text{(Éd. Lucas.)}$$

267. (Voir *Mathesis*, (1) III, p. 192). On a

$$1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\cdots=$$

$$1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^4}{[(1-q)(1-q^2)]^2}+\frac{q^9}{[(1-q)(1-q^2)(1-q^3)]^3}+\cdots.$$

(E. Catalan.)

(*) Nous réimprimons ici, en tête de la deuxième série de *Mathesis*, toutes les questions de la première série dont nous n'avons pas encore reçu de solution complète.

×**382.** (Voir *Mathesis*, (1) IV, p. 119). On peut décomposer un polygone de $m = (p-2)n + 2$ côtés, en n polygones de p côtés de

$$\frac{(np-n)(np-n-1)\ldots(np-2n+2)}{1.2.3\ldots n}$$

manières différentes. (H. M. Taylor et R. C. Rowe.)

×**383.** (Voir *Mathesis*, (1) IV, p. 231). On partage une demi-circonférence en n parties égales, et l'on joint les points de division à l'une des extrémités de la demi-circonférence. Démontrer que la somme des produits p à p des carrés des cordes, ainsi obtenues, égale autant de fois la $2p^{ième}$ puissance du rayon, qu'il y a de manières de combiner $2n-p-1$ objets, p à p(*). (E. Cesaro.)

387. (Voir *Mathesis*, (1) IV, p. 231). 1° Ayant posé

$$u_p = \frac{\sin 2nx \,.\, \sin(2n-1)x \,.\,.\, \sin(2n-p+1)x}{\sin x \,.\, \sin 2x \,.\, \sin 3x \ldots \sin px},$$

démontrer l'identité

$$1 - u_2^1 + u_2^2 - u_3^2 + \cdots + u_{2n}^2 = (-1)^n \cdot \frac{\sin(2n+2)x \,.\, \sin(2n+4)x \ldots \sin 4nx}{\sin 2x \,.\, \sin 4x \,.\, \sin 6x \ldots \sin 2nx}.$$

2° Si v_p est le coefficient de x^{2n} dans le développement de u_p. on a

$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \cdots = -1.9.25\ldots(2n-1)^2$$ (E. Cesáro.)

La première partie a été résolue t. VI, p. 129.

411. (Voir *Mathesis* (1) V, p. 23). Soient OA, OB, OC trois demi-diamètres conjugués quelconques d'un ellipsoïde, et soient OA', OB', OC' les demi-diamètres perpendiculaires aux plans BOC, COA, AOB. Trouver, entre OA', OB', OC' des relations analogues aux théorèmes d'Apollonius. (J. Neuberg.)

412. (Voir *Mathesis*, (1) V, p. 23). Démontrer l'identité suivante

$$\frac{m^p}{(1.2.3\ldots m)(1.2.3\ldots p)} = \mathrm{S}\frac{1}{(1.2.3\ldots\alpha)(1.2.3\ldots\beta)\ldots(1.2.3\ldots\gamma).2^\gamma(2.3)^\delta\ldots(2.3\ldots p)^\lambda}$$

le signe S portant sur toutes les valeurs entières, positives ou nulles, des quantités $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ qui vérifient les 2 équations simultanées

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \lambda = m.$$
$$\beta + 2\gamma + 3\delta + \cdots + p\lambda = p.$$ (Weill.)

(*) Voir Question 262, *proposée*, t. III, p. 160 résolue, t. IV, p. 41.

×**497**. (Voir *Mathesis*, (1) V, p. 280). Soient

$$A = \frac{a}{(b-c)(b-d)(c-d)}, \quad B = \frac{b}{(a-c)(a-d)(c-d)}$$

$$C = \frac{c}{(a-b)(a-d)(b-d)}, \quad D = \frac{d}{(a-b)(a-c)(b-c)}.$$

On a

$$(A - B + C - D)\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D}\right) = 4^2. \quad \text{(P. A. Mac Mahon.)}$$

505. (Voir *Mathesis*, (1) IX, p. 194) Démontrer les relations

1° $C_{n,1} - C_{n,2}C_{3,2} + C_{n,3}C_{4,2} - C_{n,4}C_{5,2} + \cdots \pm C_{n,n}C_{n+1,2} = 0.$

2° $$\frac{1}{2p+1}C_{2p,p} + \frac{1}{2p-1}C_{2,1}C_{2p-2,p-1} + \frac{1}{2p-3}C_{4,2}C_{2p-4,p-2} + \cdots + C_{2p,p} = 4^p \frac{2.4.6\ldots 2p}{3.5.7\ldots(2p+1)}.$$

La première partie a été résolue t. IX, p. 194. (E. Catalan.)

×**513**. (Voir *Mathesis*, (1) VI, p. 71). Vérifier l'identité

$$8^n \Sigma_{p=0}\left(\frac{1}{16}\right)^p [C_{2p,p}]^2 C_{n,2p} = \Sigma_{p=0} \frac{(C_{2n-2p,np}\, C_{2p,p})^2}{C_{n,p}}. \quad \text{(E. Catalan.)}$$

519. (Voir *Mathesis*, (1) VI, 119.) Si les équations

$$f(x) - x = 0, \quad f[f(x)] - x = 0,$$

ont une racine commune qui soit racine simple de la première et racine multiple de la seconde, l'ordre de multiplicité est impair (Moutard.)

532. (Voir *Mathesis*, (1) VI, p. 192). Soient u, v, w,... les facteurs *premiers* de n, supérieurs à 2. Le nombre des *nombres triangulaires*, premiers avec n, inférieurs à $2n(n+1)$, est

$$n\left(1 - \frac{2}{u}\right)\left(1 - \frac{2}{v}\right)\left(1 - \frac{2}{w}\right)\cdots$$

ou bien le double de ce nombre suivant que n est *pair* ou *impair*.

(E. Cesàro.)

×**571**. (Voir *Mathesis*, (1) VII, p, 126). Soit $P_n = x^{2k} - x^k + 1$, k étant égal à 2^{n-1}. 1° Les polynômes P_1, P_2,..., P_n sont premiers entre eux, deux à deux. 2° Dans le produit $P = P_1P_2..P_n$, ordonné suivant les puissances de x, les coefficients sont $+1$, -1 ou zéro. 3° La variable x étant moindre que l'unité, on a, quand n croît indéfiniment :

$$(1 + x + x^2) \lim P = 1. \quad \text{(E. Catalan.)}$$

594. (Voir *Mathesis*, (1) VII, p. 264). Discuter le système d'équations :

$$A\cos x\cos y + B\sin x\sin y + C(\cos x + \cos y) + D(\sin x + \sin y) + E = 0$$
$$A\cos y\cos z + B\sin y\sin z + C(\cos y + \cos z) + D(\sin y + \sin z) + E = 0$$
$$A\cos z\cos x + B\sin z\sin x + C(\cos z + \cos x) + D(\sin z + \sin x) + E = 0.$$

598. (Voir *Mathesis* (1) VII, p. 280). Ayant posé

$$\alpha_1 = A\alpha + B\beta + C\gamma,\quad \beta_1 = A'\alpha + B'\beta + C\gamma',\quad \gamma_1 = A''\alpha + B''\beta + C''\gamma;$$
$$\alpha_2 = A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1,\quad \beta_2 = A'\alpha_1 + B'\beta_1 + C'\gamma_1,\quad \gamma_2 = A''\alpha_1 + B''\beta_1 + C''\gamma_1;$$
$$\alpha_3 = A\alpha_2 + B\beta_2 + C\gamma_2, \text{ etc.};\quad \alpha_4 = A\alpha_3 + B\beta_3 + C\gamma_3, \text{ etc.}$$

on demande comment doivent être les coefficients A, B, C, A', ... pour que

$$\frac{\alpha_n}{\alpha} = \frac{\beta_n}{\beta} = \frac{\gamma_n}{\gamma}\ (*).$$ (E. Lemoine.)

×**635.** (Voir *Mathesis*, (1) VIII, p. 279). 1° Si deux triangles ABC, A'B'C' sont doublement orthologiques, ils le sont triplement.

2° Construire deux triangles ABC, A'B'C' qui soient triplement homologiques et triplement orthologiques.

Nous disons que ABC et A'B'C' sont *orthologiques*, si les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur B'C', C'A', A'B' (ou sur C'A', A'B', B'C', ou encore sur A'B', B'C', C'A') concourent en un même point; on sait qu'alors les perpendiculaires abaissées de A', B', C' sur BC, CA, AB concourent également. (E. Lemoine.)

Sur les triangles qui admettent plusieurs centres d'homologie, on peut consulter : *Mathematische Annalen*, t II, pp. 540 et 553 (Rosanes, Schröter); *Archives de Grunert*, t LXX, p. 105 (Valyi); *Mathesis*, t. III, p. 226; J. M. S., 1887, p. 103 (Rogier).

M. Lemoine considère des *triangles circulairement homologiques* : ABC est homologique avec A'B'C', B'C'A', C'A'B'. (J. N.)

670. (Voir *Mathesis* (1) IX, p. 280). 1° Les cercles osculateurs d'une courbe plane ne peuvent rencontrer un même cercle sous un angle constant. 2° Il n'y a pas de courbes dont les sphères osculatrices rencontrent orthogonalement une sphère fixe. 3° Y en a-t-il dont les sphères osculatrices rencontrent une même sphère sous un angle constant? (E. Cesáro.)

(*) Cette question n'est pas entièrement nouvelle. Elle se rattache à la *projectivité cyclique*. Les conditions de la question sont réalisées, lorsqu'on fait tourner une figure n fois autour d'un point fixe, chaque fois de l'angle $(2\pi : n)$. (J. N.)

676. (Voir *Mathesis* (1) X, p. 48). L'équation

$$a\left(1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots+\frac{x^m}{1.2.3\ldots m}\right)$$
$$+b\left(1-x+\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots\pm\frac{x^m}{1.2.3\ldots m}\right)+c=0$$

ne peut avoir plus de deux racines réelles. (SYLVESTER.)

***701.** Soient : ABCD un rectangle inscrit dans la circonférence O; E le milieu de AD; G le point de rencontre de la circonférence avec la droite CE; F un point quelconque de la diagonale et K sa projection sur AD; I le milieu du segment AK. 1° L'angle GIF = CAB. 2° Si par F on mène une parallèle à AD, rencontrant CE en N et BE en M, les cinq points E, N, D, G, I sont sur une même circonférence tangente à FI. 3° Si GF rencontre en P la circonférence ABCD en P, le quadrilatère BMFP est inscriptible, et les points A, M, P sont sur une parallèle à FI. 4° Les droites FI, AB se rencontrent sur la circonférence circonscrite au triangle AIG. (A. C.)

702. Trouver le lieu du foyer d'une parabole touchant une logarithmique (équation $y = e^x$) en un point variable M et l'axe des X au pied de l'ordonnée de M. (H. BROCARD.)

***703.** 1° Si le nombre $N = 100\,a + 10\,b + c$ est divisible par 131, il en est de même du nombre

$$N' = (c - a)^2 + (3a - b)(3c - b),$$

et réciproquement.

2° Si le nombre $N = 100\,a + 10\,b + c$ est divisible par 107, il en est de même de

$$N' = (7a - c)^2 + 7b^2,$$

et réciproquement. (R. PERRIN.)

Rectifications. T. X, p. 247, ligne 7 en remontant lire

$$\frac{A_3C}{A_3B} = -\frac{\beta_2\beta_1}{\gamma_2\gamma_1},$$

p. 249, ligne 4-9. On n'a considéré que les valeurs absolues des rapports; la dernière proportion est, en tenant compte des signes,

$$\frac{A_3C}{A_3B} = -\frac{\beta_1\beta_2}{\gamma_1\gamma_2},$$

SUR LES QUADRANGLES COMPLETS;

par M. J. Neuberg.

Dans une lettre datée du 1/13 novembre 1890, M. Sollertinsky, professeur à Gatschina (Russie) nous communique le théorème suivant :

Étant donnés quatre points A, B, C, D *dans un même plan, on fait passer une circonférence par les projections de l'un de ces points sur les côtés du triangle déterminé par les trois autres points. Les quatre circonférences ainsi obtenues passent par un même point* E, *centre de l'hyperbole équilatère* ABCD. — Corollaire. *Lorsqu'un point* D *parcourt un diamètre du cercle circonscrit à un triangle* ABC, *ou une hyperbole équilatère circonscrite à ce triangle, la circonférence circonscrite au triangle podaire de* D *par rapport au triangle* ABC *passe par un point fixe.*

M. P. Terrier a donné, sans démonstration, le même théorème avec un grand nombre d'autres propriétés de la figure, dans un mémoire intitulé *Quadrilatères et sections coniques* (Voir N. A. M., 1876, p. 109); mais ce géomètre n'a pas remarqué que E est le centre de l'hyperbole équilatère ABCD.

En cherchant à démontrer les théorèmes de MM. Sollertinsky et Terrier, nous avons également rencontré quelques nouvelles propositions se rapportant au même sujet, et il nous a semblé utile et intéressant de réunir en une même note les principales propriétés, déjà signalées ou encore inédites, du quadrangle complet.

1. Un quadrangle complet est la figure déterminée par quatre points A, B, C, D et les six droites qui joignent ces points deux à deux. Ces points sont les *sommets*, et ces droites sont les *côtés* du quadrangle. On distingue trois couples de côtés opposés, à savoir AB et CD, AC et BD, AB et BC; les points d'intersection X, Y, Z de deux côtés opposés prennent le nom de *points diagonaux*, et sont les sommets du *triangle diagonal*.

La figure peut se décomposer de quatre manières en un triangle et en trois vecteurs; par exemple, une de ces décompositions est formée par le triangle ABC et les trois vecteurs DA, DB, DC.

Les points A, B, C, D, pris trois à trois, sont les sommets de quatre triangles dont les aires sont liées par l'identité

$$\mathrm{ABC} - \mathrm{BCD} + \mathrm{CDA} - \mathrm{DAB} = 0. \qquad (1)$$

Il est bien entendu que dans cette égalité, ABC par exemple représente la valeur absolue de l'aire du triangle qui a pour sommets les points A, B, C, cette valeur étant précédée du signe + ou du signe —, suivant qu'un mobile allant de A en B, puis de B en C circule dans le sens de rotation adopté comme positif ou dans le sens contraire.

Nous désignons les termes de l'identité (1) par $\delta, \alpha, \beta, \gamma$, en sorte que

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0.$$

Il est facile de voir que quatre forces parallèles proportionnelles à $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et appliquées respectivement en A, B, C, D se font équilibre; ou encore que les coordonnées barycentriques de D dans le triangle ABC sont α, β, γ; que celles de A dans le triangle BCD sont β, γ, δ; etc.

2. Désignons par M_{ab}, M_{cd}, les milieux des droites AB, CD, ...; par G_a, G_b, ... les centres de gravité des triangles BCD, CDA, ... Nous rappelons les propriétés suivantes :

1° *Les droites* $M_{ab}M_{cd}$, $M_{bc}M_{da}$, $M_{ac}M_{bd}$ *se coupent en leur milieu commun* G, *centre des moyennes distances du quadrangle* ABCD.

2° *Les droites* AG_a, BG_b, CG_c, DG_d *passent par* G *et y sont divisées dans le rapport* 3 : 1.

3° *Les deux quadrangles* ABCD, $G_aG_bG_cG_d$ *sont homothétiques par rapport à* G.

Soient A', B', C', D' les symétriques des points A, B, C, D par rapport à G. Les points M_{ab}, M_{ac}, ... seront également les milieux des côtés C'D', B'D' ... du quadrangle A'B'C'D'. Il y a cependant à observer cette différence que les milieux des trois côtés d'un triangle dérivé du quadrangle ABCD sont les milieux de trois côtés du second quadrangle qui ont une extrémité commune.

On peut présenter ces résultats sous une forme plus intéressante, mais moins complète, qui nous a été communiquée par M. Sollertinsky : D *étant un point quelconque du plan d'un triangle* ABC, *les parallèles menées par les milieux des droites* DA, DB, DC *aux côtés correspondants* BC, CA, AB *du triangle* ABC *forment un nouveau triangle* A'B'C' *symétrique de* ABC *par rapport à un point* G *qui divise dans le rapport* 3 : 1 *la droite joignant* D *au centre de gravité du triangle* ABC. — *Pour que les deux triangles* ABC, A'B'C' *soient circonscrits à un même cercle, il faut prendre pour* D *le point qui divise la droite joignant le centre de*

gravité de ABC *au centre d'un cercle inscrit ou exinscrit, en deux segments soustractifs, proportionnels aux nombres* 4 *et* 3.

3. Les perpendiculaires élevées aux six côtés du quadrangle ABCD en leurs milieux concourent trois à trois en quatre points O_a, O_b, O_c, O_d, centres des cercles circonscrits aux triangles BCD, CDA, DAB, ABC ; ce sont donc les côtés d'un quadrangle complet $O_aO_bO_cO_d$.

La considération des quadrangles ABCD, $O_aO_bO_cO_d$ conduit à une foule de résultats très curieux.

Nous en pouvons d'abord déduire le théorème des triangles orthologiques. En effet, soient ABC, $A_1B_1C_1$ deux triangles tels que les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 concourent en un même point D. Le triangle $A_1B_1C_1$ étant homothétique à $O_aO_bO_c$, les parallèles menées par A_1, B_1, C_1 aux droites O_aO_d, O_bO_d, O_cO_d, concourent en un même point D_1.

Si l'on fait ensuite tourner la figure $A_1B_1C_1D_1$ dans son plan ou qu'on en prenne la symétrique par rapport à une droite du plan, on obtient ce théorème plus général : *Étant donné un quadrangle complet* ABCD, *on en peut toujours construire un second* $A_1B_1C_1D_1$, *tel, que les côtés du premier fassent un même angle avec les côtés opposés du second* (par exemple AB avec C_1D_1), *ou que les côtés opposés soient antiparallèles par rapport à une direction fixe.* (*A continuer.*)

QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT.

Limite de la somme d'un nombre fini de variables.

1. Théorème. *La limite de la somme algébrique d'un nombre fini de variables commensurables, dont chacune a une limite commensurable, est égale à la somme algébrique de ces limites.*

Soient, par exemple, u, v, ..., w, des variables commensurables, positives ou négatives, en nombre n fini, ayant respectivement pour limites les constantes commensurables a, b, ..., c. Cela signifie que les différences

$$\alpha = u - a, \quad \beta = v - b, \quad \ldots, \quad \gamma = w - c$$

peuvent devenir et rester aussi petites que l'on veut, en valeur absolue. Posons

$$\delta = (u + v + \cdots + w) - (a + b + \cdots + c)$$

On aura

$$\delta = (u - a) + (v - b) + \cdots + (w - c) = \alpha + \beta + \cdots + \gamma,$$

et δ composé de n parties, $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$, dont chacune, en valeur absolue, devient et reste aussi petite que l'on veut, jouit de la même propriété. On a donc, d'après la définition de la limite,

$$\lim (u + v + \cdots + w) = a + b + \cdots + c, \qquad (1)$$

ou encore, puisque $a = \lim u$, $b = \lim v$, ..., $c = \lim w$,

$$\lim (u + v + \cdots + w) = \lim u + \lim v + \cdots + \lim w. \qquad (2)$$

2. Remarques. I. La démonstration précédente subsiste, si l'une ou plusieurs des quantités $u, v, \ldots, w$ sont constantes. Si, par exemple, u est constant et égal à a, il suffit de faire $\alpha = 0$, dans les raisonnements précédents. La limite d'une constante, étant, par convention, cette constante même, on peut écrire, $\lim u$ au lieu de a ou u, dans la relation (1). Par suite, quand u est constant, on peut encore donner à la relation (1), la forme (2).

II. Il peut arriver que la somme $u + v + \cdots + w$, bien que composée de quantités variables, soit égale à une quantité constante d. Alors, on a

$$\delta = (u + v + \cdots + w) - (a + b + \cdots + c) = d - (a + b + \cdots + c)$$

et δ est aussi une constante. Cette constante ne peut être que zéro; car si δ était une quantité différente de zéro, comme elle est égale à $\alpha + \beta + \cdots + \gamma$, on aurait une constante non nulle, somme de n quantités $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$, dont chacune en valeur absolue est aussi petite qu'on le veut, ce qui est absurde. On a donc $\delta = 0$ ou

$$d = a + b + \cdots + c. \qquad (3)$$

Au lieu de $d = u + v + \cdots + w$, on peut écrire $\lim d$ ou encore $\lim (u + v + \cdots + w)$; puis, comme plus haut, remplacer $a, b, \ldots, c$ par $\lim u$, $\lim v$, ..., $\lim w$. Donc l'égalité (3) prend encore la forme

$$\lim (u + v + \cdots + w) = \lim u + \lim v + \cdots + \lim w. \qquad (2)$$

III. La démonstration du théorème du n° 1 suppose que les limites $a, b, \ldots, c$ sont finies, puisque dans le cas contraire, les égalités $\alpha = u - a$, $\beta = v - b$, ..., $\gamma = w - c$ n'auraient aucun sens.

Si une ou plusieurs des quantités $u, v, \ldots, w$, ***supposées de même signe***,

croissent indéfiniment en valeur absolue, il est clair qu'il en est de même de $u+v+\cdots+w$. Dans ce sens, on peut dire que l'égalité (2) est encore vraie.

Mais si deux ou plusieurs des n quantités $u, v, \ldots, w$, supposées les unes positives, les autres négatives, croissent en valeur absolue, le second membre de la relation (2) prend la forme indéterminée $\infty - \infty$. Bien loin que, dans ce cas, ce second membre de (2) fasse connaître la valeur du premier, c'est le plus souvent le premier qui, par convention, est regardé comme donnant la valeur du second.

3. *Emploi abusif du théorème sur la limite d'une somme de plusieurs variables.* La somme δ de n quantités indéfiniment décroissantes $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ peut ne pas avoir zéro pour limite, si le nombre n croît indéfiniment en même temps que $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ tendent vers zéro. Le théorème sur la limite d'une somme de variables n'est donc pas établi dans le cas où le nombre de ces variables croît indéfiniment.

On l'a pourtant souvent appliqué à ce cas. Pour montrer ce qu'il y a d'abusif dans cet emploi du théorème du n° 1, nous allons montrer sur quelques exemples à quelles absurdités on peut être conduit en opérant ainsi.

I. On a

$$1+\frac{1}{m}=\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\cdots+\frac{1}{m}, \qquad (4)$$

$\frac{1}{m}$ étant répété $(m+1)$ fois dans le second membre. Pour m croissant indéfiniment $\lim \frac{1}{m}=0$. Si l'on applique le théorème sur la limite d'une somme à la relation précédente, on trouve l'égalité absurde :

$$1+0=0+0+\cdots \text{ (indéfiniment).}$$

II. L'expression suivante,

$$L_{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

où n est supposé entier positif, croît avec n. En effet, si l'on change n en $n+1$, elle devient

$$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+2},$$

quantité qui surpasse la précédente de

$$\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

D'ailleurs L_{2n} est inférieure à n fois $\frac{1}{n}$ ou à l'unité, et supérieure à n fois $\frac{1}{2n}$ ou à $\frac{1}{2}$. Donc d'après les principes généraux de la méthode des limites, L_{2n} a une limite L supérieure à $\frac{1}{2}$ et au plus égale à l'unité.

Pour n croissant indéfiniment,

$$\lim\frac{1}{n+1}=0,\ \lim\frac{1}{n+2}=0,\ \ldots,\ \lim\frac{1}{2n}=0.$$

Si l'on applique indûment à L_{2n}, le théorème sur la limite d'une somme, on trouve

$$L=0+0+\cdots \text{ (indéfiniment)}$$

ce qui est inexact.

III. Autrefois (*) de l'égalité

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{m}{1}\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{m^2}+\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}\frac{1}{m^p}+\cdots+\frac{1}{m^m},$$

ou encore

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}+\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)}{1.2\ldots p}$$
$$+\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{1.2\ldots m}, \qquad (5)$$

on déduisait, par passage à la limite, quand m croît indéfiniment, en appliquant le principe du n° 1,

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\cdots+\frac{1}{1.2\ldots p}+\cdots \text{ (indéfiniment)}. \qquad (6)$$

(*) Lefébure de Fourcy, *Leçons d'Algèbre*, 5e édition, p. 472, n° 573. Au n° 576, l'auteur indique lui-même l'erreur du raisonnement du n° 573.

Le second membre signifiait.

$$\lim\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\cdots+\frac{1}{1.2\ldots p}\right)$$

pour p croissant indéfiniment.

On prouvera plus tard que le résultat contenu dans la relation (6) est exact, mais il est obtenu par un procédé qui, dans d'autres cas, peut conduire à des erreurs. Pour le montrer, ajoutons les relations (4) et (5) terme à terme. Il viendra

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m+\left(1+\frac{1}{m}\right)=\left(1+\frac{1}{m}\right)+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{m}\right)+\cdots$$
$$+\left\{\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)}{1.2\ldots p}+\frac{1}{m}\right\}+\cdots$$
$$+\left\{\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{1.2\ldots m}+\frac{1}{m}\right\}. \qquad (7)$$

Passons à la limite, pour m croissant indéfiniment, dans cette relation (7), comme on a fait dans la relation (5); il viendra

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m+1=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\cdots+\frac{1}{1.2..p}+\cdots \text{ (indéfiniment)} \quad (8)$$

relation incompatible avec la relation (6). En effet, les seconds membres de (6) et (8) sont identiques et les premiers ont une différence égale à l'unité. (*A continuer.*) (P. M.)

BIBLIOGRAPHIE.

Apollonii Pergaei quae graece extant cum commentariis antiquis edidit et latine interpretatus est I. L. Heiberg, Dr. Ph. Vol. I. Lipsiae, in aedibus B. G. Teubneri. MDCCCXCI (XII-451 p.).

Apollonius est le seul grand géomètre de l'antiquité dont nous ne possédions que très incomplètement les œuvres dans le texte original. Des huit livres de son ouvrage capital, les *Coniques*, nous n'avons que les quatre premiers en grec; mais les trois suivants sont heureusement conservés dans des traductions arabes et l'on a pu conjecturer le sujet du huitième par les lemmes de Pappus qui s'y rapportent.

Pendant longtemps, les traductions latines des quatre premiers livres des *Coniques* faites au 16e siècle ont été seules entre les mains des géomètres; elles ont eu une grande influence sur le développement de la science du temps de Descartes et

de Fermat. Le texte grec n'a été publié qu'en 1710, dans la grande édition de Halley, qui contient aussi la traduction latine de ces livres et des trois suivants (d'après l'arabe), et une restitution du huitième, ainsi que le livre de Serenus sur les sections du cône et du cylindre.

M. Heiberg, à qui la science doit déjà la publication des œuvres d'Euclide et d'Archimède, vient d'entreprendre une nouvelle édition de tout ce qui nous reste d'Apollonius en grec. Le tome I contient les trois premiers livres des coniques, avec traduction latine. Pour établir le texte, M. Heiberg s'est surtout servi d'un manuscrit du Vatican.

Nous ne doutons pas que l'Apollonius de l'éminent philologue danois n'ait le même succès que son Euclide et son Archimède et nous le signalons à l'attention de tous ceux qui s'intéressent à l'histoire des mathématiques.

Compléments d'algèbre et notions de géométrie analytique à l'usage des candidats à l'école de Saint Cyr et des élèves de mathématiques élémentaires, qui se destinent aux mathématiques spéciales, par MACÉ DE LÉPINAY, ancien élève de l'École normale, professeur de mathématiques spéciales au Lycée Henri IV. Premier fascicule : *Compléments d'Algèbre.* Paris, Nony et Cie 1891. Un volume in-8° de 171 p. in-8°. (Prix des deux fascicules : 4 francs.)

On sait que, sous le nom de *Compléments d'Algèbre*, on enseigne en France, dans les classes de mathématiques spéciales, les premiers éléments du calcul différentiel, ou de la théorie générale des fonctions. Le petit livre de M. Macé de Lépinay est donc un manuel élémentaire d'analyse infinitésimale.

Voici, avec quelques notes, l'indication des matières qui y sont traitées.

CHAPITRE I. *De la continuité.* 1. Fonctions explicites, implicites, algébriques, transcendantes. La définition des fonctions transcendantes est insuffisante.

2. Des limites. Principes généraux (admis sans démonstration). Principes spéciaux (somme, produit, quotient, puissances) démontrés seulement dans le cas où les quantités considérées sont commensurables.

3. Continuité. Les fonctions algébriques explicites sont continues. Théorème de Cauchy : Une fonction continue ne peut changer de signe sans passer par zéro.

4. Dix-huit exercices.

CHAPITRE II. *Des dérivées.* 1. Définition. Interprétation géométrique (ce sujet est traité avec grand soin).

2. Dérivées des fonctions algébriques explicites et des fonctions trigonométriques directes. Pour plusieurs de ces dernières fonctions la question est traitée à la fois par l'analyse et la géométrie.

3. Dérivée des fonctions de fonction.

4. Dérivée des fonctions implicites algébriques. L'auteur a soin de faire observer qu'il *admet* la continuité de ces fonctions, en quoi il a grandement raison Beaucoup d'auteurs ne signalent pas ce postulat implicite que l'on ne peut éviter dans un cours élémentaire.

4. Vingt-et-un exercices.

CHAPITRE III. *Variations des fonctions.* 1. Théorèmes relatifs à la variation des fonctions. La démonstration des deux théorèmes fondamentaux : 1° *Si* $f'x = 0$, *fx est constant* (n° 90); 2° *Si* $f'x$ *change de signe en passant par zéro, fx passe par un maximum ou un minimum* (n° 101-102) est, selon nous, complètement manquée. Dans la première démonstration, il faudrait prouver que ε a pour limite zéro, c'est-à-dire établir que la fonction est uniformément continue (Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 156). Dans la seconde, on prouve simplement que la fonction croît (ou décroît) jusqu'aussi près qu'on le veut de la valeur correspondant à $f'x = 0$, et que c'est l'inverse au-delà, mais on n'apprend rien sur la valeur de fx correspondant à $f'x = 0$. — L'un et l'autre théorème peuvent s'établir d'une manière simple et avec rigueur, en partant du théorème de Rolle ou de l'égalité équivalente : $f(x+h) - fx = hf'(x+\theta h)$.

2 Applications : Étude minutieuse et très bien faite, avec représentations graphiques de $y = ax + b$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = ax^4 + bx^2 + c$, $y = (ax + b) : (a'x + b')$, $y = (ax^2 + bx + c) : (a'x^2 + b'x + c')$.

3 Quelques exemples contenant des radicaux du second degré; $y = x(a - x)$, $y = ax^m(a - x)^p$, $y = x + a^2x^{-1}$, $y = x(x-1)^3(x-2)$; volume et surface d'un cylindre inscrit dans une sphère; autres questions analytiques et géométriques.

4. Cinquante exercices.

A part les défauts que nous avons dû signaler plus haut au point de vue de la rigueur, nous trouvons que le petit livre de M. Macé de Lépinay est très pratique et très utile et nous le recommandons vivement aux professeurs et aux élèves des classes supérieurs des lycées, des athénées et des collèges. (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 414.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 46.)

On donne deux circonférences O ***et*** O_1, ***qui se coupent en*** A ***et*** B. ***Démontrer qu'il n'existe qu'une seule conique osculatrice en*** A ***au cercle*** O, ***et osculatrice aussi au cercle*** O_1. ***Déterminer le point d'osculation du cercle*** O_1.

(DEWULF.)

Solution analytique par M. ANDERSON (Galway). Prenons pour axes les droites qui touchent les deux cercles en A. Si θ est l'angle de ces axes, on trouve facilement pour les équations des deux cercles :

$$S \equiv x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - 2ry\sin\theta = 0, \qquad (1)$$

$$S_1 \equiv x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - 2r_1x\sin\theta = 0. \qquad (2)$$

Une conique qui oscule la première circonférence en A, a pour sécantes

communes avec cette ligne l'axe des abscisses et une droite menée par A; son équation est donc de la forme $S + y(ax + by) = 0$, ou

$$S_2 \equiv x^2 + cxy + dy^2 - 2ry\sin\theta = 0.$$

Si entre les équations $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ on élimine les termes du premier dégré, on obtient une équation homogène

$$ry(x^2 + 2xy\cos\theta + y^2) - r_1 x(x^2 + cxy + dy^2) = 0, \qquad (3)$$

qui représente les trois droites joignant A aux points d'intersection des lignes S_1 et S_2. Pour qu'il y ait un contact du deuxième ordre entre S_1 et S_2, ces trois droites doivent coïncider, et le premier membre de l'équation (3) doit être un cube parfait. Cette égalité peut prendre la forme

$$y^3 - \left(\frac{r_1}{r} - 2d\cos\theta\right)xy^2 + \left(1 - \frac{cr_1}{r}\right)x^2y - \frac{r_1}{r}x^3 = 0;$$

en identifiant le premier membre avec $(y - \mu x)^3$, on trouve

$$\mu = \left(\frac{r_1}{r}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad 2d\cos\theta = \frac{r_1}{r} - 3\left(\frac{r_1}{r}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{cr_1}{r} = 1 - 3\left(\frac{r_1}{r}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

La valeur de μ fixe le point d'osculation de S_1 et S_2; les valeurs de c et d déterminent S_2.

La racine cubique ayant trois valeurs, il est plus exact de dire qu'il existe trois coniques osculatrices, dont une seule est réelle. Pour d'autres solutions, géométriques, voir *Mathesis*, t. VIII, p. 34 (SERVAIS) et t. X, p. 57 (DEWULF); CASEY, *Analyt. Geometry*, 1885, p. 240. (J. N.)

Question 667.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 264.)

Si en un point quelconque A ***d'une conique, on mène un cercle tangent dont le rayon soit double du rayon de courbure en ce point :*** 1° ***le pôle*** P, ***par rapport au cercle, de la corde d'intersection*** BC ***de la conique et du cercle est sur la conique***; 2° ***les deux droites*** BC, PA ***sont conjuguées harmoniques par rapport à la conique.*** (SERVAIS.)

Solution analytique par MM. DÉPREZ ***et*** DENYS. Prenons pour axes de coordonnées la tangente AT' et la normale AO. La conique et le cercle osculateur en A peuvent être représentés par les équations

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy = 0,$$
$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + y(Ex + Fy) = 0;$$

car les cordes communes sont AX et une droite menée par A. On a les conditions

$$A + F = C, \quad 2B + E = 0,$$

d'où l'on déduit que l'ordonnée du centre de courbure a pour valeur $-\frac{2D}{B}$. L'équation d'un cercle Δ touchant AT en A et ayant un rayon double du rayon de courbure de la conique est, par conséquent,

$$C(x^2 + y^2) + 4Dy = 0. \tag{1}$$

Si on la retranche de celle de la conique, on trouve pour l'équation de la corde commune BC

$$(A - C)y + 2Bx - 2D = 0. \tag{2}$$

Soient (α, β) les coordonnées du pôle P de cette corde par rapport au cercle Δ; identifiant l'équation (2) avec la suivante

$$C(\alpha x + \beta y) + 2D(y + \beta) = 0,$$

on trouve

$$\alpha = \frac{4BD}{AC}, \quad \beta = -\frac{2D}{A}.$$

Ces coordonnées vérifient l'équation de la conique.

La droite AP est représentée par

$$\frac{y}{x} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \text{ou} \quad 2By + C\alpha = 0. \tag{3}$$

Si (X, Y) sont les coordonnées du pôle de AP par rapport à la conique, l'équation (3) doit être identique avec la suivante

$$(AY + BX + D)y + (BY + CX)x + DY = 0;$$

on en conclut

$$Y = 0, \quad -\frac{BX + D}{CX} = \frac{2B}{C}, \quad X = \frac{D}{B}.$$

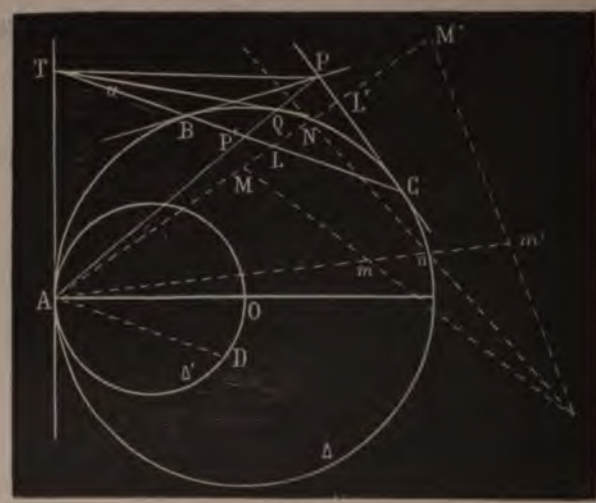
Comme ces valeurs de X, Y vérifient l'équation (2), le pôle de AP est situé sur BC.

Solution géométrique par M. Lalisse. La question 667 peut se déduire des propriétés de la quasi-inversion linéaire (voir *Mathesis*, t. VII, pp. 110, 129, 187, t. IX, p. 267).

Soient Δ une circonférence donnée, O son centre, A un point fixe de Δ, M et M′ deux points situés en ligne droite avec A et conjugués har-

moniques par rapport à Δ : M et M′ se correspondent dans une quasi-inversion linéaire. Aux points à l'infini correspondent les milieux des cordes de Δ menées par A; donc la droite de l'infini a pour transformée la circonférence Δ′ décrite sur OA comme diamètre.

Cherchons la transformée d'une droite u rencontrant Δ aux points B, C. Si une droite menée par A coupe u en L et Δ en N, la droite conjuguée harmonique avec BN par rapport à l'angle ABN rencontre AL en un point L′, qui est le transformé de L. Lorsque N parcourt Δ, les



droites BN, BL′ engendrent deux faisceaux projectifs, car le rapport anharmonique du faisceau B (ALNL′) reste constant et deux de ses rayons sont fixes. Les droites BN et AN engendrent également deux faisceaux projectifs; par conséquent, les droites BL′ et AL′ se correspondent dans deux faisceaux projectifs et leur intersection L′ décrit une conique S passant par A, B, C.

Le point à l'infini sur u a pour homologue l'intersection D de Δ′ avec une parallèle à u menée par A; comme D est le seul point commun à S et Δ′, autre que A, Δ′ est le cercle osculant S en A.

Soit P le pôle de BC par rapport à Δ. Ce point a, évidemment, pour homologue dans la quasi-inversion linéaire, le point P′ où la droite AP coupe BC; il appartient donc à S.

Appelons Q le point de rencontre de AP avec Δ. En général, si M et

M', m et m' sont deux couples de points correspondants dans la quasi-inversion, situés sur les cordes AM, An de Δ, les droites Mm, M'm', Nn concourent en un même point, car

$$(ANMM') = (An mm') = -1.$$

En supposant les points M et m infiniment voisins, on voit que les tangentes en deux points homologues M, M' de deux courbes transformées l'une de l'autre par quasi-inversion, se coupent sur la tangente menée au point N où la droite MM' rencontre Δ. Par conséquent, la tangente en P à la conique S, la tangente en Q au cercle Δ et la droite BC concourent en un même point T, qui est évidemment, le pôle de AP par rapport à Δ La tangente en A à Δ passe donc par T, et comme elle touche également S en A, T est aussi le pôle de AP par rapport à S, et les droites AP, BC, dont l'une passe par le pôle de l'autre sont conjuguées relativement à S.

Remarque. Soit E le point de rencontre de BC avec AD, et F le conjugué harmonique de E par rapport à Δ ; F est l'extrémité de la corde normale en A à S. *La circonférence décrite sur* AP *comme diamètre passe par les extrémités* D, F *de la corde de courbure et de la corde normale au point* A ; en effet, OP est perpendiculaire à BC et par suite, est AD et passe par D, de sorte que les angles ADP, AFP sont droits.

(Servais.)

×Question 695.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 240.)

Soient O *le centre*, F *et* F' *les foyers d'une ellipse. On prolonge un rayon quelconque* OM *de* MM' = OM, *et l'on mène les tangentes* M'P, M'Q; P *et* Q *étant les points de contact, démontrer la relation*

$$4M'P \cdot M'Q = 3M'F \cdot M'F'. \qquad (1)$$

(A. Gob.)

Cette propriété est un cas particulier d'un théorème que M. Laisant a établi par les équipollences (*Congrès d'Oran*, 1888, p. 113-118) et dont une démonstration analytique se trouve aussi, d'après une indication de M. Beyens, dans le *Companion to the Weekly Problem Papers* du Rév. John Milne, pp. 264 et 267. Ce théorème correspond à la formule

$$\frac{M'P \cdot M'Q}{M'F \cdot M'F'} = 1 - \frac{\overline{OM}^2}{\overline{OM'}^2} = \frac{M'N}{M'O} = \frac{a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2}{a^2y^2 + b^2x^2}; \qquad (2)$$

M′ est un point quelconque du diamètre OM, N le milieu de la corde PQ, et x, y désignant les coordonnées de M′.

Voici la démonstration de l'auteur anglais. Si θ est l'angle de M′P avec le grand axe, et t la longueur M′P, les coordonnées de P sont

$$X = x + t\cos\theta, \quad Y = y + t\sin\theta.$$

En les portant dans l'équation de l'ellipse

$$u^4 \equiv a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0,$$

on obtient

$$(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\,t^2 + 2\,(a^2y\sin\theta + b^2x\cos\theta)\,t + u^4 = 0.$$

Pour que M′P touche la courbe, les deux valeurs de t doivent être égales; par conséquent,

$$(a^2y\sin\theta + b^2x\cos\theta)^2 - (a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\,u^4 = 0,$$

$$(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\,t^2 - u^4 = 0,$$

ou

$$a^2\,(a^2y^2 - u^4)\sin^2\theta + b^2\,(b^2x^2 - u^4)\cos^2\theta + 2a^2b^2xy\sin\theta\cos\theta = 0,$$

$$(a^2t^2 - u^4)\sin^2\theta + (b^2t^2 - u^4)\cos^2\theta = 0.$$

La seconde relation donne

$$\sin^2\theta = \frac{u^4 - b^2t^2}{c^2t^2}, \quad \cos^2\theta = \frac{a^2t^2 - u^4}{c^2t^2};$$

substituant ces valeurs dans la première, on trouve

$$\left\{t^2\,(a^2y^2 - b^2x^2) + u^4\,(x^2 - y^2 - c^2)\right\}^2 = 4x^2y^2\,(u^4 - b^2t^2)\,(a^2t^2 - u^4).$$

Cette équation admet les racines M′P $= t$, M′Q $= t_1$; par suite,

$$t^2t_1^2 = \frac{u^8\left\{x^2 - y^2 - c^2)^2 + 4x^2y^2\right\}}{(a^2y^2 - b^2x^2)^2 + 4a^2b^2x^2y^2} = \frac{u^8\left\{(x^2 + y^2 - c^2)^2 - 4c^2x^2\right\}}{(a^2y^2 + b^2x^2)^2},$$

D'où

$$\frac{tt_1}{\mathrm{M'F}\,.\,\mathrm{M'F'}} = \frac{u^4}{a^2y^2 + b^2x^2} = 1 - \frac{a^2b^2}{a^2y^2 + b^2x^2}.$$

Si l'on pose OM $=$ K . OM′, les coordonnées de M sont Kx, Ky; en les portant dans l'équation de l'ellipse, on trouve

$$K^2\,(a^2y^2 + b^2x^2) = a^2b^2,$$

d'où l'on conclut la relation (2).

La démonstration suivante est imitée de celle que nous a adressée Mᵉ Carolina de Haas, de Rotterdam; la figure suppose P sur le premier

quadrant d'ellipse et Q sur le deuxième. Prolongeons F'P de PR = PF; les triangles FM'P, RM'P sont égaux, et l'angle F'MR = QM'P. Il résulte de là que

$$\frac{M'P \cdot M'Q}{M'F \cdot M'F'} = \frac{\text{aire } QM'P}{\text{aire } F'M'R} = \frac{QM'P}{F'M'P + FM'P} = \frac{QM'P}{2OM'P}.$$

OM' coupe la corde PQ en son milieu N et la courbe en un second point m, on peut donc écrire

$$\frac{M'P \cdot M'Q}{M'F \cdot M'F'} = \frac{NM'P}{OM'P} = \frac{M'N}{M'O} = 1 - \frac{ON}{OM'} = 1 - \frac{ON \cdot OM'}{\overline{OM'}^2} = 1 - \frac{\overline{OM}^2}{\overline{OM'}^2}.$$

La dernière transformation résulte de la division harmonique MmM'N.

MM. Sohie et Decamp ont démontré l'égalité (1) par la géométrie analytique. M. Cristesco l'établit par des calculs assez simples, en introduisant l'angle φ auxiliaire tel que les coordonnées du point soient $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$. (J. N.)

×Question 696.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 240.)

Construire un triangle rectangle ABC *dont on connaît la hauteur* AD = h *relative à l'hypoténuse* BC = d, *ainsi que la distance* AB' = d *du sommet de l'angle droit au pied de la bissectrice* BB'. (A. Thiry.)

Solution par M^elle^ Pompilianu (Bucharest). Construisons l'angle droit CAB; sur le côté AC, prenons AB' = d et des points A, B' comme centres, respectivement avec les rayons h, d, décrivons deux circonférences. La tangente commune extérieure est l'hypoténuse du triangle demandé. Le problème admet une solution répondant à l'énoncé, si $d < h < 2d$; quand $d > h$, la construction de la tangente commune est encore possible, mais BB' devient la bissectrice extérieure.

Solution par M. François (La Haye), Vladimirescu (Bucharest). Menons par B' une parallèle à CB, rencontrant AD en E. On peut construire le triangle rectangle DAB' dans lequel on connaît AE = $h - d$, AB' = d (B' est équidistant de A et BC). Il reste à prendre sur AE la longueur ED = d, à mener par D une parallèle à B'E et en A une perpendiculaire à AC.

Solution par M^e^ Carolina de Haas *et* MM. Vladimirescu, Beyens

(major du génie, à Cadix), Sohie, Decamp. La propriété de la bissectrice donne

$$\frac{d}{b-d}=\frac{c}{a},$$

mais $bc = ah$, ou $c : a = h : b$; par suite

$$\frac{d}{b-d}=\frac{h}{b}=\frac{h-d}{d}, \quad b=\frac{hd}{h-d}.$$

Solution par MM. Demolder *et* Marchand (athénée de Louvain), *et* Brandza (Bucharest). Prenons sur BC une longueur BK = BA; le triangle ABK étant isocèle, BB′ est perpendiculaire au milieu L de AK, et la distance LL′ de L à AB $= \frac{1}{2}h$. D'où la solution : Prendre une longueur AB′ $= d$; construire sur AB′ comme diamètre une demi-circonférence, rencontrant en L une perpendiculaire menée sur AB′ à une distance de A égale à $\frac{1}{2}h$; sur AK = 2AL, construire le triangle AKD rectangle en D et ayant le côté AD $= h$.

Solution par M. Brandza. Ayant pris sur BC la longueur BK = BA, j'observe que BB′ est perpendiculaire au milieu L de AK et coupe AD en un point I tel, que la figure AB′KI est un losange. Je puis donc construire le triangle rectangle DIK dans lequel DI $= h - d$, IK $= d$, puis achever le losange AIKB′ etc.

Solution analogue par M. Cristesco.

Solution par M. F. Verhelst (Anvers). La hauteur AD rencontre la bissectrice intérieure BB′ et la bissectrice extérieure BB″ de l'angle ABC en deux points I, I′, conjugués harmoniques par rapport à A, D. Les angles AB′B, AIB′ étant égaux, on a AI = AB′ $= d$. Donc on peut construire le système harmonique ADII′, et la circonférence décrite sur II′ comme diamètre détermine sur la perpendiculaire élevée en D sur AD le point B; etc.

Un calcul facile donne

$$\mathrm{ID} = h - d, \quad \mathrm{I'D} = \frac{h(h-d)}{2d-h}, \quad \mathrm{BD} = \sqrt{\mathrm{ID}.\,\mathrm{I'D}} = (h-d)\sqrt{\frac{h}{2d-h}}$$

$$\mathrm{AB} = d\sqrt{\frac{h}{2d-h}},$$

Question 700.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 279.)

Si x, y, z sont des nombres entiers, le nombre

$$N = xyz(x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz) + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$$

est décomposable en deux facteurs entiers, et, par suite, ne peut être premier. (CATALAN.)

Solution par M. A. L. On a l'identité

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right) = 3 + \frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}+\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}+\frac{xy}{z^2}.$$

Multiplions par $x^2y^2z^2$; il vient

$$(x^2z + y^2x + z^2y)(x^2y + y^2z + z^2x) = N.$$

Solution par M. KLUYVER (Breda). En égalant à zéro, l'expression proposée, on obtient

$$x^4yz + x^3(y^3 + z^3) + 3x^2y^2z^2 + xyz(y^3 + z^3) + y^3z^3 = 0,$$

équation qui, au moyen de la substitution

$$x + \frac{yz}{x} = t, \quad x^2 + \frac{y^2z^2}{x^2} = t^2 - 2yz,$$

se ramène successivement à

$$t^2yz + t(y^3 + z^3) + y^2z^2 = 0, \quad (tz + y^2)(ty + z^2) = 0,$$
$$(x^2z + y^2x + z^2x)(x^2y + y^2z + y^2z) = 0.$$

On voit facilement que N est égal au premier membre de la dernière égalité.

Solution par MM. LALISSE, FRANÇOIS, MANDART, DE STREKALOF, DE BOZÓKY, RUSSO. On peut écrire

$$N = \begin{cases} x^4yz + x^3y^3 + x^2y^2z^2 \\ + xy^4z + y^3z^3 + x^2y^2z^2 \\ + xyz^4 + z^3x^3 + x^2y^2z^2 \end{cases} = \begin{cases} x^2y(x^2z + xy^2 + yz^2) \\ + y^2z(xy^2 + yz^2 + zx^2) \\ + z^2x(yz^2 + x^2z + xy^2) \end{cases}$$
$$= (x^2y + y^2z + z^2x)(x^2z + y^2x + z^2y)$$

Généralisation par M. E. CESÁRO. La question est susceptible de plusieurs généralisations. En voici une. On a

$$xyzuvw[uvw(x^3 + y^3 + z^3) + xyz(u^3 + v^3 + w^3)]$$
$$+ (yzvw)^3 + (zxwu)^3 + (xyuv)^3$$
$$= (ywz^2v^2 + zux^2w^2 + xvy^2u^2)(zvy^2w^2 + xwz^2u^2 + yux^2v^2).$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

469. Résoudre l'équation

$$\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x.$$

En combinant les termes de même rang des deux membres, on trouve la solution $\cos x = \sin x$, et l'équation

$$2(\cos x + \sin x) = -2 - \cos x \sin x,$$

qu'on résout aisément en élevant les deux membres au carré.

470. Valeur de

$$u = \frac{x^2}{1 - \cos mx} \quad \text{pour} \quad x = 0.$$

On écrit

$$u = \frac{x^2}{2\sin^2 \frac{1}{2} mx} = \left(\frac{\frac{1}{2} mx}{\sin \frac{1}{2} mx}\right)^2 \cdot \frac{2}{m^2}.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

***704.** Dans tout triangle ABC, on a

$$(a \operatorname{tang} B - 2r)(b \operatorname{tang} C - 2r)(c \operatorname{tang} A - 2r)$$
$$= (a \operatorname{tang} C - 2r)(b \operatorname{tang} A - 2r)(c \operatorname{tang} B - 2r),$$

r étant le rayon du cercle inscrit. (H. MANDART.)

705. On considère tous les triangles sphériques ABC, inscrits à un même petit cercle, ayant un sommet fixe A et dans lesquels la somme $\cos AB + \cos AC$ a une valeur constante. Démontrer : 1° que le point de rencontre des médianes décrit un grand cercle; 2° que la base BC enveloppe une ellipse sphérique. (DÉPREZ.)

706. On donne un tétraèdre ABCD et une droite m. Des plans parallèles menés par A, B, C, D rencontrent m aux points A', B', C', D', par lesquels on mène des plans respectivement parallèles aux faces BCD, CDA, DAB, ABC. Démontrer que le tétraèdre A''B''C''D'' formé par ces nouveaux plans est symétriquement égal au tétraèdre ABCD.

(J. NEUBERG.)

Rectification. Page 12, ligne 12, dans le dénominateur de la dernière fraction, lire $n + 1$, au lieu de n.

ÉTUDE INTRINSÈQUE DES CONIQUES ET DES CASSINOÏDES ;

par M. E. Cesàro, à Palerme.

Ayant pris comme pôle un point d'une ellipse, et la tangente en ce point comme axe polaire, soient u, ω les coordonnées polaires d'un foyer. Pour exprimer que ce point est fixe, lors du déplacement du pôle sur la courbe, on doit écrire

$$\frac{du}{ds} = -\cos\omega, \quad \frac{d\omega}{ds} = -\frac{1}{\rho} + \frac{\sin\omega}{u}, \tag{1}$$

ρ désignant le rayon de courbure au point de l'ellipse et s l'arc d'ellipse compté jusqu'à ce point. C'est ce qu'on déduit fort simplement de la considération du triangle ayant pour côtés $u, u + du, ds$. On a, en effet, en désignant par ε l'angle de contingence, égal à $\frac{ds}{\rho}$,

$$\frac{u}{\sin(\omega + \varepsilon + d\omega)} = \frac{u + du}{\sin\omega} = \frac{ds}{\sin(\varepsilon + d\omega)},$$

ou bien

$$\frac{u}{\sin\omega} = -\frac{du}{(\varepsilon + d\omega)\cos\omega} = \frac{ds}{\varepsilon + d\omega},$$

d'où l'on tire les formules (1). Soit v la distance du pôle mobile à l'autre foyer, et *définissons* la courbe par la propriété

$$u + v = 2a.$$

La différentiation de cette égalité montre que l'autre coordonnée polaire du second foyer est $\pi - \omega$, et l'on découvre ainsi que la normale est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs. On a donc

$$\frac{dv}{ds} = \cos\omega, \quad \frac{d\omega}{ds} = \frac{1}{\rho} - \frac{\sin\omega}{v}. \tag{2}$$

Les égalités (1) et (2) donnent, par soustraction,

$$\frac{2}{\rho} = \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right)\sin\omega,$$

d'où

$$uv = a\rho\sin\omega. \tag{3}$$

Cette propriété fournit immédiatement la construction, très connue, du

rayon de courbure. Les égalités (1) et (2) donnent encore, par addition,

$$2\frac{d\omega}{ds}=\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)\sin\omega,$$

ou bien, en vertu de (3),

$$\frac{d\omega}{ds}=\frac{v-u}{2a\rho}. \tag{4}$$

Différentiant (3) il vient

$$3\rho d\omega+\operatorname{tg}\omega d\rho=0,$$

d'où

$$\rho=\frac{c}{\sin^3\omega}. \tag{5}$$

La relation (4) peut d'ailleurs être mise sous la forme

$$u-v=\frac{2}{3}a\frac{d\rho}{ds}\operatorname{tg}\omega. \tag{6}$$

On en déduit

$$u=a\left(1+\frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds}\operatorname{tg}\omega\right),\quad v=a\left(1-\frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds}\operatorname{tg}\omega\right). \tag{7}$$

On obtient ensuite par multiplication, et par substitution dans (3),

$$1-\frac{1}{9}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2\operatorname{tg}^2\omega=\frac{\rho}{a}\sin\omega,$$

d'où

$$s=\frac{1}{3}\int\frac{\operatorname{tg}\omega d\rho}{\sqrt{1-\frac{\rho}{a}\sin\omega}}. \tag{8}$$

Enfin, si l'on pose

$$c'=\sqrt{\frac{a^3}{c}},$$

et qu'on tienne compte de (5), on trouve

$$s=\frac{1}{3}\int\frac{d\rho}{\sqrt{-\left[1-\left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\left[1-\left(\frac{\rho}{c'}\right)^{\frac{1}{3}}\right]}}.$$

C'est l'équation intrinsèque cherchée. Elle montre que c et c' sont les valeurs extrêmes de ρ. La quantité soumise au radical, dans (8), ne pouvant être positive à moins que $c<a$, on doit avoir $c'>a$. Donc c

est le *minimum*, c' le *maximum* de ρ. Cela étant, les coordonnées cartésiennes du centre de l'ellipse sont

$$\alpha = \frac{u - v}{2} \cos\omega, \quad \beta = \frac{u + v}{2} \sin\omega,$$

c'est-à-dire, d'après (7),

$$\alpha = \frac{a}{3}\frac{d\rho}{ds}\sin\omega, \quad \beta = a\sin\omega.$$

On voit que

$$\frac{d\rho}{ds} = 3\frac{\alpha}{\beta},$$

ce qui démontre la construction donnée par Mac-Laurin pour le centre de courbure de la développée. D'après (5), ρ atteint son minimum pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire lorque le point est sur la droite focale. Alors la distance du point au centre, toujours donnée par la formule

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \left[1 + \frac{1}{9}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} a\sin\omega = \sqrt{a^2 - ac\cot^2\omega},$$

est égale à a. La valeur de la même distance, lorsque ρ atteint le maximum, est

$$b = \sqrt{a^2 - ac\left(\frac{a}{c} - 1\right)} = \sqrt{ac}.$$

Donc les constantes c et c' s'expriment en fonction de a et b par les formules

$$c = \frac{b^2}{a}, \quad c' = \frac{a^2}{b}.$$

Dans les deux cas considérés α est nul, c'est-à-dire que la normale passe par le centre. Elle se confond donc avec la droite focale dans le premier cas, et l'on démontre qu'elle lui est perpendiculaire dans le second en observant que l'inclinaison θ de la tangente sur la droite focale est donnée par la formule

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{u + v}{u - v}\cot\omega = 3\frac{d\rho}{ds}\cot^2\omega,$$

qu'on transforme sans peine en celle-ci :

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{\left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}{1 - \left(\frac{\rho}{c'}\right)^{\frac{2}{3}}}}.$$

Pour avoir la distance focale il suffit de voir ce que devient le second membre de (6) lorsque, ρ tendant vers c, ω tend vers $\frac{\pi}{2}$. Plus simplement, remarquons que, pour $\rho = c'$, la formule (6) donne $u = v = a$. On parvient ainsi à la construction des foyers, et l'on démontre que la demi-distance focale est $\sqrt{a^2 - b^2}$. Il est maintenant facile de se rendre compte de la forme de la conique, et l'équation intrinsèque permet en outre d'étudier l'*allure* de la courbe aux environs de chacun de ses points. En effet, la courbe définie par l'équation

$$s = \int \frac{d\rho}{\sqrt{\varphi(\rho)}}$$

peut être assimilée, aux environs du point pour lequel $\rho = \rho_0$, à l'*alysoïde* représentée par l'équation

$$\rho = A + \frac{s^2}{B},$$

les paramètres ayant les valeurs

$$A = \rho_0 - \frac{\varphi(\rho_0)}{\varphi'(\rho_0)}, \quad B = \frac{4}{\varphi'(\rho_0)}.$$

Il faut, bien entendu, considérer sur l'alysoïde les environs du point séparé du sommet par un arc

$$s_0 = \frac{2\sqrt{\varphi(\rho_0)}}{\varphi'(\rho_0)}.$$

Dans le cas actuel

$$\varphi(\rho) = -9\left[1 - \left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\left[1 - \left(\frac{\rho}{c'}\right)^{\frac{2}{3}}\right],$$

$$\varphi'(\rho) = \frac{6}{\rho}\left[\left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\rho}{c'}\right)^{\frac{2}{3}} - 2\left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\rho}{c'}\right)^{\frac{2}{3}}\right].$$

En particulier

$$\varphi(c) = \varphi(c') = 0, \quad \varphi'(c) = 6\frac{a^2 - b^2}{ab^2}, \quad \varphi'(c') = -6\frac{a^2 - b^2}{ab^2}.$$

Donc, en ses sommets, la courbe se comporte comme les alysoïdes

$$\rho = \frac{b^2}{a} + \frac{3(a^2 - b^2)}{2ab^2}s^2, \quad \rho = \frac{a^2}{b} - \frac{3(a^2 - b^2)}{2a^2b}s^2$$

aux environs de leurs sommets respectifs. Voyons quelle est son allure autour d'autres points remarquables. Au moyen des formules démontrées précédemment on peut exprimer la distance de la normale au centre, en fonction de ρ, comme il suit :

$$\alpha = a\sqrt{1 + \left(\frac{c}{c'}\right)^{\frac{2}{3}} - \left[\left(\frac{c}{\rho}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\rho}{c'}\right)^{\frac{2}{3}}\right]}.$$

Cette distance atteint sa plus grande valeur lorsque

$$\frac{c}{\rho} = \frac{\rho}{c'},$$

c'est-à-dire pour $\rho = \sqrt{cc'} = \sqrt{ab}$. Elle devient alors

$$\alpha = a\sqrt{1 - 2\left(\frac{c}{c'}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{c}{c'}\right)^{\frac{2}{3}}} = a - b.$$

Or on a

$$\varphi(\sqrt{ab}) = \frac{9(a-b)^2}{ab}, \quad \varphi'(\sqrt{ab}) = \frac{6(a-b)^2}{ab\sqrt{ab}}.$$

Donc, aux environs du point considéré, la conique a même allure que l'alysoïde

$$\rho = -\frac{\sqrt{ab}}{2} + \frac{3(a-b)^2}{2ab\sqrt{ab}}s^2$$

autour du point dont la distance au sommet, comptée sur la courbe, est $\frac{ab}{a-b}$. Les formules précédentes ne sont pas applicables au point pour lequel l'écart angulaire entre la normale et le rayon vecteur issu du centre devient maximum. Évidemment pour ce point $\varphi'(\rho)$ est nul, d'où il suit qu'on doit avoir

$$\rho^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}(c^{\frac{2}{3}} + c'^{\frac{2}{3}}).$$

Aux environs de ce point l'ellipse se comporte plutôt comme une spirale logarithmique autour d'un point autre que le pôle.

***

Nous allons faire une application de ce qui précède en cherchant les courbes telles que le segment intercepté sur une tangente quelconque par les côtés d'un angle fixe soit divisé en parties égales par le point de contact. On exprime d'abord que les côtés de l'angle sont fixes en écrivant

$$\frac{d}{ds}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha \pm t} = -\frac{1}{\rho},$$

où α et β représentent les coordonnées cartésiennes du sommet, et $2t$ le segment intercepté par les côtés sur la tangente. Les transformées des formules (1) étant

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\beta}{\rho} - 1, \quad \frac{d\beta}{ds} = -\frac{\alpha}{\rho},$$

la différentiation indiquée précédemment donne

$$\beta\rho + t^2 = 0, \quad \beta\rho\frac{dt}{ds} = t\alpha.$$

On peut mettre la dernière relation sous la forme que voici :

$$\frac{1}{t}\frac{dt}{ds} = \frac{\alpha}{\beta\rho} = -\frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{ds},$$

et en déduire, successivement,

$$\beta = \frac{c^2}{t}, \quad \rho = -\frac{t^3}{c^2}, \quad \alpha = -t\frac{dt}{ds}.$$

D'ailleurs, si l'on appelle φ la valeur de l'angle, on a

$$\alpha^2 + \beta^2 - t^2 = 2\beta t\cot\varphi.$$

Donc

$$s = \int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2 - \frac{c^4}{t^2} + 2c^2\cot\varphi}};$$

puis, par substitution de t en fonction de ρ,

$$s = \frac{1}{3}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{4}{3}} + 2\left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{2}{3}}\cot\varphi - 1}}.$$

C'est l'équation d'une hyperbole, dont les axes ont avec les constantes c et φ les relations

$$ab = c^2, \quad a^2 - b^2 = 2c^2 \cot \varphi,$$

lesquelles donnent

$$a = c\sqrt{\cot\frac{\varphi}{2}}, \quad b = c\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}.$$

En particulier, lorsque l'angle est droit, on obtient l'équation intrinsèque de l'*hyperbole équilatère* :

$$s = \frac{1}{3}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{4}{3}} - 1}}.$$

Il est curieux que le simple changement du coefficient de l'intégrale suffise pour que l'équation représente une courbe tout à fait différente. Ainsi, en écrivant $\frac{2}{3}$ au lieu de $\frac{1}{3}$, on obtient l'équation d'une *ligne de Ribaucour* particulière, caractérisée par la propriété suivante : le centre de courbure est symétrique, par rapport à la tangente, du milieu du segment de normale compris entre la tangente et une droite fixe (*directrice*). Néanmoins cette courbe est dans une relation remarquable avec l'hyperbole équilatère; car, en supposant que les deux lignes, convenablement choisies, roulent l'une sur l'autre, la directrice de l'une ne cesse de passer par le centre de l'autre.

On est naturellement porté à généraliser la question qui précède en remplaçant les deux droites fixes par un faisceau quelconque; mais on rencontre alors des courbes, qui ne ressemblent en rien aux coniques. Prenons comme exemple le cas de trois droites concourantes, qui divisent le plan en trois régions égales, et écrivons que leurs points de rencontre avec une tangente quelconque ont pour barycentre le point de contact. On trouve

$$3\cot\omega = \cot\varphi + \cot(\varphi + 120^\circ) + \cot(\varphi - 120^\circ),$$

et le second membre ne diffère pas de $3\cot 3\varphi$. Donc $\omega = 3\varphi$, à moins d'un multiple de π; puis, en différentiant,

$$2\alpha + \rho\sin\omega = 0.$$

Cette relation, qui fournit le moyen de construire très simplement le

cercle osculateur, montre en même temps que la courbe cherchée est une *spirale sinusoïde*. Du reste, deux nouvelles différentiations donnent, successivement,

$$\frac{d\rho}{ds} = 5\cot\omega, \quad \rho\frac{d^2\rho}{ds^2} = \frac{15}{\sin^2\omega}.$$

On en déduit, par élimination de ω, l'équation différentielle

$$3\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 - 5\rho\frac{d^2\rho}{ds^2} + 75 = 0,$$

dont l'intégration conduit à l'équation intrinsèque

$$s = \frac{1}{5}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{5}{6}} - 1}}.$$

Celle-ci représente une courbe du sixième ordre, à trois branches hyperboliques, asymptotes aux droites données. Chacun de ses points est le barycentre des points de rencontre de la tangente avec les trois asymptotes. Cette courbe se distingue parmi les spirales sinusoïdes à cause d'une particularité intéressante. Imaginons qu'un point la parcoure avec une vitesse proportionnelle à la racine carrée de la distance au pôle. Les composantes de l'accélération, suivant la normale et la tangente, sont respectivement proportionnelles à

$$\frac{2u}{\rho} = -\sin\omega, \quad \frac{du}{ds} = -\cos\omega.$$

Il en résulte que le mouvement peut être considéré comme ayant lieu sous l'action d'une répulsion *constante*, émanant du pôle.

***

D'une manière analogue, on peut étudier les courbes définies par l'équation $uv = c^2$. Une première différentiation, faite en tenant compte des relations (1), fournit la construction de la tangente : le segment de cette droite, limité aux perpendiculaires élevées par les foyers aux rayons vecteurs, est divisé en parties égales par le point de contact. Dans le cas actuel, il est préférable d'appeler u et ω les coordonnées polaires du centre, situé sur la droite qui joint les foyers, à une dis-

tance b de chacun d'eux. Cela étant, les valeurs des rayons vecteurs sont données par l'expression

$$\sqrt{u^2 \pm 2bu\cos\theta + b^2},$$

θ étant l'inclinaison de l'axe focal sur le rayon vecteur issu du centre. Évidemment

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin\omega}{u}.$$

L'équation de définition devient

$$u^4 - 2b^2u^2\cos^2\theta + b^4 = a^4,$$

et l'on en tire, par différentiation,

$$u^2\cos\omega = b^2\cos(2\theta - \omega). \tag{9}$$

On obtient ensuite, en éliminant u,

$$a^2\cos\omega = b^2\sin 2\theta. \tag{10}$$

Maintenant on peut écrire, au lieu de (9),

$$u^2 = a^2\sin\omega + b^2\cos 2\theta,$$

d'où l'on déduirait sans peine les expressions de u en fonction de ω ou de θ. Inversement, il est aisé de voir que

$$\sin\omega = \frac{u^4 + a^4 - b^4}{2a^2u^2}, \quad \cos 2\theta = \frac{u^4 - a^4 + b^4}{2b^2u^2}. \tag{11}$$

En conséquence, si l'on intègre la première des équations (1),

$$s = \int \frac{2a^2u^2du}{\sqrt{-[u^4 - (a^2 + b^2)^2][u^4 - (a^2 - b^2)^2]}}. \tag{12}$$

Cela posé, différentions (10). Il vient

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\sin\omega}{u} + \frac{2u}{a^2},$$

d'où la construction du centre de courbure. Enfin, si l'on substitue ω en fonction de u, on trouve

$$\rho = \frac{2a^2u^3}{3u^4 - a^4 + b^4}, \tag{13}$$

et l'élimination de u entre (12) et (13) conduirait à l'équation intrinsèque

des *cassinoïdes*. Cette élimination est bien facile dans le cas particulier de $a = b$. On a alors

$$s = \int \frac{2a^2 du}{\sqrt{4a^4 - u^4}}, \quad \rho = \frac{2a^2}{3u},$$

et l'on obtient

$$s = 3\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{c}\right)^4 - 1}},$$

où

$$c = \frac{a}{3}\sqrt{2}.$$

Telle est l'équation intrinsèque de la *lemniscate*. Elle montre que ρ croît constamment et indéfiniment depuis c, qui est sa plus petite valeur. Lorsque ρ est infini, u est nul. En outre, comme les formules (11) deviennent

$$\sin \omega = \cos 2\theta = \frac{u^2}{2a^2},$$

on voit que, dans le cas considéré, $\theta = \frac{\pi}{4}$. Donc la courbe passe par le centre, où elle subit une inflexion, et rencontre l'axe focal sous un angle de 45°. Lorsque $\rho = c$, les formules précédentes donnent

$$u = a\sqrt{2}, \quad \omega = \frac{\pi}{2}.$$

La courbe finit donc par rencontrer orthogonalement l'axe focal, à une distance $a\sqrt{2}$ du centre. Des considérations de symétrie permettent de la compléter : on reconnaît qu'elle se compose de quatre arcs égaux à celui qu'on vient de décrire, se raccordant entre eux. Elle a donc la forme d'un *huit*, et son équation intrinsèque en fait immédiatement connaître la longueur totale :

$$12\int_c^\infty \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{c}\right)^4 - 1}}.$$

Ici aussi nous pouvons remarquer que, par le changement du coefficient 3 en 2 dans l'équation de la lemniscate, on vient à représenter une autre

ligne de Ribaucour, caractérisée par la propriété suivante : le centre de courbure est au milieu du segment de normale compris entre la tangente et une droite fixe. Si l'on met cette courbe en contact avec une lemniscate convenable, et qu'on fasse rouler les deux lignes l'une sur l'autre, le centre de la lemniscate reste constamment sur la directrice de la courbe considérée. Cette courbe est aussi le lieu du centre d'une hyperbole équilatère roulant sur une droite, et l'enveloppe de la directrice d'une chaînette, roulant à l'extérieur d'une chaînette égale.

La lemniscate est la seule cassinoïde qui passe par le centre; car, si $a \gtrless b$, les seconds membres des formules (11) deviennent infinis pour $u = 0$, ce qui ne peut être. Pour la même raison, u ne peut devenir infini, c'est-à-dire que les cassinoïdes ont tous leurs points à distance finie. Il est d'ailleurs facile de voir quelles sont les limites entre lesquelles u peut varier. En effet, pour que le second membre de (12) soit réel, il faut que u^2 ne surpasse pas $a^2 + b^2$ et ne soit jamais inférieur à la valeur absolue de $a^2 - b^2$. Remarquons maintenant que, d'après (11), $\sin\theta$ est nul, soit pour $u^2 = a^2 + b^2$, soit pour $u^2 = b^2 - a^2$; d'où il suit que la courbe rencontre l'axe en quatre points lorsque $b > a$, et en deux seulement lorsque $b < a$. On reconnaît d'ailleurs, à cause du mode de variation de u, qu'elle est constituée par deux ovales égaux dans le premier cas, et par une seule boucle fermée dans le second. C'est toujours sous un angle droit qu'elle rencontre l'axe focal, parce que, d'après (10), $\cos\omega$ s'annule en même temps que $\sin\theta$. En outre, comme la formule (9) donne

$$u = \pm b \text{ pour } \omega = \theta \gtrless \frac{\pi}{2},$$

on voit que les points les plus éloignés de l'axe appartiennent à la circonférence décrite sur la distance focale comme diamètre; mais il faut remarquer que cette circonférence ne rencontre pas la courbe si la valeur de u n'est pas comprise entre les limites trouvées plus haut : cela arrive lorsque $a > b\sqrt{2}$. De même, si l'on fait $u^2 = a^2 - b^2$, on voit, d'après (11), que θ devient égal à $\frac{\pi}{2}$, et l'on obtient, pour les cassinoïdes à une boucle, les points situés sur la perpendiculaire élevée par le centre à l'axe focal. Les circonférences qui ont ces points pour centres et a pour rayon, passent par les foyers. On parvient ainsi à une construction des

foyers, qui est tout à fait semblable à celle qu'on a trouvée pour les coniques. D'après la première des formules (11), la tangente ne passe par le centre que pour $u^4 = b^4 - a^4$. Cela ne peut donc arriver que dans les cassinoïdes à deux ovales ($b > a$). La discussion de (13) montre ensuite que la courbure atteint alors sa plus petite valeur. Sur les cassinoïdes à une boucle ($b < a$) on a quatre points d'inflexion, correspondant à la valeur $\frac{1}{2}(a^4 - b^4)$ de u^4, pourvu que cette valeur soit comprise entre les limites trouvées précédemment, et, par suite, que l'on ait $a < b\sqrt{2}$. Lorsque $a > b\sqrt{2}$, la cassinoïde est toute convexe, comme une ellipse, et sa courbure varie entre les limites

$$\frac{a^2 - 2b^2}{a^2\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad \frac{a^2 + 2b^2}{a^2\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

On voit qu'il y a, outre la lemniscate, une autre cassinoïde remarquable à considérer : elle correspond à l'hypothèse $a = b\sqrt{2}$, et ressemble assez à une ellipse dont les sommets situés sur le petit axe seraient, avec les foyers, les sommets d'un carré. Toutes ces courbes se déduisent très facilement de deux circonférences, ayant le rayon $\frac{a^2}{b}$ et leurs centres aux foyers. Il faut employer, pour cela, une construction connue, qui consiste à remplacer le point dont l'affixe est z par celui dont l'affixe est $\sqrt{bz}$. On obtient : 1° les cassinoïdes à deux ovales lorsque les circonférences ne se coupent pas; 2° les cassinoïdes à une boucle, affectée de concavités, lorsque les circonférences se coupent de manière que le centre de chacune d'elles reste extérieur à l'autre; 3° les cassinoïdes à un ovale lorsque le centre de chaque cercle est intérieur à l'autre cercle.

Les discussions que nous venons de faire montrent suffisamment, croyons-nous, combien il est aisé d'aborder certaines questions par la *méthode intrinsèque*, qui est la traduction analytique la plus *directe* de la méthode géométrique des infiniment petits. C'est à ce fait qu'elle doit sans doute tous ses avantages, et, aussi, quelques-uns de ses défauts.

QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT.

Définition et limite de la somme algébrique de plusieurs quantités incommensurables(*).

1. *Rappel de quelques définitions relatives aux nombres incommensurables* (**). Si par un procédé quelconque, on parvient à distinguer les nombres commensurables en deux groupes $(a_1, a_2, a_3, \text{etc})$, $(A_1, A_2, A_3, \text{etc})$ tels que tout nombre du premier groupe soit inférieur à un nombre quelconque du second, et sans qu'aucun nombre commensurable sépare ces deux groupes, on dit qu'ils sont séparés par un nombre incommensurable α. Par convention, α est dit supérieur à tout nombre a_m du premier groupe, et inférieur à tout nombre A_n du second; $\alpha - a_m$ et $A_n - \alpha$ sont regardés comme une partie de $A_n - a_m$. Par suite, en étendant aux incommensurables la notion de limite, on peut dire que α est la limite commune des incommensurables a_m, A_n lorsque $A_n - a_m$ a zéro pour limite.

Deux incommensurables α, β sont dits inégaux, s'il existe un nombre commensurable c compris entre α et β, c'est-à-dire supérieur à tout nombre a_m commensurable inférieur à α et inférieur à tout nombre commensurable B_n supérieur à β. On dit encore, dans ce cas, que β est supérieur à α et que $\beta - \alpha$ est une partie de $B_n - a_m$.

2. *Définition de la somme algébrique* $\lambda + \mu - \nu$ *de plusieurs nombres incommensurables* λ, μ, ν. 1° Soient l, m, n trois nombres commensurables variables croissants, et L, M, N trois nombres commensurables variables décroissants, ayant respectivement les nombres incommensurables λ, μ, ν pour limites. On a donc

$$\lim (L - l) = 0, \quad \lim (M - m) = 0, \quad \lim (N - n) = 0. \qquad (1)$$

De plus, n étant croissant, $-n$ est décroissant; N étant décroissant, $-N$ est croissant.

(*) Selon nous, on ne peut exiger la connaissance des démonstrations relatives aux incommensurables que des élèves d'élite des classes supérieures des établissements d'enseignement moyen. Pour les autres, il suffit qu'ils connaissent les définitions et les énoncés.

(**) Voir, par exemple, *Mathesis*, t. V, pp. 49-53, ou t. VI, p. 265-266.

2° Puisque l'on a

$$l < \mathrm{L}, \quad m < \mathrm{M}, \quad n < \mathrm{N} \quad \text{ou} \quad -\mathrm{N} < -n, \tag{2}$$

on a aussi

$$l + m - \mathrm{N} < \mathrm{L} + \mathrm{M} - n.$$

Ensuite, puisque l, m, $-\mathrm{N}$ sont des quantités croissantes, il en est de même de la somme $l + m + (-\mathrm{N})$. Donc, d'après le principe fondamental de la théorie des limites (*), $l + m - \mathrm{N}$ a une limite finie σ.

3° La somme $\mathrm{L} + \mathrm{M} - n$, supérieure à $l + m - \mathrm{N}$, d'après les inégalités (2), est décroissante puisque les nombres L, M, $-n$ sont décroissants; donc elle a aussi une limite finie Σ, d'après le principe fondamental de la théorie des limites.

4° $\Sigma = \sigma$; car, soit, s'il est possible, c un nombre commensurable compris entre σ et Σ, et tel, par conséquent, que l'on ait

$$l + m - \mathrm{N} < c < \mathrm{L} + \mathrm{M} - n.$$

On déduit de là

$$c - (l + m - \mathrm{N}) < \mathrm{L} + \mathrm{M} - n - (l + m - \mathrm{N}),$$
$$\mathrm{L} + \mathrm{M} - n - c < \mathrm{L} + \mathrm{M} - n - (l + m - \mathrm{N}),$$

ou encore

$$c - (l + m - \mathrm{N}) < (\mathrm{L} - l) + (\mathrm{M} - m) + (\mathrm{N} - n),$$
$$(\mathrm{L} + \mathrm{M} - n) - c < (\mathrm{L} - l) + (\mathrm{M} - m) + (\mathrm{N} - n).$$

La somme des différences $(\mathrm{L} - l)$, $(\mathrm{M} - m)$, $(\mathrm{N} - n)$, dont chacune devient et reste aussi petite que l'on veut, jouit aussi de cette propriété; donc

$$\lim (l + m - \mathrm{N}) = c, \quad \lim (\mathrm{L} + \mathrm{M} - n) = c,$$

c'est-à-dire $\sigma = c$, $\Sigma = c$, ce qui est contraire à l'hypothèse que σ et Σ sont inégaux. On a donc $\Sigma = \sigma$.

5° Les sommes

$$l + m - n, \quad l + \mathrm{M} - n, \quad \mathrm{L} + m - n,$$
$$\mathrm{L} + \mathrm{M} - \mathrm{N}, \quad l + \mathrm{M} - \mathrm{N}, \quad \mathrm{L} + m - \mathrm{N},$$

(*) *Un nombre toujours croissant a une limite finie ou infinie* (Voir *Mathesis*, t. V, pp. 193-196). La limite est finie, si le nombre variable reste toujours inférieur à une quantité finie donnée.

sont intermédiaires entre

$$l + m - N \quad \text{et} \quad L + M - n$$

d'après les inégalités (2); elles ont donc aussi σ pour limite (*).

6° En résumé, les huit sommes algébriques

$$(l \text{ ou } L) + (m \text{ ou } M) - (n \text{ ou } N)$$

ont une limite commune σ. Par conséquent, on peut donner la définition suivante :

La somme $\lambda + \mu - \nu$ *des nombres incommensurables* $\lambda, \mu, -\nu$, *est la limite* σ *de la somme des nombres commensurables* l *ou* L, m *ou* M, $-n$ *ou* $-$ N, *qui ont respectivement* $\lambda, \mu, -\nu$ *pour limites.*

3. *La somme* $\lambda + \mu - \nu$ *est unique.* Soient l', m', n' trois nombres commensurables variables croissants, et L', M', N' trois nombres commensurables variables décroissants ayant aussi λ, μ, ν respectivement pour limites. On prouve comme plus haut que les huit sommes

$$(l' \text{ ou } L') + (m' \text{ ou } M') - (n' \text{ ou } N')$$

ont une limite commune σ'. Je dis que $\sigma = \sigma'$. En effet, d'après la définition des nombres l, m, n; l', m', n'; L, M, N; L', M', N', on a

$$l' < L, \quad m' < M, \quad n' < N \quad \text{ou} \quad -N < -n',$$
$$l < L', \quad m < M', \quad n < N' \quad \text{ou} \quad -N' < -n.$$

On tire aisément de là

$$l' + m' - N' < L + M - n, \quad l + m - N < L' + M' - n',$$

et, par suite, d'après un principe de la méthode des limites (**),

$$\lim(l' + m' - N') \leqq \lim(L + M - n), \quad \lim(l + m - N) \geqq \lim(L' + M' - n')$$

c'est-à-dire

$$\sigma' \geqq \sigma, \quad \sigma \geqq \sigma',$$

relations d'où il résulte que $\sigma = \sigma'$.

4. *Limite d'une somme* $(u + v - w)$ *de variables finies, commensurables ou incommensurables.* La démonstration de la relation

$$\lim(u + v - w) = \lim u + \lim v - \lim w \qquad (A)$$

(*) *Si deux quantités variables inégales ont une limite commune, toute quantité intermédiaire Z a la même limite.* (Voir, par exemple, *Mathesis*, t. VI, pp. 268-269.)

(**) *La limite d'une variable toujours supérieure à une autre variable est égale ou supérieure à la limite de celle-ci.* (Voir, par exemple, *Mathesis*, t. VI, pp. 269-271.)

donnée précédemment (*Mathesis*, pp. 35-37), s'appliquait seulement au cas où tous les nombres considérés sont commensurables.

Maintenant que nous avons établi le sens exact que l'on peut attribuer aux sommes algébriques de nombres incommensurables, elle peut être étendue, avec des modifications insignifiantes, au cas où l'une ou plusieurs des quantités u, v, w, $u+v-w$, $\lim u$, $\lim v$, $\lim w$, $\lim(u+v-w)$ sont incommensurables. Nous regarderons donc la relation (A) comme établie d'une manière générale. (P. M.)

SURFACE ET VOLUME DU TORE:

par M. l'abbé E. Gelin, professeur au Collège Saint-Quirin à Huy.

Lorsque l'on n'a en vue d'établir que la mesure du tore, et non aussi celle de l'anneau polygonal régulier, la méthode exposée dans notre précédent article(*) peut être considérablement abrégée(**).

Soient AB, A'B' deux droites symétriques par rapport à une droite PQ(***). Supposons que la figure ABB'A' tourne autour d'un axe XY parallèle à PQ et proposons-nous de trouver le volume engendré par cette figure ainsi que la somme des surfaces engendrées par les droites AB, A'B'.

1° Soient a, a', b, b' les distances des points A, A', B, B' à l'axe XY, et d la distance des parallèles PQ, XY; soient 2α et 2β les longueurs des droites AA', AB', et δ la distance des mêmes droites; enfin, soit l la longueur commune des droites AB, A'B'. On a :

$$\begin{aligned}\text{Surf. AB} + \text{surf. A'B'} &= \pi(a+b)l + \pi(a'+b')l \\ &= \pi(a+b+a'+b')l \\ &= \pi(d+\alpha+d+\beta+d-\alpha+d-\beta)l \\ &= 4\pi dl = 2\pi d(\text{AB} + \text{A'B'}).\end{aligned}$$

Cette formule subsiste, si l'on remplace AB, A'B' par deux lignes polygonales quelconques, symétriques par rapport à PQ.

(*) Voir *Mathesis*, tome X, page 190.

(**) Voir Catalan, *Éléments de Géométrie*, deuxième édition, page 343.

(***) Le lecteur est prié de faire la figure.

2° Supposons maintenant que B et B′ se confondent en un même point O situé sur PQ ; on aura :

$$\begin{aligned}\text{vol. OAA}' &= \tfrac{1}{3}\pi\partial\,(d^2 + da + a^2) - \tfrac{1}{3}\pi\partial\,(d^2 + da' + a'^2)\\ &= \tfrac{1}{3}\pi\partial\,(da - da' + a^2 - a'^2)\\ &= \tfrac{1}{3}\pi\partial\,[d(a-a') + (a+a')(a-a')]\\ &= \tfrac{1}{3}\pi\partial\,(a-a')(d+a+a')\\ &= \tfrac{1}{3}\pi\partial\,.\,2\alpha\,.\,(d+d+\alpha+d-\alpha)\\ &= 2\pi d\alpha\partial = 2\pi d\,.\,\text{OAA}'.\end{aligned}$$

Si B et B′ ne se confondent pas en un même point, prolongeons AB et A′B′ jusqu'à leur rencontre en O avec PQ; on aura :

$$\begin{aligned}\text{vol. ABB'A}' &= \text{vol. OAA}' - \text{vol. OBB}'\\ &= 2\pi d\,.\,\text{OAA}' - 2\pi d\,.\,\text{OBB}'\\ &= 2\pi d\,.\,\text{ABB'A}'.\end{aligned}$$

Cette formule subsiste, si l'on remplace AB, A′B′ par deux lignes polygonales quelconques, symétriques par rapport à PQ.

Cela posé, soient r le rayon du cercle générateur du tore, et d la distance du centre à l'axe XY. Menons le diamètre parallèle à XY et inscrivons, dans les deux demi-cercles, deux demi-polygones symétriques par rapport à ce diamètre. Soient p le périmètre et s la surface du polygone entier. D'après ce qui précède, on a, pour la surface et le volume engendrés par le polygone,

$$S = 2\pi d\,.\,p, \quad V = 2\pi d\,.\,s.$$

Si l'on augmente indéfiniment le nombre des côtés, et que l'on passe à la limite, il vient, pour la surface et le volume du tore,

$$\begin{aligned}S &= 2\pi d\,.\,2\pi r = 4\pi^2 dr,\\ V &= 2\pi d\,.\,\pi r^2 = 2\pi^2 dr^2.\end{aligned}$$

SUR LES QUADRANGLES COMPLETS;

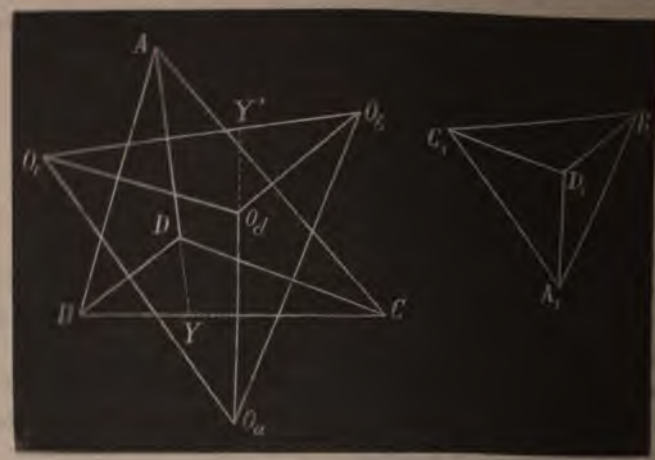
par M. J. Neuberg.

(Suite; voir *Mathesis*, p. 33.)

4. Si dans la figure ci-jointe on fait abstraction de la situation relative des quadrangles ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ (ou $O_aO_bO_cO_d$), on peut caractériser ainsi les rapports qui existent entre ces deux figures. Le faisceau des vecteurs D_1A_1, D_1B_1, D_1C_1 est égal à celui de trois parallèles menées aux

côtés du triangle ABC, et le faisceau des vecteurs DA, DB, DC est égal à celui de trois parallèles menées aux côtés du triangle $A_1B_1C_1$. Le lecteur familiarisé avec la théorie de l'involution, peut s'expliquer autrement ces relations.

Une transversale coupe les trois couples de côtés opposés du quadrangle ABCD en trois couples de points conjugués d'une involution ; si la transversale est la droite à l'infini, on voit que les parallèles menées par un même point aux côtés du quadrangle sont les rayons d'un faisceau involutif ; l'involution étant une relation symétrique, il existe aussi un triangle tel que les côtés sont parallèles aux vecteurs DA, DB, DC et, que les parallèles menées par les sommets de ce triangle aux côtés de ABC concourent en un même point.



Les quadrangles ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ ont été appelés *quadrangles métapolaires* (Neuberg et Gob, *Sur les foyers de Steiner*). Voici la raison de cette dénomination. Si A'B'C' est le triangle polaire de ABC par rapport à un cercle quelconque décrit de D comme centre, les côtés B'C', C'A', A'B' sont perpendiculaires aux vecteurs DA, DB, DC ; les droites DA', DB', DC' sont perpendiculaires aux côtés BC, CA, AB. Donc la figure A'B'C'D est semblable à $A_1B_1C_1D_1$ et $O_aO_bO_cO_d$.

3. Deux quadrangles ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ sont dits *affins*, lorsqu'ils vérifient les relations

$$\frac{\text{aire ABC}}{\text{aire } A_1B_1C_1} = \frac{\text{BCD}}{B_1C_1D_1} = \frac{\text{CDA}}{C_1D_1A_1} = \frac{\text{DAB}}{D_1A_1B_1} \qquad (1)$$

Deux sommets homologues D, D_1 ont les mêmes coordonnées barycentriques dans les triangles correspondants ABC, $A_1B_1C_1$; deux côtés opposés AB, CD de l'un des quadrangles se divisent mutuellement dans les mêmes rapports que les côtés correspondants A_1B_1, C_1D_1 de l'autre quadrangle.

Il est facile de voir que deux quadrangles métapolaires sont affins. En effet, si Y est le point de rencontre de BC avec AD, Y′ celui de O_bO_c avec O_aO_d, les triangles ABY et O_cO_dY', ACY et O_bO_dY' ont les côtés perpendiculaires; par conséquent,

$$\frac{BY}{AY}=\frac{O_dY'}{O_cY'},\quad \frac{CY}{AY}=\frac{O_dY'}{O_bY'};$$

d'où

$$\frac{BY}{CY}=\frac{O_bY'}{O_cY'}.$$

On parvient plus rapidement à ce résultat en menant AU parallèle à BC, O_dU' parallèle à O_cO_b et en coupant les faisceaux égaux A(BCYU), $O_d(O_cO_bU'Y')$ par les transversales BC, O_bO_c.

Enfin, si l'on désigne par a, b, c, A, B, C les côtés et les angles du triangle ABC, et par A′, B′, C′ les angles du triangle $O_aO_bO_c$, on trouve facilement

$$O_dM_{bc}=\tfrac{1}{2}a\cot A,\quad O_aM_{bc}=\tfrac{1}{2}a\cot A',\quad \ldots,$$

$$O_aO_d=\tfrac{1}{2}a(\cot A\pm\cot A'),\quad O_bO_d=\tfrac{1}{2}b(\cot B\pm\cot B'),\quad \ldots,$$

$$\text{aire } O_aO_bO_d=\tfrac{1}{2}O_aO_d\,.\,O_bO_d\sin C=ABC(\cot A\pm\cot A')(\cot B\pm\cot B');$$

d'où l'on conclut que les aires $O_bO_cO_d$, $O_cO_aO_d$, $O_aO_bO_d$ ou les coordonnées barycentriques de O_d dans le triangle $O_aO_bO_c$ sont inversement proportionnelles aux quantités

$$\cot A\pm\cot A',\quad \cot B\pm\cot B',\quad \cot C\pm\cot C'.$$

La forme de ces expressions montre que le point D a les mêmes coordonnées barycentriques dans le triangle ABC (Il faut prendre la somme ou la différence des cotangentes suivant que les triangles ABC, $O_aO_bO_c$ ont une même orientation ou non).

6. La propriété que nous venons d'établir conduit à ce joli théorème de mécanique : *Si quatre forces parallèles appliquées aux points* A, B, C, D *se font équilibre, l'équilibre subsiste encore après qu'on les a transportées parallèlement aux centres des cercles circonscrits aux triangles* BCD, CDA, DAB, ABC.

Soient ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ deux quadrangles affins. Appliquons aux sommets du premier les forces parallèles $m\alpha$, $m\beta$, $m\gamma$, $m\delta$; aux sommets du second les forces parallèles $n\alpha$, $n\beta$, $n\gamma$, $n\delta$ (α, β, γ, δ ont la signification indiquée au 1°). Ces deux groupes de forces étant en équilibre, on voit facilement, en composant les forces $m\alpha$ et $n\alpha$, $m\beta$ et $n\beta$, ..., que les points A_2, B_2, C_2, D_2 divisant les droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 dans un même rapport $m : n$ sont les sommets d'un troisième quadrangle affin aux deux premiers. Si ceux-ci sont directement semblables entre eux, ils sont aussi semblables au quadrangle $A_2B_2C_2D_2$.

Les centres de gravité des triangles BCD, CDA, ... et les centres des cercles circonscrits sont les sommets de deux quadrangles $G_aG_bG_cG_d$, $O_aO_bO_cO_d$ affins au quadrangle ABCD. Par conséquent : 1° *Les centres des cercles des neuf points des triangles* BCD, CDA, ... *sont les sommets d'un quadrangle* $\omega_a\omega_b\omega_c\omega_d$ *affin au quadrangle* ABCD; 2° *les orthocentres* H_a, H_b, ... *de ces triangles jouissent de la même propriété.* Il y a plus : *les triangles* $H_aH_bH_c$, $H_bH_cH_d$, ... *sont équivalents aux triangles* ABC, BCD, ... (voir *Mathesis*, t. II, p. 132). (*A continuer.*)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Question 439(**).

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 119.)

Soient C *un point fixe d'une corde* BD *d'un cercle* ω, A *un point quelconque de la circonférence.* 1° *Trouver le lieu du point de rencontre* M *des hauteurs du triangle* ABC. 2° *Examiner les cas où ce lieu est une strophoïde ou une cissoïde.* 3° *On obtient différentes courbes, lorsque le point* C *se déplace sur* BD; *démontrer que les tangentes à ces courbes aux points qui correspondent à un même point* A *du cercle* ω *se coupent en un même point* N; 4° *Le lieu de* N *est une cardioïde.* (JEŘÁBEK.)

Solution par M. JEŘÁBEK. 1° Le lieu (M) est une cubique circulaire. En effet, une droite quelconque menée par C coupe la circonférence ω en

---

(*) Nous avons reçu de bonnes solutions de la question 695, par MM. Déprez et Brandza, de 696, par MM. Déprez, Laurens, Lalisse et Baudran.

(**) Les notations de l'énoncé ont été mises en rapport avec la figure ci-jointe, et le n° 3, qui supposait le cas particulier où BD est un diamètre du cercle ω, est énoncé ici d'une manière générale.

deux points A, A_1 ; les orthocentres M, M_1 des triangles ABC, A_1BC sont sur une même droite passant par B. Soit α le point où la perpendiculaire élevée en B sur BD rencontre la circonférence ω ; B est l'orthocentre du triangle rectangle αBC. Donc une droite menée par B coupe le lieu (M) en trois points B, M, M_1. La tangente en B est, évidemment, perpendiculaire sur $C\alpha$. Chacun des points cycliques du plan est l'orthocentre du triangle qui a pour sommet ce point et pour base la droite BC. Les tangentes aux points cycliques se coupent en B de sorte que B est le foyer de la cubique circulaire. C' est le point double de la courbe, et les

tangentes en ce point sont perpendiculaires sur les droites joignant B aux points A', A'_1 où une perpendiculaire élevée en C sur BD coupe la circonférence ω.

On démontre facilement que la courbe (M) est une cissoïdale. En effet, soit M' l'orthocentre du triangle ABD; les droites CM, DM' sont parallèles et le lieu de M' est une circonférence ω', symétrique de la circonférence ω par rapport à BD. Par conséquent, si l'on mène la droite M'G égale et parallèle à DC, le lieu de G est une circonférence ω'', et G est situé sur CM. Désignons par D' le symétrique de D par rapport à

C et par F, E les points de rencontre de CG, M'G avec la perpendiculaire élevée en D' sur BC. Comme CD' = M'G, M'E = A''D (A'' est la projection de A sur CB) on a CA'' = EG, d'où CM = FG. Ainsi, la courbe (M) admet la construction suivante : On donne une circonférence ω'', une droite D'E, et un point C sur la circonférence ω''; une droite menée par C rencontre la courbe et la droite en G, F; on prend sur cette droite CM = FG.

2° Lorsque C est au milieu de BD (c'est le cas de la figure ci-jointe), D' se confond avec B, et ω'' est sur la droite D'E. Alors, comme GF = MC, le triangle ω''FM est isoscèle, et si ω''M coupe en ω_1 la perpendiculaire élevée en C sur BD, on a aussi $\omega_1C = \omega_1M$. On voit que le lieu de M est maintenant une strophoïde oblique; on obtient une strophoïde droite, si l'angle $\omega''C\omega_1$ est droit, ce qui exige que BD soit un diamètre de la circonférence ω.

Lorsque C est confondu avec B, ou mieux lorsque la base BC du triangle ABC, infiniment petite, est dirigée suivant un diamètre donné, les circonférences ω, ω' se confondent et la droite D'E touche la circonférence ω''. On retrouve ainsi la construction classique de la cissoïde de Dioclès.

3° Revenons au cas général. Lorsque C se meut sur BD, A restant fixe, la droite CM se déplace parallèlement à elle-même, et les points C, M engendrent des divisions semblables. Considérons une seconde position a de A, et soient m', m les orthocentres des triangles aBD, aBC; si l'on suppose C mobile sur BD, les points M, m déterminent sur les parallèles AM', am' des ponctuelles semblables. Donc la droite Mm passe par un point fixe. Si a tend vers A, on voit que la tangente au point M de la courbe (M) passe par un point N, qui est indépendant de la distance BC, mais varie avec le point A.

4° Pour trouver le point N, nous supposons C successivement en D et au pied A'' de la hauteur AM'. La tangente à la courbe (M) sera alors, respectivement, la tangente à la circonférence ω' et la perpendiculaire abaissée de A'' sur AB.

L'angle NMB ayant même mesure que l'angle MDB, lequel est égal à NA''B, le quadrilatère NM'A''B est inscriptible. D'où l'on conclut que l'angle BNM' est droit; le lieu de N est donc la podaire de la circonférence ω'' par rapport à l'un de ses points.

Notes. 1° Si l'on prend pour axes BC et la perpendiculaire en B, les

ordonnées des points A, M satisfont à la relation $MA'' . AA'' + A''B . A''C = 0$; donc, (x, y) désignant les coordonnées de l'un de ces points, celles de l'autre sont x, $\frac{x(c-x)}{y}$, et les équations des lignes décrites simultanément par ces points sont

$$f(x, y) = 0, \quad f\left(x, \frac{x(c-x)}{y}\right) = 0,$$

ou en coordonnées cartésiennes homogènes

$$f(x, y, z) = 0, \quad f(xy, x(c-x), zy) = 0.$$

Dans le cas de la question 439, le point A parcourt une circonférence ayant pour équation

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0;$$

donc le lieu de M est représenté par

$$x\{y^2 + (c-x)^2\} - 2ay^2 - 2by(c-x) = 0.$$

Lorsque $b = 0$, $a = c$, ou que $b = 0$, $c = 0$, on voit immédiatement que le lieu est une strophoïde ou une cissoïde. (Brocard et Déprez.)

2° Les points B et C étant supposés fixes, si A est un point variable et M l'orthocentre du triangle ABC, les points A et M satisfont à une transformation quadratique, dont l'étude générale présente un grand intérêt. Lorsque A parcourt une droite quelconque, les rayons BA, CA se correspondent dans deux faisceaux projectifs; il en sera donc de même des droites AM, BM et par suite, B engendre une conique. Les droites fondamentales de la transformation quadratique, évidemment réversible, sont BC et les perpendiculaires élevées en B et C sur BC; les points fondamentaux correspondants sont le point à l'infini sur la direction perpendiculaire à BC, et les points B, C.

Lorsque A parcourt une courbe d'ordre m, le point M décrit une ligne d'ordre $2m$. Si la première courbe a un point simple en B, la ligne (M) se décompose en la droite perpendiculaire en B à BC et en une courbe d'ordre $2m - 1$; ce cas particulier comprend la question 439. (J. N.)

3° La base BC d'un triangle ABC étant fixe, on peut étudier la transformation au moyen de laquelle on passe du sommet variable A à un point remarquable quelconque du triangle. Soient M l'orthocentre, Q le milieu de AM, E le milieu de BC, O_9 le centre du cercle des neuf points. Si A décrit une droite, M décrit une conique; on en déduit que le lieu de Q est

également une conique; donc O_9, milieu de EQ parcourt une ligne de second ordre.

M. Déprez a cherché les lieux de plusieurs points remarquables du triangle ABC et l'enveloppe de certaines droites remarquables, lorsque A parcourt une droite ou une circonférence passant par B. Le défaut d'espace nous empêche de reproduire les intéressantes recherches de notre zélé correspondant. — Comparez aussi J. M. S., 1888, pp. 141-143, question 174 (DE LONGCHAMPS).

Question 689.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 176.)

Étant donné un cercle O, *on abaisse d'un point* M *de sa circonférence une perpendiculaire* MP *sur un rayon fixe* OA, *puis on prolonge* PM *de* MN = n . OP. 1° *Le lieu de* N *est une ellipse;* 2° *Trouver les axes de cette courbe;* 3° *Construire la tangente en* N.

(KEELHOFF.)

Solution par M. C. A. LAISANT. Si l'on prend pour unité le rayon du cercle, et si l'on pose OP = cos t, PM = sin t, il est clair que la longueur de MN sera $n \cos t$. Par conséquent, le lieu de N aura pour équipollence

$$(1) \qquad ON = \cos t + i(\sin t + n \cos t) = (1 + in)\cos t + i \sin t.$$

Par conséquent : 1° Ce lieu est une ellipse ayant pour demi-diamètres conjugués $1 + in$ et i, c'est-à-dire OD et OB, si l'on construit AD = n.OA et perpendiculaire à OA.

A prendre textuellement l'énoncé, il faudrait considérer aussi la courbe ayant pour équipollence $ON = (1 - in)\cos t + i \sin t$, et qui est une seconde ellipse symétrique de la première par rapport à OB. Mais

nous nous bornerons à l'ellipse (1), les propriétés de l'autre se déduisant de celle-ci, en vertu de cette symétrie.

2° Puisque OD, OB sont deux demi-diamètres conjugués, la construction classique nous montre qu'en abaissant DH perpendiculaire sur OB, et prolongeant HD en DE de sa longueur, la bissectrice OS de l'angle BOE nous donnera la direction du grand axe; le petit axe sera dirigé suivant OT perpendiculaire à OS.

Les longueurs des demi-axes sont

$$(2) \qquad a = \tfrac{1}{2}(\mathrm{OE} + \mathrm{OH}), \quad b = \tfrac{1}{2}(\mathrm{OE} - \mathrm{OH}).$$

3° Puisque $\mathrm{ON} = \mathrm{OD}\cos t + \mathrm{OB}\sin t$, la dérivée de ON par rapport à t est $-\mathrm{OD}\sin t + \mathrm{OB}\cos t$, ou

$$\mathrm{ON}' = \mathrm{OD}\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right) + \mathrm{OB}\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right).$$

Donc, en prenant OM′ perpendiculaire à OM, si nous construisons le point correspondant N′, la droite ON′ sera parallèle à la tangente en N.

On peut remarquer aussi que l'aire de l'ellipse est $\pi ab = \pi . \mathrm{OA}^2$, c'est-à-dire qu'elle est équivalente à celle du cercle.

Si F est un foyer de la courbe, les relations (2) montrent que la longueur $\mathrm{OF} = \sqrt{a^2 - b^2}$ a pour expression $\sqrt{\mathrm{OE}.\mathrm{OH}}$, c'est-à-dire que OF est moyenne proportionnelle entre les deux droites OE, OH.

Solutions par MM. Sohie, Joachimescu, Brandza, Cristesco *et* de Bőzóky. Prenons pour axes le rayon OA et une perpendiculaire OB; nous trouverons pour équation du lieu

$$(y - nx)^2 + x^2 = r^2. \qquad (A)$$

La forme de cette équation montre que les droites représentées par $x = 0$, $y = nx$ sont des diamètres conjugués. Le point B est une extrémité du premier de ces diamètres, et, si sur la tangente en A au cercle O on prend la longueur $\mathrm{AD} = nr$, D est une extrémité du second diamètre. La construction de Chasles conduit facilement à la connaissance des axes de la conique.

Les directions des axes résultent aussi très simplement de leurs équations

$$y = \left(\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4}+1}\right)x, \quad y = \left(\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4}+1}\right)x. \qquad (B)$$

En effet, si sur la tangente AD au cercle on prend une longueur

$$AC = \frac{n}{2} r = \frac{1}{2} AD,$$

puis les longueurs CS = CT = CO, les droites OS, OT seront représentées par les équations (B); ce sont donc les axes cherchés.

La tangente au point N (x, y) de la courbe (A) a pour équation

$$(Y - nX)(y - nx) + Xx = r^2.$$

On voit aisément que cette droite et la tangente au point M de la circonférence O se coupent sur OB.

Solution par Mme Prim *et* M. Jeřabek. Menons MQ perpendiculaire à OB et joignons NQ; le triangle MQN est d'espèce constante. On passe donc du lieu de M à celui de N en faisant tourner l'ordonnée de M relative à OB, d'un angle constant et en la multipliant par un nombre fixe. Cette transformation change, comme on le sait, une circonférence en une ellipse, ayant pour diamètres conjugués OB et une parallèle OD à QN; D est le point correspondant à A. Les tangentes aux points homologues M, N se coupent sur l'axe de transformation OB.

Solutions par MM. Decamps, Déprez, Lalisse, Laurens et Denys. Lorsque l'on fait varier n, les foyers et les sommets des ellipses dérivent des courbes ayant respectivement pour équations

$$x^2y^2 - r^2y^2 + r^2x^2 = 0, \quad x^4 + x^2y^2 - r^2y^2 = 0. \qquad \text{(Anonyme.)}$$

×Question 697.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 264.)

Par les sommets A, B, C *d'un triangle et par trois points* α, β, γ *pris sur les côtés* BC, CA, AB *on fait passer trois circonférences* $A\beta\gamma$, $B\gamma\alpha$, $C\alpha\beta$; *puis par* A, B, C *trois parallèles* AL, BM, CN *rencontrant ces circonférences respectivement en* L, M, N. *Démontrer que* L, M, N *sont sur une même droite avec le point* I, *commun aux trois circonférences.*

(E. Catalan.)

Solution par Mme de Haas *et* Mlle Pompilianu, MM. I. Beyens (major du génie à Cadix), Vladimirescu, Cl. Thiry, Brandza, Mandart Liénard, Sohie, de Bözóky, Cristesco, Decamps, Lalisse, Bellens, François. Les quadrilatères inscriptibles $A\beta IL$, $B\gamma IM$, $C\alpha IN$ montrent que les droites IL, IM, IN font avec la direction des trois parallèles

les mêmes angles que les droites $I\beta$, $I\gamma$, $I\alpha$ avec les côtés correspondants du triangle ABC. Or, les derniers angles sont égaux; donc IL, IM, IN sont sur la même droite.

Remarque. Le théorème proposé par M. Catalan est un cas particulier d'un théorème que M. Mannheim a énoncé dans l'*Educational Times*. Les notations étant celles qui sont adoptées ci-dessus, la proposition générale est celle-ci : *Les droites joignant* A, B, C *à un point quelconque* V *rencontrent les circonférences* $A\beta\gamma$, $B\gamma\alpha$, $C\alpha\beta$ *en trois points* L, M, N *situés sur une même circonférence passant par* V *et* I.

M. Catalan a publié d'intéressants développements sur le théorème de M. Mannheim, dans les *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei*, 1890.

Le théorème de M. Mannheim peut être généralisé : Aux cercles $A\beta\gamma$, $B\gamma\alpha$, $C\alpha\beta$, LMNVI, on peut substituer des coniques passant par les mêmes points et par deux points donnés. Une démonstration analytique de la proposition généralisée a paru dans les *Nouvelles Annales*, 1890, p 556.

M Déprez étend le théorème de M. E. Catalan à un polygone de n côtés.

×Question 698.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 264.)

Étant donnés un point A *et un angle* CBD, *trouver sur les côtés de l'angle deux points* C, D *équidistants de* A *et tels que l'angle* CAD *soit égal à un angle donné.* (F. F.)

La question est un cas particulier de ce problème classique : *Inscrire entre les côtés d'un angle donné* CBD, *un triangle* ACD *semblable à un triangle donné et ayant un sommet donné* A. Nous pouvons donc nous borner à résumer les solutions que nous avons reçues.

1° *Solution par* MM. Laurens *et* Lalisse. Soient C', D' les points où la circonférence ACD coupe une seconde fois les côtés de l'angle CBD. Les angles AC'C, AD'D sont égaux à l'angle ADC ou à son supplément, ce qui permet de déterminer les droites AC', AD' et de tracer ensuite la circonférence ACD.

2° *Solution par* M. Decamps. On peut construire une figure semblable à ACBD. Pour cela, sur les côtés d'un angle C'A'D' égal à l'angle donné, prenons deux longueurs égales A'C' = A'D' ; sur A'C' et A'D', construisons des segments capables des angles ABC, ABD; si B' est l'intersection des arcs de ces segments, faisons l'angle BAC = B'A'C', etc.

3° *Solution par* MM. Keelhoff, Déprez, Sollertinsky *et* Bellens. Soit

C_1 un point quelconque de BC; construisons l'angle C_1AD_1 égal à l'angle donné CAD et prenons sur le second côté une longueur $AD_1 = AC_1$. Lorsque C_1 parcourt la droite BC, B_1 parcourt une autre droite d, qui par son intersection avec BD détermine le point cherché D.

Si AC_1 est perpendiculaire à BC, d est perpendiculaire sur AB_1.

4° *Solution par* M. François. Soient P, Q, R, les projections de A sur BC, AD, CD. Les quadrilatères APCR, AQDR étant inscriptibles, les angles BPR, BQR sont égaux à CAR ou à la moitié de l'angle donné CAD. On tire de là un moyen de déterminer le point R.

M^me^ C. de Haas et M. Sohm ont donné de bonnes solutions trigonométriques de la même question; M. Vladimirescu, une bonne solution par la géométrie analytique.

M. Sollertinsky résout la même question en remplaçant la condition AC = AD par l'égalité $BC = m \cdot BD$. La droite CD est, dans ce cas, parallèle à une direction donnée. On sait qu'une droite CD inscrite entre les côtés d'un angle donné CBD et vue d'un point fixe A sous un angle constant enveloppe une conique qui touche BC, BD et a pour foyer le point A. Le problème revient donc à mener à une conique donnée une tangente parallèle à une droite donnée; pour cela, on peut employer le cercle principal, lieu des projections du foyer sur les tangentes. M. Déprez signale également plusieurs généralisations de la question et étend le problème à la sphère. M. Liénard donne une solution fondée sur la considération de certaines coniques.

QUESTIONS D'EXAMEN.

471. Résoudre le système

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{1}$$

$$\cos a \cos b \cdot x + \cos a \sin b \cdot y + \sin a \cdot z = 0, \tag{2}$$

$$\cos a \cos c \cdot x + \cos a \sin c \cdot y + \sin a \cdot z = 0. \tag{3}$$

Quelles valeurs faut-il attribuer à $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{tg} b$, $\operatorname{tg} c$ pour que les équations précédentes admettent comme solutions un système de valeurs de x, y, z égales entre elles, en supposant en outre que $\operatorname{tg} a = \sin \frac{1}{2}(b - c)$, et que a, b, c soient compris entre 0° et 360°. (*Baccalauréat*, Montpellier, 1889.)

Les équations (2) et (3) donnent

$$\frac{x \cos a}{\sin b - \sin c} = \frac{y \cos a}{\cos c - \cos b} = \frac{z \sin a}{\sin (c - b)},$$

ou

$$x = k \frac{\cos \frac{1}{2}(b + c)}{\cos a}, \quad y = k \frac{\sin \frac{1}{2}(b + c)}{\cos a}, \quad z = -k \frac{\cos \frac{1}{2}(b - c)}{\sin a}.$$

L'inconnue auxiliaire k se détermine au moyen de (1); on trouve

$$k = \frac{\cos a}{\sqrt{1 + \cot^2 a \cos^2 \frac{1}{2}(b-c)}}.$$

La condition $x = y = z$ s'exprime par les égalités

$$\cos \tfrac{1}{2}(b+c) = \sin \tfrac{1}{2}(b+c) = -\cot a \cos \tfrac{1}{2}(b-c),$$

d'où

$$\operatorname{tg} a = \sin \tfrac{1}{2}(b-c), \quad b+c = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(b-c) = -\sqrt{2}.$$

472. Trouver la valeur de m qui rende négatif le trinôme

$$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3(m-1)$$

pour toutes les valeurs de x. (*Baccalauréat*, Nancy, 1889.)

Les racines du trinôme égalé à zéro doivent être imaginaires, ce qui exige $m > 1$ ou < -2; de plus, le coefficient de x^2 doit être négatif, ou $m < -1$. Donc il faut poser $m < -2$.

473. Résoudre l'équation

$$\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = 0.$$

Réunir le premier et le troisième, le deuxième et le quatrième termes. Les racines sont

$$x = 0, \quad x = \pm\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

474. Démontrer que si un trinôme du second degré prend les valeurs 0, 1, 3 pour $x = 1, 2, 3$, il prend la valeur $(n-1)^2$ pour $x = n$.

(*Baccalauréat*, Besançon.)

Soit $ax^2 + bx + c$ le trinôme : faisant $x = 1, 2, 3$, on trouve

$$a+b+c = 0, \quad 4a+2b+c = 0, \quad 9a+3b+c = 0;$$

d'où

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = 1.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

***701 (Énoncé rectifié).** Soient : ABCD un rectangle inscrit dans la circonférence O; E le milieu de AD; G le point de rencontre de la circonférence avec la droite CE; F un point quelconque de la diagonale DB et K sa projectton sur AD; I le milieu du segment AK. 1° L'angle GIF = GAB. 2° Si par F on mène une parallèle à AD, rencontrant CE en N et BE en M, les cinq points F, N, D, G, T sont sur une même cir-

conférence tangente à FA. 3° Si GF rencontre en P la circonférence ABCD en P, le quadrilatère BMFP est inscriptible, et les points A, M, P sont une parallèle à FI. 4° Les droites FI, AB se rencontrent sur la circonférence circonscrite au triangle AIG. (A. C.)

707. Deux cercles de rayons R, r ont leurs centres O, o sur une droite donnée; ils sont tels qu'il y a une infinité de triangles inscrits dans le cercle O et ayant leurs côtés tangents au cercle o. Cela posé :

1° Trouver l'enveloppe du cercle de rayon r, si le cercle de rayon R est fixe.

2° Trouver l'enveloppe du cercle de rayon R si le cercle de rayon r est fixe.

3° Trouver le lieu du point de Lemoine des triangles inscrits au cercle de rayon R et dont les côtés touchent le cercle de rayon r, lorsque les deux cercles sont fixes. (E. LEMOINE.)

***708.** Dans tout triangle ABC, on a

$$(a \operatorname{tang} B - 2\gamma)(b \operatorname{tg} C - 2\alpha)(c \operatorname{tang} A - 2\beta) = -(a \operatorname{tang} C - 2\beta)(b \operatorname{tg} A - 2\gamma)(c \operatorname{tang} B - 2\alpha),$$

α, β, γ étant les rayons des cercles ex-inscrits respectivement dans les angles A, B, C. (E. GELIN.)

***709.** Si $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, on a également

$$\mathfrak{S}\frac{a^2-bc}{b+c}, \quad \mathfrak{S}\frac{b+c}{a^2-bc}=\frac{3}{abc}\mathfrak{S}a^3. \qquad \text{(LEUDESDORF.)}$$

***710.** Si la relation

$$(-r_1+r_2+r_3)(r_1-r_2+r_3)(r_1+r_2-r_3) = -8r_1r_2r_3,$$

existe entre les rayons r_1, r_2, r_3 des cercles exinscrits à un triangle, le périmètre du triangle est égal à $r_1+r_2+r_3$. (LEUDESDORF.)

711. On considère une hyperbole équilatère H et le quadrilatère formé par les tangentes aux points d'incidence des normales issues d'un même point. Démontrer que les circonférences décrites sur les diagonales du quadrilatère comme diamètres passent par le centre de H et, en ce point, sont mutuellement tangentes. (DE LONGCHAMPS.)

Rectifications. La question 676 est inexacte. Nous publierons prochainement les communications que nous ont adressées à ce sujet MM. Jamet et Laisant.

*SUR LES QUADRANGLES COMPLETS;

par M. J. Neuberg.

(Suite, voir *Mathesis*, pp. 33, 67.)

7. Étant donné le quadrangle $O_aO_bO_cO_d$, qui a pour sommets les centres des cercles BCD, CDA, .. , comment peut-on retrouver le quadrangle ABCD ?

Dans le triangle BDC, la hauteur issue de D et le rayon DO_a du cercle circonscrit sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle BDC; par suite, les droites O_aO_d et O_aD sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle $O_bO_aO_c$ dont les côtés sont perpendiculaires à ceux de l'angle BDC. On conclut de là que les points D, O_d sont conjugués isogonaux (inverses) par rapport au triangle $O_aO_bO_c$; on peut donc énoncer le théorème suivant :

Étant donné un quadrangle complet $O_aO_bO_cO_d$, ***si l'on détermine l'inverse de chaque sommet par rapport au triangle formé avec les trois autres sommets, on obtient un nouveau quadrangle*** ABCD ***tel, que les points*** O_a, O_b, ... ***sont les centres des cercles circonscrits aux triangles*** BCD, CBA, ...

8. Soient D_a, D_b, D_c les projections de D sur les côtés du triangle ABC; A_b, A_c, A_d les projections de A sur les côtés CD, DB, BC du triangle BCD; et ainsi de suite. Soient aussi R_a, R_b, ... les rayons des cercles circonscrits aux triangles BCD, CDA, ..., et ρ_a, ρ_b ..., les rayons des cercles circonscrits aux triangles $A_bA_cA_d$, $B_cB_dB_a$, ...

AD étant le diamètre du cercle circonscrit au triangle AD_bD_c, on a

$$D_bD_c = AD \sin BAC = \frac{AD \cdot BC}{2R_d},$$

et par analogie

$$D_cD_a = \frac{BD \cdot CA}{2R_d}, \quad D_aD_b = \frac{CD \cdot AB}{2R_d}.$$

D'où

$$\frac{D_bD_c}{AD \cdot BC} = \frac{D_cD_a}{BD \cdot CA} = \frac{D_aD_b}{CD \cdot AB}.$$

Nous appelons ***triangle associé à un quadrangle complet*** ABCD, le triangle dont les côtés ont pour mesures les produits des côtés opposés

du quadrangle. Les formules précédentes montrent que *le triangle podaire d'un sommet d'un quadrangle complet par rapport au triangle des trois autres sommets est semblable au triangle associé au quadrangle; et que les côtés homologues des quatre triangles podaires sont proportionnels aux inverses des rayons des cercles circonscrits aux triangles ayant trois sommets communs avec le quadrangle.*

On a donc les égalités

$$\rho_a R_a = \rho_b R_b = \rho_c R_c = \rho_d R_d.$$

●. Voici une autre construction du triangle associé au quadrangle. Les droites AD, BD, CD rencontrent la circonférence ABC en trois nouveaux points M, N, P; soit p_d la puissance de D par rapport à la circonférence. Les triangles semblables NDP, CDB donnent

$$NP = \frac{BC \cdot ND}{CD} = \frac{BC \cdot ND \cdot BD \cdot AD}{CD \cdot BD \cdot AD} = BC \cdot AD \frac{p_d}{CD \cdot BD \cdot AD},$$

Par analogie

$$PM = CA \cdot BD \cdot q, \quad MN = AB \cdot CD \cdot q$$

q désignant le rapport $p_d : AD \cdot BD \cdot CD$. Le triangle MNP est donc semblable au triangle associé, et le rapport de similitude est égal à q.

On déduit de là un théorème assez curieux dû à VON STAUDT. L'aire du triangle MNP est égale $q^2 T$, T désignant l'aire du triangle associé; elle est aussi égale à

$$\frac{MN \cdot NP \cdot MP}{4R_d} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA \cdot AD \cdot BD \cdot CD \cdot q^3}{4R_d} = ABC \cdot AD \cdot BD \cdot CD \cdot q^3.$$

En égalant les deux valeurs de l'aire, on trouve

$$T = ABC \cdot AD \cdot BD \cdot CD \cdot q = ABC \cdot p_d.$$

D'après cela,

$$T = \alpha \cdot p_a = \beta \cdot p_b = \gamma \cdot p_c = \delta \cdot p_d.$$

Par conséquent : *Étant donné un quadrangle complet, le produit de l'aire d'un triangle qui a trois sommets communs avec le quadrangle, par la puissance du cercle circonscrit par rapport au sommet restant est constant et égal à l'aire du triangle associé au quadrangle.*

Pour une démonstration analytique de cette proposition, voir *Mathesis*, t. III, p. 30. (*A continuer.*)

AIRE DE L'ELLIPSE MICROSPHÉRIQUE ;

par M. C. E. WASTEELS, professeur agrégé.

1. J'appelle *ellipse microsphérique* la figure inverse d'une ellipse plane par rapport à un point situé sur la perpendiculaire élevée par le centre au plan de la conique.

Soient AA′, BB′ les axes et O le centre d'une ellipse plane. Décrivons une sphère quelconque de O comme centre, menons le diamètre SS_1 perpendiculaire au plan ABA′, et cherchons l'intersection de la sphère avec le cône qui a pour sommet S et pour base l'ellipse : la courbe $A_1B_1A'_1B'_1$ ainsi obtenue est une ellipse microsphérique.

2. Nous fixons un point quelconque M de l'ellipse plane par ses coordonnées polaires $r = \mathrm{OM}$, $\theta = \mathrm{MOA}$, et le point correspondant M_1 de l'ellipse microsphérique par ses *coordonnées polaires* $r_1 = S_1M_1$, $\theta = \mathrm{MOA}$. Les triangles semblables SOM, SM_1S_1 donnent

$$r = \frac{\mathrm{R}r_1}{\sqrt{4\mathrm{R}^2 - r_1^2}}, \quad r_1 = \frac{2\mathrm{R}r}{\sqrt{\mathrm{R}^2 + r^2}},$$

R étant le rayon de la sphère.

L'équation de ABA′B′ étant

$$r^2(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta) = a^2b^2,$$

celle de $A_1B_1A'_1B'_1$ sera

$$\mathrm{R}^2r_1^2(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta) = 4\mathrm{R}^2a^2b^2 - r_1^2a^2b^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

ou

$$r_1^2[(\mathrm{R}^2 + b^2)a^2 \sin^2\theta + (\mathrm{R}^2 + a^2)b^2 \cos^2\theta] = 4\mathrm{R}^2a^2b^2.$$

Le maximum et le minimum de r_1 correspondent respectivement à $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire aux axes OA, OB de l'ellipse plane; en les désignant par a_1, b_1, on a

$$a_1^2 = \frac{4\mathrm{R}^2a^2}{\mathrm{R}^2 + a^2}, \quad b_1^2 = \frac{4\mathrm{R}^2b^2}{\mathrm{R}^2 + b^2},$$

et l'équation de l'ellipse microsphérique prend la forme

$$r_1^2 (a_1^2 \sin^2\theta + b_1^2 \cos^2\theta) = a_1^2 b_1^2. \qquad (1)$$

3. Soit σ l'aire d'une portion de sphère, comprise entre la courbe ayant pour équation $r_1 = f(\theta)$, et deux arcs de grand cercle S_1C, S_1M_1. Si r_1, θ sont les coordonnées de M_1, et r'_1, θ'_1 celles d'un point N_1 voisin de M_1 sur la courbe, l'aire $S_1M_1N_1$ est égale à l'aire comprise entre les grands cercles S_1M_1, S_1N_1 et l'arc de petit cercle décrit de S_1 comme pôle, avec un rayon r_3 intermédiaire entre r_1 et r_2. La zone entière qui correspond à ce cercle a pour mesure πr_3^2; par suite,

$$\frac{S_1M_1N_1}{\pi r_3^2} = \frac{\theta' - \theta}{2\pi}, \quad \text{et} \quad S_1M_1N_1 = \tfrac{1}{2} r_3^2 (\theta' - \theta),$$

formule identique à celle qui existe pour la courbe plane ayant pour équation $r_1 = f(\theta)$.

Il résulte de là que l'ellipse microsphérique a la même aire que l'ellipse plane ayant l'équation (1), c'est-à-dire

$$\pi a_1 b_1 = \frac{4\pi R^2 ab}{\sqrt{(R^2 + a^2)(R^2 + b^2)}}.$$

REMARQUE. Nous pouvons, d'une manière générale, appeler conique microsphérique l'inverse d'une conique plane par rapport à un point quelconque extérieur à son plan.

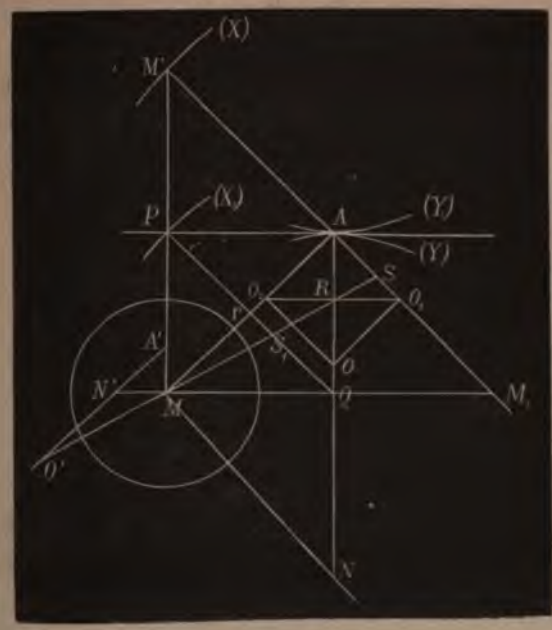
La propriété démontrée ci-dessus ne constitue pas la seule analogie qui existe entre les coniques planes et les coniques microsphériques : les théorèmes relatifs aux angles et en général, tous les théorèmes qui n'impliquent pas la considération de longueurs ou de surfaces subsistent pour les figures microsphériques (Voir l'*Annuaire scientifique du cercle des normaliens*, 1888, p. 92).

SUR LA COURBURE DE LA PODAIRE ET DE LA POLAIRE RÉCIPROQUE D'UNE COURBE DONNÉE;

par M. CL. SERVAIS, professeur à l'Université de Gand.

1. Le lieu des projections P d'un point M sur toutes les tangentes à une courbe (Y), est une courbe (X_1) qu'on appelle la *podaire* du point M par rapport à la courbe (Y). Soit A un point de la courbe (Y), (Y_1) la courbe symétrique de (Y) par rapport à la tangente au point A; si la

courbe (Y_1) roule sur (Y), le point M′ symétrique de M par rapport à la tangente au point A, lié invariablement à (Y_1), décrit une certaine courbe (X). Mais, dans ce mouvement, le point M′ reste constamment le symétrique de M, par rapport à la tangente au point instantané de contact; donc les deux courbes (X) et (X_1) sont homothétiques.



2. Soient R et ρ les rayons de courbure AO et M′S des courbes (Y) et (X); φ l'angle MAO, n la distance M′A; on sait que

$$\rho = \frac{2n^2}{2n - R\cos\varphi} \text{ (*)}. \qquad (1)$$

Les deux courbes (X) et (X_1) étant homothétiques, le rayon de courbure R_1 de (X_1) sera donné par la formule

$$R_1 = \frac{n^2}{2n - R\cos\varphi}. \qquad (2)$$

Soient Q et N les points d'intersection de AO, respectivement avec la

(*) MANNHEIM, *Géométrie descriptive* (2me édition), p. 177. Voir aussi notre note *Sur les centres de courbure*, BB. (3), XIX, p. 145.

normale à la courbe (X_1) et la perpendiculaire élevée au point M sur AM. Les droites AN et PQ seront les normales polaires N et N_1 des deux courbes (Y) et (X_1). Or

$$PQ = n, \quad AN\cos\varphi = n;$$

par conséquent, la formule (2) peut se mettre sous la forme

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{R}{N} = 2. \tag{3}$$

Si l'on prend la podaire de (X_1) ou la deuxième de (Y), et qu'on appelle N_2 et R_2 la normale polaire et le rayon de courbure de cette courbe, on a

$$\frac{N_2}{R_2} + \frac{R_1}{N_1} = 2;$$

ou, en remplaçant $\frac{R_1}{N_1}$ dans (3) par sa valeur tirée de l'égalité précédente,

$$2\left(\frac{N_2}{R_2} + \frac{R}{N}\right) - \frac{N_2}{R_2}\cdot\frac{R}{N} = 3.$$

Pour la $p^{ième}$ podaire de (Y) on a par analogie

$$p\left(\frac{N_p}{R_p} + \frac{R}{N}\right) - (p-1)\frac{N_p}{R_p}\cdot\frac{R}{N} = p + 1. \tag{4}$$

Voici une application assez remarquable de cette formule : *Si on prend la $p^{ième}$ antipodaire d'une droite, son rayon de courbure est lié à la normale polaire par l'égalité*

$$R = \frac{p+1}{p}N.$$

Cette relation est la généralisation de cette propriété connue de la parabole,

$$R = 2N.$$

3. Soit M_1 le symétrique de M′ par rapport au point A, O_1 la projection de O sur AM_1 ; l'égalité (1) donne

$$\frac{2}{AO_1} = \frac{1}{AM_1} + \frac{1}{AS}, \quad \text{ou} \quad (AO_1M_1S) = -1.$$

Si l'on coupe le faisceau M (AO_1M_1S) par une perpendiculaire abaissée de O_1 sur AO, le point de rencontre R de cette droite avec MS sera le milieu des deux points d'intersection O_1 et O_2 de cette même droite avec

MO_1 et MA ; donc R est situé sur AO. Donc, si on projette O en O_2 sur AM et O_2 en R sur AO, la droite MR passe par le centre de courbure S, et aussi par le centre de courbure de la podaire.

4. La polaire réciproque d'une courbe (Y) par rapport à un cercle de centre M est l'inverse de la podaire du point M par rapport à (Y). Soit A' le pôle de la tangente au point A à la courbe (Y); la tangente en ce point A' à la polaire réciproque sera la polaire du point A ; donc la normale en A' sera parallèle à AM. Les centres de courbure de deux courbes inverses étant en ligne droite avec le pôle d'inversion, la droite MR coupe la normale en A' au centre de courbure O' de la polaire réciproque. De la similitude des triangles A'O'M, ARM, on tire

$$\frac{A'O'}{AM} = \frac{A'M}{AR} \quad \text{ou} \quad A'O' = A'M \cdot \frac{AM}{AR}.$$

Soit a le rayon du cercle M ; on a

$$A'M \cdot MP = a^2;$$

puis

$$A'O = a^2 \frac{AM}{MP} \frac{1}{AR} = \frac{a^2}{AR \cos\varphi} = \frac{a^2}{AO \cos^2\varphi}.$$

Donc si l'on appelle R' le rayon de courbure de la polaire réciproque, on a la formule :

$$RR' \cos^3\varphi = a^2 (*). \tag{5}$$

La même relation existe entre les normales polaires quand M est le pôle des coordonnées. On a en effet,

$$N = AN = \frac{AM}{\cos\varphi} = \frac{MP}{\cos^2\varphi} = \frac{a^2}{A'M \cos^2\varphi} = \frac{a^2}{A'N' \cos^3\varphi} = \frac{a^2}{N' \cos^2\varphi};$$

donc

$$NN' \cos^3\varphi = a^2. \tag{6}$$

Les relations (5) et (6) donnent

$$RR' = NN' (**). \tag{7}$$

(*) *Liouville*, 1866, p. 193 (MANNHEIM).

(**) *Mathesis*, t. VIII, p. 7 (D'OCAGNE). Le présent travail a été remis à la rédaction avant la publication de la formule de M. d'Ocagne (P. M.).

En combinant les égalités (3) et (7) on obtient :

$$\frac{N_1}{R_1}+\frac{N'}{R'}=2(*), \qquad (8)$$

relation entre les normales polaires et les rayons de courbure de deux courbes inverses.

SUR UNE CORRESPONDANCE DE DROITES ET DE POINTS;

par M. Aug. Poulain, à Angers.

1. Salmon a fait remarquer(**) qu'en coordonnées cartésiennes, la droite représentée par $\Delta \equiv ax+by+1=0$ est la polaire du point $x=a, y=b$ par rapport à l'ellipse imaginaire qui a pour équation $x^2+y^2+1=0$. Cette correspondance permet de donner, de la manière la plus simple, un corrélatif à tout théorème de position.

Il est utile d'en faire autant dans la géométrie du triangle. On semble ne s'y être préoccupé que de la correspondance entre une droite et le point harmoniquement associé ; ce qui est moins simple.

Soit un point M défini par les équations $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$; ses coordonnées trilatères générales (ce qui comprend les coordonnées barycentriques, normales, etc.) sont donc l, m, n. La droite qui a pour équation $\Delta \equiv lx+my+nz=0$, est la polaire de M par rapport à l'ellipse imaginaire *fixe* représentée par $x^2+y^2+z^2=0$. Cette conique est conjuguée à ABC; en coordonnées barycentriques ou normales, son centre est G ou K.

2. Signalons quelques conséquences de la propriété fondamentale :

1° Si M parcourt une droite Δ', sa polaire Δ passe par un point fixe, qui est le pôle de Δ'.

2° Si M décrit une conique, sa polaire Δ a pour enveloppe une autre conique(***).

3° Le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite est le

---

(*) N. A. M., 1866, (2), V, p. 169 (Nicolaïdès) et aussi *Mathesis*, 1884, IV, p. 77 (d'Ocagne).

(**) Salmon-Chemin, *Sections coniques*, n° 321.

(***) Voir dans Salmon la méthode pour trouver l'équation de cette enveloppe (n° 321).

même que celui de leurs polaires. Cet énoncé donne sans calcul le rapport anharmonique des droites ayant pour équations $\Delta = 0$, $\Delta_1 = 0$, $\Delta + K\Delta_1 = 0$, $\Delta + K'\Delta_1 = 0$; on sait qu'il égale $K : K'$.

4° Un triangle quelconque est homologique avec le triangle qui a pour côtés les polaires des sommets du premier triangle.

5° Si deux triangles MM'M'', PP'P'' sont homologiques, il en est de même de ceux qui sont formés par les pôles de leurs côtés. Le centre Q d'homologie d'un des systèmes a pour polaire l'axe d'homologie R de l'autre système. En effet la droite MP passant par Q, les polaires de M et de P se coupent sur R. On peut en dire autant des trois couples de points homologues. Donc les triangles du second système ont R pour axe d'homologie.

6° Comme les propriétés précédentes (y compris la propriété fondamentale) sont projectives, elles subsistent si l'on transforme homographiquement M, Δ (et la conique fondamentale).

7° Si on transforme homographiquement M, *sans modifier* Δ, les corollaires restent vrais, quoique la propriété fondamentale ne subsiste plus en général. En un mot, Δ ne reste pas la polaire de M' par rapport à une conique fixe. Car soit $f(x, y, z) = 0$ la conique qu'il faudrait prendre. Pour identifier Δ avec la polaire de M', il faudrait qu'on eût

$$\frac{l}{f_{l'}} = \frac{m}{f_{m'}} = \frac{n}{f_{n'}}.$$

Or cette transformation est homographique, mais n'est pas générale, car elle ne contient que cinq coefficients arbitraires au lieu de huit.

Toutefois les corollaires 1, 2, 3, 5 subsistent. En effet, si, par exemple, le transformé M' de M décrit une conique, nous avons vu (6°) que la transformée Δ' de Δ a pour enveloppe une conique. Donc il en est de même de Δ.

On verrait de même qu'en conservant M, on peut, pour les corollaires précédents, substituer à Δ sa transformée homographique.

En coordonnées cartésiennes rectangulaires, on a de plus une propriété métrique. La conique fondamentale se réduisant alors au cercle $x^2 + y^2 + 1 = 0$, l'angle de deux droites Δ, Δ' est égal ou supplémentaire à l'angle sous lequel on voit, de l'origine, les deux pôles.

3. *Application de ce principe de dualité.* Si l'on demande de prouver que trois droites sont concourantes, on ramène la question à prouver que trois points M, M', M'' sont en ligne droite. Or, pour cela, on a un

théorème de M. Brocard : la condition nécessaire et suffisante(*) est qu'en coordonnées trilatères absolues, deux des différences $x - x'$, $x' - x''$, $x'' - x$ aient un rapport symétrique relativement à a, b, c (J. M. E., 1883, p. 251).

4. Étant donnés deux points M', M'', on rencontre souvent le point dont les coordonnées trilatères sont $y'z'' - z'y''$, $z'x'' - x'z''$, $x'y'' - y'x''$. Par exemple, en coordonnées barycentriques, et pour les isobariques du point de Lemoine, c'est $b^2c^2 - a^4$, ...

On voit que ce point est le pôle de M'M''. Dès lors, c'est aussi l'intersection des polaires de M' et M''.

5. Si, par B et C, on mène les transversales angulaires de M' et M'' et qu'on joigne diagonalement les pieds de ces droites sur AC et BC, on a un point M_a dont les coordonnées trilatères sont

$$x : y : z = \frac{x''^2y'z' - x'^2y''z''}{x'x''y'y''z'z''} : \left(\frac{1}{x'z''} - \frac{1}{x''z'}\right) : \left(\frac{1}{x'y''} - \frac{1}{y'x''}\right),$$

et qui, d'après le théorème de Pascal, est situé sur M'M''. On voit que le rapport $y : z$ changé de signe est formé avec deux coordonnées du pôle de la droite qui joint les inverses (pris dans ce système) de M' et M''.

QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

1. Soient AA', BB', CC' les hauteurs d'un triangle ABC, H leur point de concours, M un point quelconque de la droite B'C'. Démontrer que les perpendiculaires abaissées de B sur CM et de C sur BM rencontrent AH en deux points B_1, C_1 symétriques par rapport au milieu de AH.

(D'OCAGNE.)

En effet, lorsque M parcourt B'C', les droites BM et CM engendrent deux faisceaux projectifs; il en est donc de même de BB_1 et CC_1, et les points B_1, C_1 se correspondent dans deux ponctuelles projectives. Ces ponctuelles sont même en involution; car, lorsqu'on place M en B' ou C', on voit que A et H forment un couple permutable. Le point à l'infini sur AH est un point double de l'involution, qui correspond au point M situé

(*) Il est sous-entendu que les trois coordonnées de chacun des trois points sont de la forme $f(a, b, c)$, $f(b, c, a)$, $f(c, b, a)$. (J. N.).

à l'intersection de B'C' avec BC ; le second point double est le milieu de la distance de deux points conjugués quelconques de l'involution. (J. N.)

2. On donne deux points A, B et une droite d. Un point M se meut sur d. La conjuguée harmonique de d par rapport à l'angle AMB passe par un point fixe. (MEURICE.)

3. Par les sommets B, C d'un triangle ABC on fait passer une circonférence quelconque, coupant AB en C', AC en B'. Trouver 1° le lieu du point de rencontre E des droites BB', CC' ; 2° l'enveloppe de la droite joignant E au point de rencontre F de BC avec la droite B'C'.

1° Les angles BC'C, BB'C étant égaux, la différence des angles B'BC, C'CB est constante ; donc E décrit une hyperbole équilatère circonscrite à ABC, ayant son centre au milieu de BC et ses asymptotes parallèles aux bissectrices de l'angle BAC. 2° La droite B'C' a une direction fixe. Les droites FA, FE, FB', FB forment un faisceau harmonique et, par suite, déterminent sur la parallèle menée par A à B'C' deux segments égaux ; il résulte de là que EF passe par un point fixe de cette parallèle. (MEURICE.)

4. Soient B, C deux points fixes et A un point mobile d'une circonférence O. La perpendiculaire au milieu m de BC coupe la circonférence aux points D, D', et la droite BA au point E. Par E, on mène une droite EX parallèle à BC ; appelons M, N, P, Q les points où EX rencontre le côté AC, la bissectrice AD, la médiane Am et la hauteur AH du triangle ABC. Trouver les lieux de ces points. (MEURICE.)

1° M est à l'intersection de deux rayons homologues de deux faisceaux projectifs ayant leurs centres en C et au point à l'infini sur BC. Soit I ce dernier point ; la tangente en I (asymptote) est la position de EX qui correspond à CA confondu avec CB, ou à E situé à l'intersection de mO avec la tangente en B au cercle O. La direction de la seconde asymptote s'obtient en supposant EX à l'infini ou BA parallèle à mO ; donc une asymptote est parallèle à CO. La courbe (M) rencontre la circonférence en D, D' et la touche en C.

2° N est à l'intersection de deux rayons homologues de deux faisceaux projectifs ayant leurs sommets en D et I ; en faisant coïncider A avec D, on trouve que la droite qui joint les sommets des deux faisceaux est sa propre homologue. Donc le lieu de N est une droite. Ce résultat peut aussi se déduire du quadrilatère inscriptible D'ANE (les angles D'EM, D'AN sont droits) : les angles ED'N, EAN étant égaux, N est sur la droite D'C.

3° P est l'intersection de deux rayons homologues EX, mA de deux faisceaux ayant pour sommets I et m. Ces faisceaux ne sont pas projectifs; car sur une droite menée par m et rencontrant la circonférence O aux points A, A', nous trouvons deux points du lieu (P), correspondant aux triangles ABC, A'BC. Le lieu proprement dit est cependant une conique; car lorsqu'on fait coïncider A avec C, on peut dire que les rayons EX, mA coïncident et que la droite entière BC se sépare du lieu; ou mieux, que le point P a pour limite le milieu de mC, lorsque mA tend vers mC. Le lieu est une hyperbole dont une asymptote est parallèle à BC et dont l'autre est parallèle à la droite joignant m au point diamétralement opposé à C. Si BC est un diamètre du cercle O, le lieu de P est une parabole ayant pour foyer O et pour directrice la tangente en C au cercle O.

4° Le point Q est à l'intersection des rayons homologues EX, AH de deux faisceaux dont les centres sont les points I, J situés à l'infini sur BC et mO. Sur une perpendiculaire à BC qui rencontre la circonférence O aux points A, A', nous trouvons trois points Q, savoir : deux qui correspondent aux triangles ABC, A'BC, et le point J qui correspond au triangle ayant pour sommets B, C et le point diamétralement opposé à C. Le lieu de Q est donc une cubique. Si BC est un diamètre du cercle O, Q décrit une *courbe d'Agnesi*.

NOTES MATHÉMATIQUES.

1. *Soustraction des nombres fractionnaires, lorsque la fraction à soustraire est plus grande que celle dont il faut la soustraire.* Soit à soustraire $5\frac{25}{27}$ de $9\frac{8}{27}$. Au lieu de dire : 27 et 8, 35; 23 de 35, 12, il est plus simple de dire : 23 de 27, 4, et 8, 12; ce qui revient à remplacer $\frac{27}{27}+\frac{8}{27}-\frac{25}{27}$ par $\frac{27}{27}-\frac{25}{27}+\frac{8}{27}$. (E. Gelin.)

2. *Courbes enveloppes et courbes tangentes.* Il est utile de distinguer, en géométrie infinitésimale, les lignes *enveloppes* et les lignes *tangentes* à un système $F(x, y, c) = 0$ de courbes données. Les enveloppes ne sont pas toujours des lignes tangentes et les lignes tangentes ne sont pas toujours des *enveloppes*. Ainsi, la droite $x = 0$ est tangente aux courbes $y = c + (\log x)^{-1}$, qui n'ont pas d'enveloppe, et est une enveloppe des courbes $(y - c)^3 = x^5$, sans leur être tangente. Ces dernières courbes n'ont d'ailleurs pas de ligne tangente commune. (P. M.)

3. *Points caractéristiques.* L'énoncé de plusieurs propriétés des enveloppes d'un système $F(x, y, c) = 0$ de courbes données, se simplifie si l'on appelle *point caractéristique* d'une enveloppée $F(x, y, c) = 0$, la limite du point d'intersection de cette courbe avec l'enveloppée voisine $F(x, y, c') = 0$, quand c' tend indéfiniment vers c. (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 418.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 47.)

Soient a_1, a_2, ..., a_i, des droites passant par un point fixe A, *et supposons ce faisceau de droites lié à un plan qui se déplace sur lui-même. Soient* O *le centre instantané de rotation,* (C) *le centre des cercles. A la droite a_i correspond une conique (a_i) lieu géométrique des centres de courbure des trajectoires des points de a_i. Soit* M *le point d'intersection de (a_i) avec une droite passant par le centre instantané* O *et faisant avec a_i, un angle constant* φ. *Démontrer que le lieu géométrique du point* M *est une strophoïde qui a son point double en* O, *et dont les cercles osculateurs en* O *sont* 1° *la circonférence des centres* (C); 2° *le segment capable de l'angle* φ *décrit sur* OA. (E. Dewulf.)

Solution par M. Cl. Servais. Il suffit de faire voir que le lieu des centres de courbure des trajectoires décrites par les points du segment (OA) capable de l'angle φ, et décrit sur OA, est une cubique nodale circulaire, ayant pour cercles osculateurs au point double O, la circonférence des centres (C) et le segment (OA). Cette cubique n'est d'ailleurs une strophoïde, que dans le cas où le segment (OA) coupe orthogonalement le cercle (C).

Soit M_1 un point du segment (OA), M le centre de courbure correspondant, μ le point de rencontre de la droite OM avec le cercle (C). On a :

$$\frac{1}{OM_1} + \frac{1}{OM} = \frac{1}{O\mu};$$

donc si on décrit un cercle (C_1), ayant pour rayon le diamètre du cercle (C) et tangent à ce cercle, le point M_1' symétrique de M_1 par rapport à O, et le centre de courbure M sont conjugués par rapport à ce cercle (C_1). Par conséquent : *Pour une position de la figure mobile, le lieu des*

centres de courbure des trajectoires décrites par les points d'une courbe (M), *est la transformée birationnelle quadratique de troisième espèce (quasi inversion linéaire) de la courbe* (M_1) *symétrique de* (M) *par rapport au centre instantané.*

Si la courbe (M) est un cercle (OA) passant par O, le lieu des centres de courbure sera une cubique, ayant pour point double le point O; les tangentes à la courbe en ce point seront les tangentes aux cercles (C) et (OA). Les points d'intersection du cercle (C_1) et du symétrique $(OA)_1$, du cercle (OA) par rapport à O, étant situés sur la cubique, cette dernière sera une courbe circulaire.

Le cercle (C), qui, dans la transformation, correspond aux points à l'infini du plan, ne rencontrera la cubique qu'au point double O et aux points cycliques, quatre points d'intersection seront donc confondus en O et le cercle (C) sera osculateur à la cubique en ce point.

Les deux points M_1 et M ne pouvant jamais coïncider, le cercle (OA) ne peut rencontrer la cubique qu'au point double O et aux points cycliques; C est donc le second cercle osculateur à la cubique au point double.

Considérons le cercle (C_2) symétrique du cercle (C) par rapport au point O; ce cercle sera le lieu des points d'inflexion, pour une position de la figure mobile. Soit L le point de rencontre des deux cercles (C_2) et (OA); la droite OL sera parallèle à l'asymptote de la cubique, car le centre de courbure de la trajectoire décrite par L est à l'infini. On a donc cette propriété : *En un point double d'une cubique nodale circulaire, la corde d'intersection d'un cercle osculateur avec le symétrique du second par rapport au point double, est parallèle à l'asymptote.*

Soit K le point commun aux cercles (C_1) et $(OA)_1$; ce point étant son conjugué par rapport au cercle (C_1), sera sur la cubique. Donc, *si en un point double d'une cubique nodale circulaire, on décrit un cercle tangent ayant pour rayon le diamètre de l'un des cercles osculateurs, ce cercle rencontre le symétrique du second cercle osculateur par rapport au point double, en un point appartenant à la cubique.*

×Question 532.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 192 et (I) 1, p. 30.)

Soient $u, v, w, \ldots$ ***les facteurs*** PREMIERS ***de*** n, ***supérieurs à*** 2. ***Le nombre des*** NOMRRES TRIANGULAIRES, ***premiers avec*** n, ***inférieurs à*** $2n(n+1)$ ***est***

$$n\left(1-\frac{2}{u}\right)\left(1-\frac{2}{v}\right)\left(1-\frac{2}{w}\right)\cdots$$

ou bien le double de ce nombre suivant que n ***est*** PAIR ***ou*** IMPAIR.

(E. CESÁRO.)

Solution par M. EMMERICH. Posons, pour abréger, $C_{p,2} = T_p$; $T_2, T_3, \ldots$ sont les nombres triangulaires. Comme

$$T_{2n+1} < 2n(n+1) < T_{2n+2},$$

il faut chercher combien des nombres

$$T_2, T_3, T_4, \ldots, T_{2n+1} \tag{1}$$

sont premiers avec n. A cet effet, nous éliminons de la suite (1) les termes divisibles par l'un des nombres $2, u, v, \ldots$

Soit d'abord n impair. Pour que $T_p = \frac{1}{2}p(p-1)$ soit divisible par le nombre premier $u > 2$, l'un des nombres $p, p-1$ doit être multiple de u. Donc les termes de la suite (1) qui admettent le facteur u sont

$$T_u, T_{u+1}, T_{2u}, T_{2u+1}, \ldots, T_{2u,2u+1}; \tag{2}$$

ils sont au nombre de $2.\ \frac{2n}{u} = \frac{4n}{u}$. Le nombre des termes de la suite (1) qui sont premiers avec u est donc $2n - \frac{4n}{u} = 2n\left(1-\frac{2}{u}\right)$.

On verrait de la même manière que les termes de la suite (1) qui sont divisibles par v sont

$$T_v, \quad T_{v+1}, \quad T_{2v}, \quad T_{2v+1}, \quad \ldots, \quad T_{2v,2v+1}; \tag{3}$$

ils sont au nombre de $\frac{4n}{v}$.

Les suites (2) et (3) ont des termes communs, qui correspondent aux solutions des équations

$$ux = vy, \quad ux+1 = vy+1, \quad ux = vy+1, \quad ux+1 = vy.$$

Or, parmi les nombres de la forme ux, inférieurs à $2n$, il y en a

$\frac{2n}{uv}$ divisibles par y; de même, parmi ceux de la forme $ux - 1$, ou de la forme $ux + 1$, il y en a $\frac{2n}{uv}$ divisibles par y. Donc il y a $\frac{8n}{uv}$ termes appartenant à la fois aux deux suites (2) et (3).

Il résulte de là que parmi les nombres (1), il y en a

$$2n - \frac{4n}{u} - \frac{4n}{v} + \frac{8n}{uv} = 2n\left(1 - \frac{2}{u}\right)\left(1 - \frac{2}{v}\right)$$

qui sont premiers avec u et v.

En continuant de la sorte, on arrive au théorème proposé, pour le cas de n impair.

Considérons maintenant le cas de n pair. Le nombre T_p est divisible par 2, lorsque p ou $p - 1$ est divisible par 4; donc les raisonnements à faire pour tenir compte des facteurs 2 de n sont les mêmes que pour les facteurs u, v, ... avec cette différence que le nombre 4 se substitue au facteur premier 2. Par suite, la réponse est maintenant

$$2n\left(1 - \frac{2}{4}\right)\left(1 - \frac{2}{u}\right)\left(1 - \frac{2}{v}\right)\cdots = n\left(1 - \frac{2}{u}\right)\left(1 - \frac{2}{v}\right)\cdots.$$

Question 590.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 240.)

Construire une conique osculatrice à un cercle donné en un point donné A, ***connaissant la corde idéale commune à la conique et au cercle infiniment petit*** A. (E. Dewulf.)

Solution par M. Servais. La corde commune est parallèle à la corde de courbure au point A. Donc, si par ce point, on mène une parallèle à la corde donnée, elle coupera le cercle donné en un point D appartenant à la conique demandée. Soit H le point de rencontre de la tangente au point A avec la corde commune, O le pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur cette corde. La polaire du point H par rapport à la conique, coupera la corde en un point B tel que $HB \cdot HO = \overline{HA}^2$. Ce point B sera donc à l'intersection de la corde donnée avec un cercle passant par le point O et tangent au point A au cercle donné. Joignons HD, soit d le point de rencontre de AB et HD; le point D′ tel que

(DD'Hd) = — 1 appartiendra à la conique. Pour obtenir autant de points de la conique qu'on le voudra, il suffit de chercher la transformée quadratique de troisième espèce de la conique, le pôle de la transformation étant le point A, et la conique fondamentale, le cercle tangent intérieurement au point A au cercle donné et ayant un rayon double. Cette transformée est une droite passant par le point D'' correspondant du point D', et parallèle à AD(*).

Solution par M. A. Demoulin. Prenons pour axes la tangente et la normale en A au cercle. L'équation de la conique est de la forme

$$x^2 + (Ay + Bx + C)\,y = 0. \qquad (1)$$

Pour tout point de la conique tel que

$$Ay + Bx + C = y, \qquad (2)$$

on a la relation

$$x^2 + y^2 = 0.$$

L'équation (2) est donc celle de la corde considérée dans l'énoncé. Cette droite est parallèle à la corde de courbure en A. Il suit d'ailleurs, de l'équation (1), que

$$Ay + Bx + C = 0$$

est l'équation de la tangente à la conique au point normal N. Dès lors, cette droite et la droite (2) se coupent en un point I de l'axe des x. De là résulte cette construction de la conique. La droite (2) étant donnée, menons parallèlement à cette droite, par le point A, une sécante qui coupe le cercle donné au point de courbure R. Joignons IR qui rencontre AN en s et déterminons, sur cette droite, le point R' conjugué harmonique de R par rapport aux points I et s. Il suffira, à cet effet, de faire l'angle R'As = l'angle sAR. Il s'agit donc maintenant de construire une conique ayant trois points confondus en A et passant par les points R et R'. Or ce dernier problème a été résolu par M. Cl. Servais dans le n° de janvier 1888 de ***Mathesis***.

(*) Voir *Applications de la transformation quadratique*. *Mathesis*, t. VIII, p. 28.

Question 675.

(Voir *Mathesis*, t. X, pp. 48 et 258.)

Le rapport anharmonique de quatre points A, B, C, D *d'une conique est égal à la racine carrée du rapport anharmonique du faisceau* P(ABCD), *qui a pour centre le pôle* P *de la corde* AB. (G. Tarry.)

Solution par M. Liénard. Soient C, D deux points d'une circonférence O, A et B les points cycliques, θ l'angle COD, DT la tangente en D. On a

$$O\,(C, D, A, B) = e^{2i\theta}, \quad D\,(C, T, A, B) = e^{i\theta};$$

d'où, par projection, le théorème énoncé.

Question 676(*).

(Voir *Mathesis*, (1) t. X, p. 48 et (2) t. I, p. 32.)

L'équation

$$a\left(1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots+\frac{x^m}{1.2.3\ldots m}\right)$$
$$+b\left(1-x+\frac{x^3}{1.2}-\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots\pm\frac{x^m}{1.2.3\ldots m}\right)+c=0,$$

ne peut avoir plus de deux racines réelles. (Sylvester.)

Énoncée en ces termes, la question me paraît inexacte. Soient, en effet,

$$m=3, \quad a=6, \quad b=30, \quad c=-27;$$

on a

$$f(x)\equiv 6\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)+30\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)-27=0.$$

On trouve aisément

$$f(0)=+9, \quad f(1)=-1, \quad f(2)=+1, \quad f(+\infty)=-\infty,$$

de sorte que l'équation $f(x)=0$ a ses trois racines réelles dans les intervalles (0, 1), (1, 2), (2, $+\infty$).

Peut-être y a-t-il sur les valeurs de a, b, c, m des restrictions qu'on aura omises dans la transcription de l'énoncé? (A. Laisant.)

(*) Question 7668 de l'*Educational Times*, reproduite dans les « *Unsolved Questions*, by Professor Sylvester. » L'énoncé a été copié exactement.

Question 678.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 72.)

Etudier la surface, lieu des circonférences de contact des cônes circonscrits à des sphères égales, les centres de ces sphères étant sur une droite fixe et les cônes, ayant même sommet S. (H. BROCARD.)

Solution par MM. DENYS *et* LALISSE. Prenons des axes rectangulaires, l'axe des z étant la droite fixe et l'axe des x passant par S.

L'équation de l'une des sphères est

$$x^2 + y^2 + (z - \alpha)^2 = R^2, \tag{1}$$

et le plan polaire du point S $(d, 0, 0)$ est représenté par

$$dx - \alpha(z - \alpha) = R^2. \tag{2}$$

L'équation de la surface proposée résulte de l'élimination de α entre les égalités (1) et (2); on trouve

$$(x^2 + y^2 - dx)^2 + z^2(x^2 + y^2 - R^2) = 0.$$

La surface est donc du quatrième ordre. Pour que z soit réel, on doit avoir $x^2 + y^2 - R^2 < 0$; donc la surface est complétement intérieure au cylindre K qui a pour axe OZ et pour rayon R, résultat qui s'explique aisément par la circonstance que ce cylindre est l'enveloppe des sphères considérées. Lorsque $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, on a $z = \infty$; donc le cylindre est asymptotique à la surface proposée.

La section par le plan XY est la circonférence représentée par $x^2 + y^2 - dx = 0$ et décrite sur OS comme diamètre; cette courbe appartient entièrement à la surface si l'on a $OS \leqq R$. Mais si OS surpasse R, la partie extérieure à la base du cylindre K est un *arc isolé;* les verticales menées par les points où elle sort de cette base appartiennent entièrement à la surface (3); ce sont les génératrices de contact du cylindre K avec les plans tangents menés par S.

La section par le plan YZ a pour équation

$$y^4 + z^2(y^2 - R^2) = 0, \quad \text{ou} \quad \rho = R \operatorname{tg} \omega;$$

c'est une courbe assez connue (Voir J. M. S., 1887, p. 233; 1890, p. 273).

Question 692.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 216.)

Par un point P *du plan d'un triangle* ABC *passent deux hyperboles équilatères, l'une circonscrite, l'autre conjuguée au triangle. Déterminer en coordonnées trilinéaires les équations de ces hyperboles et l'équation du cercle qui passe par les points d'intersection de ces courbes, autres que le point* P. (E. Lucas.)

Solution par M. Kluyver (Breda). Soient α, β, γ les coordonnées normales de P par rapport au triangle de référence ABC.

L'hyperbole circonscrite, passant par l'orthocentre (séc A, séc B, séc C) a pour équation

$$H_1 \equiv \begin{vmatrix} yz & zx & xy \\ \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix} = 0.$$

L'hyperbole conjuguée passant par le centre du cercle inscrit, son équation est

$$H_2 \equiv \begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Soient L, M, N les points de rencontre de ces courbes autres que P; le dernier point est l'orthocentre du triangle LMN. L'équation du cercle des neuf points de LMN s'obtient en cherchant le lieu des centres des hyperboles équilatères passant par L, M, N, P. Ces courbes étant représentées par l'équation

$$\lambda H_1 + H_2 = 0,$$

on trouve pour l'équation du cercle

$$K \equiv \begin{vmatrix} x(\beta^2 - \gamma^2) & y(\gamma^2 - \alpha^2) & z(\alpha^2 - \beta^2) \\ \beta\gamma' z + \gamma\gamma' y & \gamma\gamma' x + \alpha\alpha' z & \alpha\alpha' y + \beta\beta' x \\ \sin A & \sin B & \sin C \end{vmatrix} = 0,$$

après avoir posé

$$\alpha' = \beta\cos B - \gamma\cos C, \quad \beta' = \gamma\cos C - \alpha\cos A, \quad \gamma' = \alpha\cos A - \beta\cos B.$$

Or, le cercle LMN et le cercle K sont deux figures homothétiques, le centre d'homothétie étant P et le rapport de similitude étant égal à 2.

Entre les coordonnées absolues (X, Y, Z), (x, y, z) de deux points homologues et celles de P, on a donc les relations

$$x = \frac{X + \alpha}{2}, \quad y = \frac{Y + \beta}{2}, \quad z = \frac{Z + \gamma}{2}.$$

Pour l'homogénéité, nous écrivons

$$\frac{x}{X\partial + \alpha D} = \frac{y}{Y\partial + \beta D} = \frac{z}{Z\partial + \gamma D},$$

où

$$D \equiv X \sin A + Y \sin B + Z \sin C, \quad \partial \equiv \alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C.$$

Remplaçons dans l'équation $K = 0$ les coordonnées x, y, z par les quantités $X\partial + \alpha D$, ... qui leur sont proportionnelles, etc.

QUESTIONS D'EXAMEN.

475. Résoudre

$$1 + \frac{2x}{x + 4a} + \frac{27a^2}{2x^2 + 7ax - 4a^2} = \frac{6a}{2x - a}.$$

Le dénominateur commun est $2x^2 + 7ax - 4a^2$. On trouve

$$6x^2 - ax - a^2 = 0 \quad \text{d'où} \quad x = -\frac{a}{3}, \quad x = \frac{a}{2}.$$

La racine $x = \frac{a}{2}$ qui annule le dénominateur commun a besoin d'être vérifiée. — A cet effet, on écrit

$$1 + \frac{2x}{x + 4a} = \frac{1}{2x - a}\left(6a - \frac{27a^2}{x + 4a}\right) = \frac{3a(2x - a)}{(2x - a)(x + 4a)}.$$

En divisant les deux termes de la fraction du second membre par $2x - a$, on peut dire que $x = \frac{1}{2}a$ est une solution étrangère. (*Journal de Vuibert.*)

476. On a

$$(a - b)^2 (b - c)^2 + (b - c)^2 (c - a)^2 + (c - a)^2 (a - b)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)^2.$$

477. Étant donnée l'équation

$$x^2 - 2mx - (1 - m^2) = 0,$$

entre quelles limites doit être compris m, pour que les deux racines soient comprises entre -2 et $+4$.

(*Baccalauréat de l'enseignement secondaire spécial*, 1889.)

L'équation peut être écrite ainsi : $(x-m)^2-1=0$. Les racines étant $m+1$, $m-1$, on pose $m+1<4$, $m-1>-2$; d'où $-1<m<3$.

478. Discuter les racines de l'équation

$$(\lambda^2+\lambda-2)x^2+2(\lambda+1)x-(\lambda+1)=0.$$

Résumé de la discussion :

1° $\lambda<-1-\sqrt{2}$, x' et x'' sont imaginaires;
2° $-1-\sqrt{2}<\lambda<-2$, les racines sont positives;
3° $-2<\lambda<-1$, x' et x'' ont des signes contraires;
4° $-1<\lambda<-1+\sqrt{2}$, x' et x'' sont imaginaires;
5° $-1+\sqrt{2}<\lambda<1$, les racines sont positives;
6° $\lambda>1$, x' et x'' ont des signes contraires (*Journal de Vuibert.*)

479. Deux cercles égaux touchent une droite AB du même côté. Trouver sur cette droite un point M tel que les secondes tangentes menées de ce point aux deux cercles fassent l'angle donné α.

(*Baccalauréat*, Nancy, 1889.)

Soient 2β, 2γ les angles sous lesquels on voit de M les deux cercles x et $d-x$ les segments dans lesquels M divise la tangente commune. On a

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{R}{x},\quad \operatorname{tg}\gamma=\frac{R}{d-x},\quad \beta+\gamma+\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}\quad\text{ou}\quad \cot\frac{\alpha}{2}=\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}.$$

480. Le nombre 563 est le seul nombre de trois chiffres multiple de 70 plus 3, dont la somme des chiffres soit 14.

481. L'équation

$$\sqrt{a^2-x^2}+x\sqrt{a^2-1}=a^2(1-x^2)$$

a pour racines $x=-1$ et une seulement des valeurs

$$x=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a^2}(-1\pm\sqrt{a^2+1}).$$

482. Construire un triangle connaissant un côté, la hauteur correspondante et le produit des deux autres côtés.

483. Une droite quelconque étant donnée par ses deux projections, mener, par sa trace horizontale et dans le plan horizontal, une autre droite qui fasse avec la première un angle donné.

484. Un triangle ABC étant inscrit à un cercle et D étant le milieu de l'arc BAC, le produit des côtés AB et AC est égal à la différence des carrés des droites DB et DA. (*Journal de Lebon.*)

485. Démontrer qu'un trièdre SABC rectangle selon l'arête SA, est coupé selon un triangle rectangle par tout plan perpendiculaire à l'une des deux autres arètes.

486. Les nombres 132, 264, 396 sont les seuls, parmi ceux qui ont trois chiffres, qui soient égaux à la somme des six nombres de deux chiffres qu'on peut former en combinant deux des chiffres du nombre inconnu de toutes les manières possibles. (*Journal de Vuibert.*)

Si le nombre est *cdu*, on doit avoir

$$100c + 10d + u = 22(c + d + u), \quad c < 10, \; d < 10, \; u < 10.$$

487. Le plus petit nombre entier égal au quadruple du produit de ses chiffres est 384. (*Journal de Vuibert.*)

488. Le seul nombre de trois chiffres dont le double représente le nombre des chiffres de tous les nombres entiers non supérieurs au nombre cherché est 108. (*Journal de Vuibert.*)

489. Trouver les triangles rectangles, dont les côtés sont des nombres entiers, où le nombre représentant le périmètre est égal au nombre qui exprime la surface, ou le double de la surface.

(*Journal de Vuibert.*)

R. 1° 5, 12, 13; 6, 8, 10. 2° 3, 4, 5.

QUESTIONS PROPOSÉES.

***712.** Les droites AM, BM, CM rencontrent les côtés du triangle ABC en A′, B′, C′; les côtés du triangle A′B′C′ en A″, B″, C″; les côtés du triangle A″B″C″ en A‴, B‴, C‴ et ainsi de suite. Soient α, β, γ les coordonnées barycentriques de M par rapport au triangle ABC. On propose : 1° de trouver les coordonnées des sommets des triangles A′B′C′, A″B″C″, ...; 2° de démontrer que M a les mêmes coordonnées barycentriques par rapport à chacun de ces triangles; 3° de démontrer que les aires de ces triangles forment une progression géométrique.

Examiner quelques cas particuliers. (J. NEUBERG.)

×**713.** Soient H l'orthocentre du triangle ABC, M un point quelconque de son plan, et H_a, H_b, H_c les orthocentres des triangles AMH, BMH, CMH.

Démontrer que les circonférences circonscrites aux triangles AMH_a, BMH_b, CMH_c, ABC passent par un même point. (MEURICE.)

714. Soient P, Q, R trois points d'une parabole tels, que les normales concourent en un même point.

Les tangentes en ces points rencontrent une perpendiculaire à l'axe en trois points d'où l'on mène trois nouvelles tangentes à la courbe.

Démontrer que la circonférence circonscrite au triangle formé par ces dernières tangentes passe par le sommet de la parabole.

(R. TUCKER.)

×**715.** Si n est impair, le polynôme

$x^{4n} - x^{3n} + x^{2n} - x^n + 1$ est divisible par $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

(SHARP.)

×**716.** Soit n_r le coefficient de x^r dans le développement de $(1+x)^n$. Démontrer les formules

$$n_1 - \frac{1}{2}n_2 + \frac{1}{3}n_3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}n_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

$$n_1 - 2n_2 + 3n_3 - \cdots + (-1)^n (n-1)\, n_{n-1} = 0. \quad (\textit{Ed. Times.})$$

×**717.** Soient (C_1), (C_2), (C_3) trois cercles ayant pour centres les points C_1, C_2, C_3. Les cercles décrits des milieux des droites C_1C_2, C_2C_3 comme centres et passant respectivement par les points d'intersection de (C_1) et (C_2), (C_2) et (C_3) se coupent sur l'axe radical de (C_1) et (C_3). (CL. SERVAIS.)

×**718.** Résoudre le système

$$xyz + x - y - z = a(1 + yz - zx - xy),$$
$$xyz + y - z - x = b(1 + zx - xy - yz),$$
$$xyz + z - x - y = c(1 + xy - yz - zx).$$

×**719.** Si A, B, C sont les angles d'un triangle,

$$\Sigma \sin^2(A - B) - \Sigma \sin(A - B)\sin(A - C)\cos A =$$
$$\tfrac{1}{2}(1 - 8\cos A \cos B \cos C)\,\Sigma \sin^2 A. \quad (\text{EDWARDS.})$$

×**720.** Quel que soit l'entier n, $n^{13} - n$ est divisible par 2730.

(ANTHONY.)

SUR LE THÉORÈME DE JOACHIMSTHAL;

par M. V. JAMET, professeur au Lycée de Marseille.

La démonstration suivante, en même temps qu'elle fait connaître l'équation du cercle de Joachimsthal, par rapport à un système d'axes convenablement choisis, permet d'établir avec la plus grande facilité certaines propriétés, énoncées en 1878, par M. Gohierre de Longchamps (N. C. M., p. 279, t. IV), notamment celle-ci : « *Le cercle qui « passe par les pieds de trois normales menées d'un même point à une « conique, passe aussi par la projection du centre sur la tangente, au « point diamétralement opposé au pied de la quatrième normale.* »

En effet, rapportons la conique à cette quatrième normale prise pour axe des y et à la tangente au pied, O, de cette normale. Soit

$$f(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ey = 0 \qquad (1)$$

son équation. Les pieds des normales menées à cette conique par un point P, de coordonnées 0, β, sont sur l'hyperbole qui a pour équation

$$-x(Bx + Cy + E) + (y - \beta)(Ax + By) = 0,$$

ou

$$Bx^2 + (C - A)xy - By^2 + (A\beta + E)x + B\beta y = 0.$$

Considérons maintenant la cubique représentée par l'équation

$$\begin{vmatrix} Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Ey, & Bx^2+(C-A)xy-By^2+(A\beta+E)x+B\beta y \\ Ax+By, & \lambda x+\mu y+\nu, \end{vmatrix} = 0.$$

Elle passe évidemment par les pieds des quatre normales considérées, notamment par le point O, et par le point diamétralement opposé au point O; car ce point est sur la droite qui a pour équation

$$Ax + By = 0 \quad \text{ou} \quad f'_x(x, y) = 0.$$

Je dis maintenant qu'on peut disposer des coefficients λ, ν, de telle sorte que cette cubique se décompose en une droite passant par l'origine, et une conique; celle-ci passera par les pieds des trois normales, autres que PO, et par le point diamétralement opposé au point O; et nous montrerons que, pour une valeur particulière de μ, cette conique devient un cercle.

Observons d'abord qu'en retranchant des éléments de la première ligne

du déterminant précédent, les éléments de la deuxième ligne multipliés par x, on transforme la première ligne comme il suit

$$Bxy + Cy^2 + 2Ey,$$
$$(B - \lambda)x^2 + (C - A - \mu)xy - By^2 + (A\beta + E - \nu)x + B\beta y.$$

Donc, ce déterminant sera divisible par y, si l'on fait :

$$\lambda = B, \quad \nu = A\beta + E,$$

et la conique cherchée sera représentée par l'équation

$$\begin{vmatrix} Bx + Cy + 2E, & (C - A - \mu)x - By + B\beta \\ Ax + By, & Bx + \mu y + A\beta + E \end{vmatrix} = 0.$$

Je dis maintenant qu'on peut déterminer μ de telle sorte que cette conique soit un cercle. En effet, l'égalité des coefficients de x^2 et y^2 exige qu'on ait :

$$B^2 - A(C - A - \mu) = C\mu + B^2 \quad \text{ou} \quad \mu = -A,$$

et le coefficient de xy étant égal à

$$B\mu + AC - B(C - A - \mu) + AB \quad \text{ou} \quad 2B(\mu + A),$$

on voit qu'il s'annule quand on y fait $\mu = -A$.

En résumé, l'équation du cercle de Joachimsthal est la suivante :

$$\begin{vmatrix} Bx + Cy + 2E, & Cx - By + B\beta \\ Ax + By, & Bx - Ay + A\beta + E \end{vmatrix} = 0.$$

Le développement de cette équation montre que l'abscisse du centre de ce cercle est égale à

$$-\frac{3}{2}\frac{EB}{B^2 - AC}.$$

Si donc le point P se meut sur Oy, le centre du cercle se meut sur une droite parallele à Oy, equidistante du point Q, diamétralement opposé au point O, et du centre de la conique (1); donc la circonférence passe constamment par le point symetrique de Q par rapport à cette droite, c'est-à-dire par la projection du centre de la conique sur sa tangente en Q.

Parmi les propositions enoncées par M. G. de Longchamps auxquelles nous avons déjà fait allusion, il en est une, particulièrement remarquable, que nous pouvons enoncer ainsi : « *Si le point* P *décrit la normale* Oy, *un quelconque des côtés du triangle formé par les pieds des trois*

autres normales issues du point P. *enveloppe une parabole.* » On peut regarder ce théorème comme une conséquence du suivant : « *Si toutes les coniques d'un faisceau linéaire coupent une conique fixe*, E, *en un point fixe* Q, *toute corde commune à la conique fixe et à l'une des coniques du faisceau, enveloppe une conique inscrite dans le triangle formé par les trois autres points communs à toutes les coniques du faisceau.* » Il s'agit, bien entendu, des cordes communes qui ne passent pas par le point Q.

Voici la démonstration de cette proposition. Soit $S = 0$ l'équation de la conique E, rapportée à deux axes issus du point Q, et soient x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3 les coordonnées homogènes des trois points, autres que Q, communs à la conique S et aux coniques du faisceau ; soit encore S_i la valeur que prend le polynôme S, supposé homogène, quand on y remplace x, y, z par x_i, y_i, z_i. L'équation d'une conique du faisceau est de la forme

$$S = (ux + vy)(\lambda x + \mu y + \nu z)$$

λ, μ, ν désignant les coordonnées de la droite dont nous cherchons l'enveloppe. On peut encore écrire l'équation précédente comme il suit

$$ux + vy = \frac{S}{\lambda x + \mu y + \nu z}.$$

Si l'on exprime, par trois équations, que cette conique passe par les trois points (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), et si l'on élimine u, v entre ces trois équations, on obtient l'équation tangentielle de l'enveloppe cherchée sous la forme

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \dfrac{S_1}{\lambda x_1 + \mu y_1 + \nu z_1} \\ x_2 & y_2 & \dfrac{S_2}{\lambda x_2 + \mu y_2 + \nu z_2} \\ x_3 & y_3 & \dfrac{S_3}{\lambda x_3 + \mu y_3 + \nu z_3} \end{vmatrix} = 0.$$

D'après cette équation, la courbe cherchée est de deuxième classe, et compte, parmi ses tangentes, l'une quelconque des trois droites passant par deux points définis, chacun, par une équation de la forme

$$\lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i = 0.$$

Ces droites sont les trois côtés du triangle dont il a été question dans l'énoncé.

On trouverait, sans difficulté, l'équation tangentielle de la corde commune à une conique fixe et à une autre conique passant par quatre points fixes dont aucun n'est situé sur la conique donnée. Cette enveloppe est de la troisième classe et touche les six droites qui joignent deux quelconques des points de base du faisceau.

Mais revenons au cas où le point Q est sur la conique fixe E. Si deux des points de base sont rejetés à l'infini dans des directions données, les coniques du faisceau sont homothétiques à une conique fixe, et la conique, enveloppe des cordes communes, est une parabole tangente aux deux droites, parallèles aux asymptotes des coniques du faisceau, menées par celui des quatre points de base qui, sans être sur la conique E, est à distance finie. Mais ces directions asymptotiques peuvent être celles du cercle. Alors toutes les coniques du faisceau sont des cercles, et le point dont nous venons de parler est le foyer de la parabole enveloppe des cordes communes. Si ce point est la projection du centre de E sur sa tangente en Q, les coniques du faisceau sont les cercles de Joachimsthal relatifs aux points situés sur la normale à E, au point diamétralement opposé au point Q. On en conclut que la parabole dont il est question dans le théorème de M. de Longchamps a pour foyer la projection du centre de E sur la tangente à cette conique au point diamétralement opposé au pied de la normale fixe. Nous allons préciser davantage la détermination de cette parabole.

Elle est tangente aux deux axes de symétrie de E. En effet, désignons par O, comme au début de cet article, le pied de la normale fixe, par P le point où cette normale coupe l'un des axes de symétrie de E. Parmi les normales issues de P, il en est deux qui sont dirigées suivant cet axe; et celui-ci coïncide avec la droite qui joint les pieds de ces deux normales. C'est donc une tangente à la parabole considérée. Donc, *la parabole de M. de Longchamps a pour directrice la droite qui joint le centre de* E *au point symétrique du foyer de cette parabole par rapport à l'un quelconque des axes de* E.

En outre, *les points de contact de cette parabole avec les axes de* E *sont sur la tangente à* E, *au point diamétralement opposé à* O. Car si l'on désigne par E le foyer de cette parabole, par C le centre de E, cette tangente est, comme on l'a déjà vu, perpendiculaire à CF, au point F.

Marseille, 20 mars 1891.

BIBLIOGRAPHIE.

Applications remarquables du théorème de Stewart et théorie du barycentre par CL. THIRY, professeur de mathématiques. — Gand, Hoste, éditeur; Paris, Gauthier-Villars et fils. — (In-8° de 91 pages) Prix : 2 fr.

Cette brochure reproduit la substance de l'opuscule que M. Thiry a publié en 1887 sur le théorème de Stewart, mais avec une foule d'applications instructives et intéressantes qui en font un livre très utile à consulter par les professeurs et les élèves. Elle comprend six chapitres portant les titres suivants :

I. Diverses formes du théorème de Stewart, conséquences classiques (pp. 5-17). II. Applications diverses relatives au triangle (pp. 18-48). III. Applications relatives au quadrilatère (pp. 48-55). IV. Applications relatives au cercle (pp. 55-57). V. Lieux géométriques (pp. 57-65). VI. Barycentre (pp. 65-82). — Exercices proposés (au nombre de 34).

Ne pouvant analyser en détail l'ouvrage de M. Thiry, nous nous bornons à en signaler quelques passages qui suffisent pour donner à nos lecteurs une idée de la valeur du livre.

Dans le chapitre I, on rencontre la formule suivante :

$$\overline{AB}^2 . \overline{MC}^2 + \overline{AC}^2 . \overline{MB}^2 = \overline{BC}^2 . \overline{AM}^2,$$

où M est un point de l'hypoténuse BC du triangle rectangle ABC.

Le chapitre II (dont une partie a été insérée dans les *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*) renferme un grand nombre de résultats élégants, notamment les expressions des segments compris entre deux points remarquables du plan d'un triangle ABC, et celles des puissances de ces points par rapport à certains cercles (cercles de Brocard et de Lemoine; cercles GH, HK, etc.); l'une des formules conduit au théorème sur le contact du cercle des neuf points avec le cercle inscrit. L'auteur tire un excellent parti de la relation suivante qui lui est propre :

$$\overline{PK_n}^2 = \frac{\Sigma a^n . \overline{PA}^2}{\Sigma a^n} - \left(\frac{abc}{a^2+b^2+c^2}\right)^2 \Sigma a^{n-2} b^{n-2};$$

P est un point quelconque du plan ABC, et K_n désigne l'intersection des droites menées par les sommets et divisant les côtés opposés dans le rapport des puissances n^{es} des côtés adjacents(*).

Le chapitre V traite huit lieux géométriques; c'est là une matière qui est souvent négligée dans les cours de géométrie élémentaire.

Nous ne pouvons qu'approuver M. Thiry d'avoir introduit dans son livre une théorie purement géométrique du barycentre, avec quelques applications intéressantes; les bons élèves de nos classes scientifiques auront ainsi l'occasion de se familiariser avec une notion qui a une grande importance en mécanique, mais aussi en géométrie pure. (J N.)

(*) La démonstration du théorème arithmétique de la page 23 est inexacte. Pour démontrer ce théorème, il suffit d'observer que les seuls carrés entiers ayant pour différence 5, sont 4 et 9; ce qui conduit à poser $9(1+K) = 9$, $K = 0$, $s = 1$.

Note sur la décomposition en facteurs des quantités algébriques, suivie d'une note sur la discussion des problèmes du premier degré, à l'usage de l'enseignement moyen et normal par P. BRASSEUR, *Professeur à l'École normale de Lierre. Cinquième édition, revue et augmentée.* — Lierre, chez l'auteur, 1891 (In 8° de 32 + 48 pages). Prix : fr. 1,10.

Nous avons déjà rendu compte dans *Mathesis* de la note sur la décomposition en facteurs. L'opuscule étant arrivé à sa cinquième édition, nous pouvons nous dispenser d'en faire de nouveau l'éloge. Signalons cependant le changement suivant qui constitue une amélioration : Le théorème relatif à la divisibilité d'un polynôme entier en x par $x - a$ a été démontré dans toute sa généralité, et les propositions sur la division de $x^m \pm a^m$ par $x \pm a$ en ont été déduites comme corollaires, au lieu d'être établies par la considération d'exemples particuliers.

Une addition importante est venue enrichir la nouvelle édition; l'auteur a introduit une note sur la discussion des problèmes du premier degré. Cette partie se recommande aux professeurs et aux élèves par un exposé clair de la marche à suivre pour la discussion, un bon choix d'exemples développés et de problèmes proposés. Nous aurions bien à faire quelques réserves sur plusieurs points : par exemple, les systèmes d'équations peuvent donner à la fois les deux symboles (0 : 0) et A : 0); le problème de la page 37 conduit à une discussion fort longue qui peut être abrégée au moyen de quelques notions sur les distances positives ou négatives introduites comme données d'une question. Mais tel qu'il est, cet essai peut déjà rendre de grands services dans l'enseignement élémentaire de l'Algèbre. (J. N.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

4. *Sur divers articles de Mathesis.* 1° M. E. HABICH, directeur de l'École spéciale des Constructions et des Mines, à Lima, a publié, dans les *Mondes* de Moigno, t. XI, p. 307 et suivantes (1866), une note *Sur le mouvement conchoïdal*, où l'on trouve quelques-uns des théorèmes énoncés dans *Mathesis*, (1), X, p. 9-14.

2° La méthode de soustraction des fractions, signalée dans *Mathesis*, (2), I, p. 92, se trouve dans le *Précis d'Arithmétique* de M. C. BERGMANS, 1re édition, n° 364, p. 171 (1884).

3° La formule de M. d'Ocagne dont il est question dans la note deuxième de la page 87 du présent volume de *Mathesis*, avait été publiée par l'auteur, dès 1887, dans les *Annales de l'École normale supérieure* (p. 313). M. d'Ocagne donne, dans ce petit mémoire, la relation entre les rayons de courbure de deux courbes polaires réciproques, dans le cas où la courbe directrice est une conique quelconque.

×5. *Problème du puits*. Calculer la profondeur d'un puits, sachant qu'il s'est écoulé un nombre θ de secondes, entre l'instant où l'on a laissé tomber la pierre et celui où le bruit qu'elle a fait, en frappant le fond, est revenu à l'oreille. (BERTRAND, *Traité d'Algèbre*, 3e édition, liv. III, ch. IV, § 1, p. 311-314). L'équation du problème est

$$\frac{x}{v}+\sqrt{\frac{2x}{g}}=\theta.$$

On abrège notablement la discussion en prenant pour inconnue $\sqrt{x}$, ce qui permet d'écarter immédiatement la solution négative (E. GELIN).

×6. *Problème d'Algèbre* (par M. l'abbé E. GELIN, professeur au collège Saint-Quirin, à Huy). *Un père partage son héritage entre ses enfants de la manière suivante : le premier prendra une somme* a *et la* n^e *partie du reste ; le second, une somme* 2a *et la* n^e *partie du reste ; le troisième, une somme* 3a *et la* n^e *partie du reste, et ainsi de suite. Il arrive que l'héritage est entièrement partagé et que les enfants ont reçu des parts égales. On demande la valeur de l'héritage, le nombre des enfants et la part de chacun d'eux.*

Première solution. Soient x la valeur de l'héritage, y le nombre des enfants et z la part de chacun d'eux. En égalant les parts des deux premiers enfants, on a

$$a+\frac{x-a}{n}=2a+\frac{x-\left(a+\frac{x-a}{n}\right)-2a}{n},$$

d'où

$$x=(n-1)^2 a.$$

On a ensuite

$$z=a+\frac{x-a}{n}=(n-1)\,a, \quad y=\frac{x}{z}=n-1.$$

Comme on ne s'est servi, pour mettre le problème en équation, que de l'égalité des deux premières parts, il est nécessaire de vérifier que les autres parts sont égales à $(n-1)\,a$. On trouve, en effet, pour la part z' du p^e enfant,

$$z'=pa+\frac{(n-1)^2 a-(p-1)(n-1)a-pa}{n}=(n-1)\,a.$$

Deuxième solution. Soit y le nombre des enfants. La part du dernier enfant sera ay, et, puisque toutes les parts sont égales, la valeur de l'héritage est $ay \times y$ ou ay^2.

En égalant les parts du premier et du dernier enfant, on a l'équation

$$a + \frac{ay^2 - a}{n} = ay, \quad \text{ou} \quad \frac{y^2 - 1}{n} = y - 1,$$

d'où $y = 1$ ou $n - 1$, etc.

Cette seconde solution suppose que la somme des parts est ay^2, ce qui n'exige pas nécessairement que chaque part soit égale à ay, mais seulement que *la moyenne des parts* soit ay. Il faut donc, dans cette solution comme dans la première, vérifier que toutes les parts sont égales.

Troisième solution. Soient x le montant de l'héritage et z la valeur de chaque part. Si l'on exprime que la part du p^e enfant est égal à z, on a l'équation

$$z = pa + \frac{x - (p-1)z - pa}{n},$$

ou

$$p[z - (n-1)a] = x - (n-1)z.$$

Cette équation devant être indépendante de la valeur de p, on a

$$z = (n-1)a, \qquad x = (n-1)z = (n-1)^2 a.$$

Quatrième solution. Soient encore x le montant de l'héritage et z la valeur de chaque part. En exprimant que les parts du p^e et du $(p+1)^e$ enfant sont égales, on a l'équation

$$pa + \frac{x - (p-1)z - pa}{n} = (p+1)a + \frac{x - pz - (p+1)a}{n},$$

ou

$$\frac{z}{n} = a - \frac{a}{n}.$$

Cette équation est indépendante de p et donne

$$z = (n-1)a.$$

On a ensuite, en égalant la part du premier enfant à $(n-1)a$,

$$a + \frac{x - a}{n} = (n-1)a,$$

d'où

$$x = (n-1)^2 a(*).$$

(*) On trouve, dans le *Traité d'Arithmétique* de M. Gelin, troisième édition, page 404, et cinquième édition, page 403, trois solutions arithmétiques du même problème.

QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT.

Limite du produit d'un nombre fini de variables commensurables ayant des limites commensurables.

1. Théorème. *La limite du produit d'un nombre fini de variables commensurables, dont chacune a une limite commensurable, est égale au produit de ces limites.*

1° Soient, par exemple, u, v, deux variables commensurables, positives ou négatives, ayant respectivement pour limites les constantes commensurables a, b. Cela signifie que les différences

$$\alpha = u - a, \quad \beta = v - b$$

peuvent devenir et rester aussi petites que l'on veut, en valeur absolue. Posons

$$\delta = uv - ab = (a + \alpha)(b + \beta) - ab.$$

On aura

$$\delta = \alpha b + a\beta + \alpha\beta.$$

Puisque α et β peuvent devenir et rester, en valeur absolue, aussi petits que l'on veut, il en est de même de αb et $a\beta$, et aussi de $\alpha\beta$(*); donc δ peut aussi devenir et rester aussi petit que l'on veut, en valeur absolue. On a donc, d'après la définition de la limite, $\lim uv = ab$.

2° Si u, v, w, t sont des variables commensurables, positives ou négatives, ayant des limites commensurables, on aura, d'après ce qui vient d'être démontré,

$$\lim(uv) = \lim u \times \lim v, \quad \lim(uvw) = \lim(uv) \times \lim w,$$
$$\lim(uvwt) = \lim(uvw) \times \lim t.$$

Par suite,

$$\lim(uvwt) = \lim u \times \lim v \times \lim w \times \lim t.$$

On étendrait de même le principe à un nombre fini quelconque de variables.

(*) Par exemple, si δ doit être inférieur à ε, on prendra, en valeur absolue, α inférieur à 1, à $\frac{1}{3}\varepsilon$, et à la valeur absolue de $(\varepsilon : 3b)$; β inférieur à 1 et à la valeur absolue de $(\varepsilon : 3a)$. On aura, en valeur absolue,

$$\alpha b < \tfrac{1}{3}\varepsilon, \quad a\beta < \tfrac{1}{3}\varepsilon, \quad \alpha\beta < \alpha < \tfrac{1}{3}\varepsilon, \quad \alpha b + a\beta + \alpha\beta < \varepsilon.$$

2. *Démonstration directe dans le cas général.* Supposons que les n variables commensurables u, v, ..., w, t aient respectivement pour limites les constantes commensurables a, b, ..., c, d, de manière que les quantités

$$\alpha = u - a, \quad \beta = v - b, \quad \ldots, \quad \gamma = w - c, \quad \delta = t - d,$$

puissent devenir et rester, en valeur absolue, aussi petites qu'on le veut. Posons

$$\Delta = uv \ldots wt - ab \ldots cd.$$

On a

$$\left.\begin{aligned} \Delta = {} & (uv \ldots wt - uv \ldots wd) \\ & + (uv \ldots wd - uv \ldots cd) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + (ub \ldots cd - ab \ldots cd) \end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned} & uv \ldots w\delta \\ & + uv \ldots \gamma d \\ & \cdots\cdots \\ & + \alpha b \ldots cd \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Soit M une quantité positive supérieure, en valeur absolue, à u, v, ..., w, t, a, b, ... c, d. On aura évidemment, en valeur absolue encore,

$$\begin{aligned} uv \ldots w\delta &< M^{n-1}\delta, \\ uv \ldots \gamma d &< M^{n-1}\gamma, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \alpha b \ldots cd &< M^{n-1}\alpha. \end{aligned}$$

Par suite, si l'on suppose α, β, ..., γ, δ, en valeur absolue, inférieures à ε, on aura

$$\Delta < nM^{n-1}\varepsilon$$

en valeur absolue, et, si l'on prend

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{nM^{n-1}},$$

ε' étant aussi petit qu'on le veut, on a $\Delta < \varepsilon'$, en valeur absolue. Donc

$$\lim (uv \cdots wt) = ab \cdots cd = \lim u \times \lim v \times \cdots \times \lim w \times \lim t. \qquad (2)$$

3. Remarques. I. La démonstration précédente subsiste, si une ou plusieurs des quantités u, v, ..., w, t sont constantes, c'est-à-dire, si une ou plusieurs des quantités α, β, ..., γ, δ sont nulles.

II. Il en est de même si le produit $uv \cdots wt$ est constant, bien que tous ou plusieurs de ses facteurs soient variables. Alors Δ est une constante ; mais cette constante ne peut être différente de zéro, sans quoi, on ne pouvait avoir $\Delta < \varepsilon'$, ε' étant aussi petit qu'on le veut. On a donc $\Delta = 0$, ou

$$uv \cdots wt = ab \cdots cd,$$

égalité qui prend encore la forme (2), si l'on se souvient que, par définition, la limite de la quantité constante $uv \cdots wt$, est cette constante même.

III. La démonstration du théorème suppose que les limites $a, b \cdots c, d$ sont finies, puisque dans le cas contraire, les égalités $\alpha = u - a$, $\beta = v - b$, etc. n'auraient plus aucun sens.

Si une ou plusieurs des quantités $u, v, \cdots w, t$ croissent indéfiniment en valeur absolue, tandis que les autres restent toujours supérieures à une quantité finie m, le produit $uv \cdots wt$ est supérieur, en valeur absolue, à m^{n-1} multiplié par la valeur absolue de l'une des variables qui croît indéfiniment. On a donc $\lim (uv \cdots wt) = \infty$. Dans ce cas, l'on peut dire, en un certain sens, que l'égalité (2) subsiste encore.

Si l'une des quantités $u, v, \cdots w, t$ croît indéfiniment, en valeur absolue, tandis qu'une autre a pour limite zéro, le second membre de (1) prend la forme indéterminée $0 \times \infty$. Bien loin que, dans ce cas, le second membre de (2) fasse connaître la valeur du premier, c'est le plus souvent le premier qui, par convention, est regardé comme donnant la valeur du second.

IV. La démonstration du théorème des n^os 1 et 2 suppose le nombre n des facteurs fini et déterminé. Si n croissait indéfiniment, la somme des n quantités indéfiniment décroissantes (1) pourrait ne pas avoir zéro pour limite, et la formule (2) pourrait ne pas subsister.

Voici un exemple simple des conclusions erronées auxquelles elle peut conduire quand on l'applique abusivement au cas où n est indéfiniment croissant. On a, pour n entier positif,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m}\right),$$

le nombre des facteurs du second membre étant m. Appliquons la formule (2), il viendra

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \lim\left(1+\frac{1}{m}\right) \times \lim\left(1+\frac{1}{m}\right) \times \cdots = 1;$$

résultat absurde, puisque

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{1}\cdot\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \text{etc.}$$

surpasse toujours 2. (P. M.)

QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 90.)

5. On donne deux segments de droite AB et A'B' tels que les droites AA', BB' soient parallèles. Soit M' un point quelconque de A'B'; par B' on mène une parallèle à AM', et par A' une parallèle à M'B; ces parallèles se coupent en M. Démontrer que le point M parcourt la droite AB. (D'OCAGNE.)

Lorsque M' décrit le droite A'B', les droites AM', BM' engendrent deux faisceaux projectifs; donc les droites A'M, B'M se correspondent également dans deux faisceaux projectifs, qui sont même perspectifs à cause du rayon uni A'B' qui correspond au point M' pris à l'infini sur A'B'. Lorsque M' est en A' ou B', M est en B ou en A; donc le lieu de M est la droite AB.

6. Les droites qui joignent les sommets B, C d'un triangle ABC à un même point M rencontrent les côtés opposés aux points B', C'. Trouver le lieu decrit par M lorsque les droites BB', CC' sont proportionnelles aux côtés BA, CA. (SOLLERTINSKY.)

Les triangles ABB', ACC' peuvent être semblables; alors les angles ABB', ACC' étant égaux, les droites BB', CC' se correspondent dans deux faisceaux inversement égaux et M décrit une conique passant par B, C, A et l'orthocentre H; le lieu est donc une hyperbole équilatère ayant pour centre le milieu de BC. Soit CC'_1 la symétrique de CC' par rapport à la hauteur CH; les droites BB', CC'_1 satisfont à la condition du problème; comme elles se correspondent dans deux faisceaux égaux, leur point de concours décrit la circonférence BHC.

7. On donne, dans un même plan, deux triangles ABC, A'B'C' et un point O. Si les droites OA', OB', OC' rencontrent BC, CA, AB en trois points situés en ligne droite, les droites OA, OB, OC rencontrent également B'C', C'A', A'B' en trois points qui sont en ligne droite.

En effet, il résulte de l'hypothèse que le faisceau (O, AA' BB' CC') est involutif; car les rayons aboutissent aux six sommets d'un quadrilatère complet. Par conséquent, en appliquant la réciproque, on voit que OA, OB, OC coupent les côtés du triangle A'B'C' en trois points qui sont en ligne droite.

Le théorème précédent nous a été communiqué par M. Sollertinsky

comme étant la proposition corrélative de la question proposée n° 150, *Mathesis*, (1), t. II, p. 144 et résolue, t. III, p. 86.

8. Sur un diamètre AB d'un cercle O, on prend deux points M, N équidistants du centre O. On joint les points M, N, O à un point quelconque P de la circonférence par des droites qui rencontrent cette même circonférence en C, D, T. Démontrer que les droites AB, CD se coupent sur la tangente en T au cercle. (*J. de Vuibert.*)

Le point P étant supposé fixe, les droites PM, PN se correspondent dans une involution; donc la corde CD passe par un point fixe. Deux positions de cette corde sont le diamètre AB et la tangente en T.

Si les points M et N sont fixes et le point P mobile sur la circonférence, la droite CD enveloppe une conique qui touche le cercle en A et B; car à un point C correspondent deux cordes CD. (J. N.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 655.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 172.)

On décompose, au hasard, le nombre $2a$ *en deux parties positives* x, y. *Quelle est la probabilité que la somme* $m^2x^2 + n^2y^2$ *soit comprise entre* p^2a^2 *et* q^2a^2 ? m, n, p, q *sont des nombres donnés.*

Solution par M. Kluyver (Bréda). Nous regardons les quantités variables $x' = mx$, $y' = ny$ comme les coordonnées rectangulaires d'un point M. L'équation

$$x + y = 2a, \quad \text{ou} \quad nx' + my' = 2amn$$

représente une droite AB qui intercepte sur les axes OX, OY les segments $OA = 2ma$, $OB = 2na$. Tout point du segment AB correspond à une décomposition de $2a$ en deux parties positives.

De même les équations

$$m^2x^2 + n^2y^2 = p^2a^2, \quad \text{ou} \quad x'^2 + y'^2 = p^2a^2,$$
$$m^2x^2 + n^2y^2 = q^2a^2, \quad \text{ou} \quad x'^2 + y'^2 = q^2a^2,$$

représentent deux circonférences P, Q ayant pour centre commun O. Un point M compris entre ces deux circonférences est tel que la somme $x'^2 + y'^2$ des carrés de ses coordonnées est comprise entre p^2a^2 et q^2a^2.

Pour fixer les idées, nous supposons $m > n$, $p > q$. Considérons, pour faciliter la discussion, d'abord le cas où les circonférences P, Q coupent AB aux points C et D, E et F compris entre A et B. On voit immédiatement que les points du plan qui correspondent à une décomposition favorable de $2a$ sont ceux des segments CE, FD, de sorte que la probabilité cherchée est

$$W = \frac{CE + FD}{AB} = \frac{CD - EF}{AB}.$$

Menons OH perpendiculaire à AB. On trouve facilement

$$AB = 2a\sqrt{m^2 + n^2}, \quad OH = \frac{2amn}{\sqrt{m^2 + n^2}},$$

$$CD = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{OH}^2} = \frac{aR_1}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \quad EF = \frac{aR_2}{\sqrt{m^2 + n^2}},$$

après avoir posé

$$R_1 = \sqrt{p^2(m^2 + n^2) - 4m^2n^2}, \quad R_2 = \sqrt{q^2(m^2 + n^2) - 4m^2n^2}.$$

Par conséquent, dans le cas considéré,

$$W = \frac{CD - EF}{AB} = \frac{R_1 - R_2}{m^2 + n^2}.$$

Les différentes positions des circonférences P, Q par rapport à la droite AB sont représentées dans la figure par T, P, R, S. En examinant toutes les combinaisons possibles, on parvient à dresser le tableau suivant :

I. $p < \dfrac{2mn}{\sqrt{m^2 + n^2}}$; C, D, E, F sont imaginaires ; $W = 0$.

II. $q < \dfrac{2mn}{\sqrt{m^2 + n^2}} < p$; E, F sont imaginaires ; C, D sont réels.

1. $2m > p$.

α. $2n > p$; ordre des points : ACDB ;

$$W = \frac{CD}{AB} = \frac{R_1}{m^2 + n^2}.$$

β. $p > 2n > q$; ordre des points : ACBD ;

$$W = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{m^2 + n^2}(mn + \tfrac{1}{2} R_1).$$

2. $p > 2m > q$; ordre des points : CABD ;

$$W = 1.$$

III. $q > \dfrac{2mn}{\sqrt{m^2 + n^2}}$; C, D, E, F sont réels.

1. $2m > p$.

α. $2n > p$; ordre des points : ACEFDB ;

$$W = \frac{R_1 - R_2}{m^2 + n^2}.$$

β. $p > 2n > q$; ordre des points : ACEFBD ;

$$W = \frac{BC - EF}{AB} = \frac{1}{m^2 + n^2}(mn + \tfrac{1}{2} R_1 - R_2).$$

γ. $q > 2n$; ordre des points : ACEBFD ;

$$W = \frac{EC}{AB} = \frac{1}{m^2 + n^2}(\tfrac{1}{2} R_1 - R_2).$$

2. $p > 2m > q$.

α. $p > 2n > q$; ordre des points : CAEFBD ;

$$W = \frac{AB - EF}{AB} = \frac{1}{m^2 + n^2}(m^2 + n^2 - R_2).$$

β. $q > 2n$; ordre des points : CAEBFD ;

$$W = \frac{AE}{AB} = 1 - \frac{mn - \frac{1}{2} R_2}{m^2 + n^2}.$$

3. $q > 2m$; ordre des points : CEABFD ;

$$W = 0.$$

Note. Pour les méthodes *élémentaires* servant à résoudre ce genre de questions, voir *Mathesis*, t. II, pp. 177-179 et t. III, p. 233-237 (Cesáro) ; N. C. M., V, 1879, p. 103 et *Bulletin de la Soc. math. de France*, XI, 1883, p 13-25 (Lemoine) ; A. F. Paris, 1878, p. 138-139 (Lalanne).

Question 684.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 128.)

Trouver le lieu du point de contact de deux séries de circonférences, les unes tangentes à deux droites rectangulaires OX, OY, ***les autres tangentes à*** OX ***en un point fixe*** A. (H. Brocard.)

Solution analytique par MM. Déprez, de Bőzóky *et* Decamps(*).

Prenons pour origine des coordonnées le point A, pour axes AO et une

perpendiculaire AY'. Désignant la distance AO par δ, le rayon d'une circonférence Σ touchant AO en A par α, celui d'une circonférence Σ' touchant la précédente et les droites OX, OY par β, nous aurons pour

(*) La figure ci-jointe est due à M. Jeřábek ; elle renferme des lignes se rapportant à des détails que le défaut d'espace nous empêche de reproduire. (J. N.)

les coordonnées des centres $(0, \alpha)$, $(\delta - \beta, \beta)$; d'où les coordonnées du point de contact P des deux circonférences

$$x = \frac{\alpha(\delta - \beta)}{\alpha + \beta}, \quad y = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}, \tag{1}$$

car ce point divise la distance des centres dans le rapport des rayons. En écrivant que la distance des centres est égale à la somme des rayons, nous trouvons aussi

$$4\alpha\beta = (\delta - \beta)^2. \tag{2}$$

Des relations (1), on déduit

$$\frac{y}{x} = \frac{2\beta}{\delta - \beta}; \text{ donc } \beta = \frac{\delta y}{2x + y}, \quad \alpha = \frac{\delta y}{2\delta - x - y};$$

en substituant ces valeurs dans (2), nous obtenons pour le lieu cherché

$$(x^2 + y^2)(2x + y) - 2\delta x^2 = 0.$$

Le lieu est donc une cubique circulaire, ayant pour asymptote la droite représentée par

$$y = -2x + \tfrac{2}{5}\delta;$$

elle passe par O et la tangente en ce point est parallèle à l'asymptote; le point A est un point de rebroussement avec AY′ pour tangente; les tangentes aux points cycliques se coupent en un point (foyer) ayant pour coordonnées

$$\left(-\frac{2\delta}{5}, -\frac{\delta}{5}\right),$$

et situé sur la courbe.

Remarques (dues à M. Déprez). 1° Appelons Δ l'asymptote, E le point de AO qui a pour abscisse $\frac{4}{5}\delta$, et soit Δ' la parallèle par E à Δ; enfin, soit K la circonférence qui passe par A et touche en E la droite Δ'. Si une sécante quelconque menée par A coupe Δ en M et K en N, et que l'on porte sur cette sécante une longueur MP = AM, le point P appartient à la cubique.

2° Cherchons l'enveloppe de la ligne des centres des circonférences Σ, Σ'. Pour cela, adoptons des coordonnées parallèles (u, v), les origines étant A, O et les axes AY′, OY. Nous aurons

$$u = \alpha, \quad \frac{v - u}{\beta - u} = \frac{\delta}{\delta - \beta},$$

et en éliminant α, β entre ces relations et l'égalité (2) :

$$4uv(v - u + \delta) - \delta(u - \delta)^2 = 0.$$

3° L'enveloppe de la tangente commune au point P a pour équation en coordonnées parallèles

$$v(v+2u)(v-u)-2\partial u(u+v)=0.$$

On peut, de même, chercher l'enveloppe de la tangente commune extérieure et les lieux de ses points de contact avec Σ, Σ'.

Solution géométrique par M. Jeřabek. Soient Σ, Σ' deux circonférences qui se touchent mutuellement en P et dont la première est tangente aux droites OX, OY, et dont l'autre est tangente à OX au point donné A. La droite AP rencontre Σ en un second point N qui, d'après un théorème connu, est situé sur le diamètre passant par le point M où Σ touche OX. Le centre de Σ parcourt la bissectrice de l'angle XOY; il en résulte que N décrit une droite passant par O. L'angle MPN étant droit, on a la construction suivante du lieu cherché : *On donne deux droites* OX, ON *et un point* A *sur la première; une sécante quelconque menée par* A *coupant* ON *en* N, *on projette* N *en* M *sur* OX, *et* M *en* P *sur* ON. En faisant $AP=\rho$, $AO=\partial$, angle $OAN=\omega$, $AON=\theta$, on trouve pour équation du lieu

$$\rho=\partial\frac{\sin\theta\cos^2\omega}{\sin(\theta+\omega)}.$$

La droite MP enveloppe une parabole; car, lorsque AN tourne autour de A, la ponctuelle engendrée par M est projective avec la ponctuelle décrite par N et par suite avec le faiseeau déterminé par AN et aussi avec un faisceau dont le rayon est parallèle à MP. Pour trouver les éléments principaux de cette conique, menons AB perpendiculaire sur ON, BC perpendiculaire sur OA, CV perpendiculaire sur AB; enfin, soient F le symétrique de B par rapport à OX, et V le point de rencontre de MP avec CV. A cause des angles droits NBA, NMA, le quadrilatère NBMA est inscriptible; d'où

$$\textit{angle}\ \mathrm{NAB}=\mathrm{NMB}=\mathrm{MBC}=\mathrm{MFC},$$

et comme les angles CVM, NAB ont leurs côtés perpendiculaires, les angles CVM, MFC sont égaux; donc le quadrilatère CMFV est inscriptible, et l'angle $\mathrm{FVM}=\mathrm{FCM}=\frac{1}{2}\pi$. Il résulte de là que l'enveloppe de MP est l'antipodaire de F par rapport à la droite CV; c'est donc une parabole ayant pour foyer F, pour tangente au sommet CV et pour directrice ON.

Le lieu de P est la podaire de A par rapport à cette parabole. C'est donc une cissoïdale de A par rapport à la circonférence qui a pour diamètre AF, et à la tangente GH menée au point G diamétralement opposé à C; car AH = FV = EP, E étant le point de rencontre de la circonférence avec AN.

Solutions par MM. CRISTESCO et A. DENYS.

Question 702.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 32.)

Trouver le lieu du foyer d'une parabole touchant une logarithmique (équation $y = e^x$) ***en un point variable*** M ***et l'axe des x au pied de l'ordonnée de*** M. (H. BROCARD.)

Solution par MM. HACKEN et DÉPREZ. Soient : N le pied de l'ordonnée de M, A le point de rencontre de la tangente en M avec l'axe Ox, Q et P les milieux de AN et AM, enfin C et B les milieux de MN et PQ. D'après un théorème connu, la parabole qui touche AN en N et AM en M passe par le milieu B de AC et admet pour tangente la droite PQ. Les deux tangentes QB, QN étant rectangulaires, le point Q appartient à la directrice de la parabole et le foyer F est la projection de Q sur sa polaire NB.

Soient (a, b) les coordonnées de M. La sous-tangente AN étant constamment égale à 1, les coordonnées des points Q, B sont

$$\left(a-\frac{1}{2}, 0\right), \quad \left(a-\frac{1}{2}, \frac{b}{4}\right);$$

on en conclut les équations des droites BN, QF :

$$y = -\frac{b}{2}(x-a), \quad y = \frac{2}{b}\left(x-a+\frac{1}{2}\right). \tag{1}$$

Entre ces égalités et l'équation $b = e^a$, il faut éliminer a et b. A cet effet, multiplions l'une par l'autre les équations (1) et résolvons l'équation ainsi obtenue par rapport à $x - a$; nous aurons

$$x-a = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}-y^2}, \quad b = \frac{2}{y}\left(\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}-y^2}\right). \tag{2}$$

Portant les valeurs de a et b dans l'équation $b = e^a$, ou $a = \operatorname{Log} b$, nous obtenons

$$x = -\frac{1}{4} \mp \sqrt{\frac{1}{16} - y^2} + \operatorname{Log}\left[\frac{2}{y}\left(\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - y^2}\right)\right].$$

Mais il est plus simple de résoudre les équations (1) par rapport à x et y et de regarder a comme un paramètre variable ; le lieu cherché sera représenté par le système d'équations

$$x = a - \frac{2}{e^{2a} + 4}, \quad y = \frac{e^a}{e^{2a} + 4},$$

ou, si l'on adopte b pour paramètre variable, par les formules :

$$x = \operatorname{Log} b - \frac{2}{b^2 + 4}, \quad y = \frac{b}{b^2 + 4}.$$

Un point *maximum* correspond à

$$y = \tfrac{1}{4}, \quad x = \operatorname{Log} 2 - \tfrac{1}{4}.$$

L'axe des x est une asymptote. La courbe présente deux points d'inflexion ayant même ordonnée $y = \frac{1}{6}$.

La même question a été résolue par MM Morel, ingénieur au Creusot; Bellens, instituteur à Anvers; P. Decamps, étudiant à Gand; les solutions, purement analytiques, sont un peu moins simples que la précédente. — M. Déprez traite également quelques autres questions se rattachant à la même figure : enveloppes de l'axe, de la directrice et de la tangente au sommet de la parabole, lieu du centre de courbure de la parabole en son point de contact avec la logarithmique; l'équation de ce lieu est $y = 2e^{-x}$.

×Question 703.

(Voir *Mathesis* (2) I, p. 32.)

1° *Si le nombre* $N = 100\,a + 10\,b + c$ *est divisible par* 131, *il en est de même du nombre*

$$N' = (c - a)^2 + (3a - b)(3c - b)$$

et réciproquement.

2° *Si le nombre* $N = 100\,a + 10\,b + c$ *est divisible par* 107, *il en est de même de* $N' = (7a - c)^2 + 7b^2$ *et réciproquement.* (R. Perrin.)

Les mots « et réciproquement » sont de trop. L'énoncé a été copié *textuellement*.

Solution par M. E. Gelin. 1° La condition

$$100a + 10b + c \equiv \mathcal{M}\ 131 \quad \text{donne} \quad c \equiv \mathcal{M}\ 131 - 100a - 10b;$$

d'où

$$N' = (\mathcal{M}\ 131 - 101a - 10b)^2 + (3a - b)(\mathcal{M}\ 131 - 300a - 31b)$$

$$\equiv \mathcal{M}\ 131 + (30a - 10b)^2 + (3a - b)(-300a + 100b)$$

$$\equiv \mathcal{M}\ 131 + 100(3a - b)^2 - 100(3a - b)^2 \equiv \mathcal{M}\ 131.$$

La réciproque n'est pas vraie, comme on peut le vérifier sur le nombre 425 Si elle était vraie, comme la condition

$$(c - a)^2 + (3a - b)(3c - b) \equiv \mathcal{M}\ 131$$

est symétrique par rapport à c et a, on aurait non seulement

$$100a + 10b + c \equiv \mathcal{M}\ 131,$$

mais aussi

$$100c + 10b + a \equiv \mathcal{M}\ 131, \quad \text{d'où} \quad c - a \equiv \mathcal{M}\ 131,$$

et par suite

$$(3a - b)(3c - b) \equiv \mathcal{M}\ 131,$$

et même

$$3a - b \quad \text{ou} \quad 3c - b \equiv \mathcal{M}\ 131,$$

et en combinant avec $3(c - a) \equiv \mathcal{M}\ 131$,

$$3c - b \quad \text{ou} \quad 3a - b \equiv \mathcal{M}\ 131.$$

Les trois nombres $c - a$, $3a - b$, $3c - b$ seraient donc multiples de 131.

2° La condition

$$100a + 10b + c \equiv \mathcal{M}\ 107 \quad \text{donne} \quad c \equiv \mathcal{M}\ 107 - 100a - 10b;$$

donc

$$N' \equiv (7a - c)^2 + 7b^2 \equiv (\mathcal{M}\ 107 + 10b)^2 + 7b^2 \equiv \mathcal{M}\ 107.$$

On peut vérifier sur le nombre 394 que la réciproque est fausse.

Solution par M. Emmerich. 1° En sous-entendant le module 131, on a

$$N \equiv -31a + 10b + c \equiv c - a - 10(3a - b).$$
$$N \equiv 100a + 10b - 130c \equiv -100(c - a) - 10(3c - b),$$

d'où, respectivement,

$$10(c - a)N \equiv 10(c - a)^2 - 100(c - a)(3a - b),$$
$$-(3a - b)N \equiv 100(c - a)(3a - b) + 10(3a - b)(3c - b),$$

et par addition

$$(-13a + b + 10c)N \equiv 10\{(c - a)^2 + (3a - b)(3c - b)\} = 10N'.$$

Donc, si $N \equiv 0$, on a $N' \equiv 0$; mais la congruence $N' \equiv 0$ entraîne, soit $N \equiv 0$, soit $-13a + b + 10c \equiv 0$. La réciproque est donc fausse, comme on peut le voir aussi sur l'exemple $a = 10$, $b = -1$, $c = 0$

2° De même, en sous-entendant le module 107, on a

$$N \equiv -7a + 10b + c \equiv -(7a - c) + 10b,$$
$$10N \equiv -70a - 7b + 10c \equiv -10(7a - c) - 7b;$$

d'où l'on tire, respectivement,

$$(7a - c)N \equiv -(7a - c)^2 + 10b(7a - c),$$
$$10bN \equiv -10b(7a - c) - 7b^2.$$

En additionnant, on trouve

$$(7a + 10b - c)N \equiv -(7a - c)^2 - 7b^2 \equiv -N'.$$

Donc, si $N \equiv 0$, on a $N' \equiv 0$; mais si $N' \equiv 0$, on a $N \equiv 0$, ou $7a + 10b - c \equiv 0$.

Prenant $a = 1$, $b = 10$, $c = 0$, on voit également que la réciproque est fausse.

Ont résolu la même question MM. Russo, Knops, Mandart et Decamps.

×Question 706.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 79.)

On donne un tétraèdre ABCD *et une droite m. Des plans parallèles menés par* A, B, C, D *rencontrent m aux points* A', B', C', D' *par lesquels on mène des plans respectivement parallèles aux faces* BCD, CDA, DAB ABC. *Démontrer que le tétraèdre* A''B''C''D'' *formé par ces nouveaux plans est symétriquement égal au tétraèdre* ABCD. (J. Neuberg.)

Solution analytique par M. Déprez. Sans nuire à la généralité on peut faire passer la droite *m* par le sommet D. Si l'on adopte pour axes

DA, DB, DC et qu'on pose DA $= a$, DB $= b$, DC $= c$, les équations de trois plans parallèles menés par A, B, C sont

$$\lambda(x-a)+\mu y+\nu z=0,\quad \lambda x+\mu(y-b)+\nu z=0,\quad \lambda x+\mu y+\nu(z-c)=0.$$

Cherchons les coordonnées des intersections de ces plans avec la droite m que nous représentons par $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$; il nous suffit même de connaître le x de la première intersection, le y de la seconde, le z de la troisième ; ces coordonnées sont

$$x=\frac{\lambda a\alpha}{\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma},\quad y=\frac{\mu b\beta}{\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma},\quad z=\frac{\nu c\gamma}{\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma}.$$

Ce sont là, évidemment, les coordonnées du point D'' ; on voit immédiatement qu'elles vérifient l'équation $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Donc D'' est situé dans le plan ABC. Comme le plan A''B''C'' est parallèle au plan ABC et passe par le point D', qui est confondu avec D, les tétraèdres A''B''C''D'', ABCD ont même hauteur ; leurs faces étant parallèles et les hauteurs égales, parallèles et de sens contraires, les deux polyedres sont symétriquement égaux.

Remarque. Donnons à la droite m une position quelconque, et soient

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma},$$

ses équations. En opérant comme tantôt on trouve pour les coordonnées de D''

$$x=x_0+\frac{\lambda a\alpha-\alpha\Sigma\lambda x_0}{\Sigma\lambda\alpha},\quad y=y_0+\frac{\mu b\beta-\beta\Sigma\lambda x_0}{\Sigma\lambda\alpha},\quad z=z_0+\frac{\nu c\gamma-\gamma\Sigma\lambda x_0}{\Sigma\lambda\alpha}.$$

Si entre ces trois égalités on élimine λ, μ, ν on obtient l'équation du lieu décrit par le point D'' lorsque la direction des plans parallèles menés par A, B, C, D change. Ce lieu est un plan.

QUESTIONS D'EXAMEN.

490. Un nombre est divisible par 37 lorsque le quadruple du chiffre des unités augmenté du triple du nombre formé par les autres chiffres est divisible par 37.

Soit $N=10a+b$ le nombre ; on a $4N=40a+4b=37a+(3a+4b)$, etc.

491. Lorsque le centre du cercle des neuf points du triangle ABC est situé sur le côté BC, la différence des angles B et C est égale à 90°.

En effet, le milieu du segment AH de la hauteur AA' est sur BC, etc.

492. Un cercle variable touche les côtés de l'angle donné XOY aux points A, B. D'un point fixe C de la droite OX, on mène une seconde tangente CD. Démontrer que la corde BD passe par un point fixe.

(BOURRIENNE.)

Si E est le centre du cercle, P le point de rencontre de BD avec la bissectrice OE de l'angle, XOY, on démontre que CP est perpendiculaire à OE.

493. Soient α, β, γ les longueurs des tangentes communes à deux des circonférences décrites sur les côtés du triangle ABC comme diamètres. Exprimer les côtés a, b, c en fonction de α, β, γ.

On part des équations

$$4x^2 = a^2 - (b-c)^2, \quad \text{ou} \quad x^2 = (p-b)(p-c).$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

***721.** Éliminer x et y entre les équations

$$a\cos x + b\cos y = 1, \quad a\sin x + b\sin y = 1,$$

$$\sin 2x - \sin 2y = c^2(a^2 - b^2).$$ (TUCKER.)

722. Soit O le milieu de la distance des points doubles de deux séries projectives superposées, déterminées par les trois couples de points correspondants m_1m_2, m_2m_3, m_3m_1. Si μ_2, μ_3, sont les milieux des segments m_1m_3, m_1m_2, démontrer que

$$(Om_1m_2m_3) = -\frac{\mu_2m_2}{\mu_3m_3}.$$ (Ct. SERVAIS.)

723. Soient CA, CB deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse, et F l'un des foyers; on construit le parallélogramme FAVB. Démontrer 1° que la droite CV est dirigée suivant la bissectrice de l'angle AVB; 2° que $CV^2 = 2\,VA.VB$; 3° que le lieu du point V est une ellipse quand on fait varier le système des diamètres conjugués. — Étendre ces propriétés à l'hyperbole. (LAISANT.)

***724.** Deux circonférences A, B se coupent aux points C, D. Mener par un point donné E une droite telle que le segment intercepté sur cette ligne par les deux circonférences A, B soit vu du point C sous un angle donné γ. (MAURICE.)

SUR LES FOYERS DES CONIQUES;

par M. P. H. SCHOUTE, professeur à l'Université de Groningue.

1. Nous chercherons les foyers d'une conique au moyen de la condition que deux droites rectangulaires menées par un foyer soient conjuguées l'une à l'autre. Supposons la conique donnée par l'équation

$$A_u^2 \equiv (A_1u + A_2v + A_3)^2$$
$$\equiv A_{11}u^2 + 2A_{12}uv + A_{22}v^2 + 2A_{13}u + 2A_{23}v + A_{33} = 0,$$

où u, v sont des coordonnées tangentielles, qui sont liées de la manière ordinaire à un système rectangulaire de coordonnées ponctuelles x, y. Nous nous servirons de ces deux systèmes de coordonnées, à la fois.

Soit (x', y') un foyer de la conique donnée et (u', v') une droite quelconque par ce point, de manière qu'on ait

$$u'x' + v'y' + 1 = 0. \qquad (1)$$

La droite (u', v') est la polaire du point

$$A'_uA_u \equiv (A_1u' + A_2v' + A_3)(A_1u + A_2v + A_3) = 0,$$

c'est-à-dire du point

$$x = \frac{A_1A'_u}{A_3A'_u}, \quad y = \frac{A_2A'_u}{A_3A'_u}.$$

Donc l'équation de la droite qui joint ce point au point (x', y'), est

$$A'_u \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette droite est perpendiculaire à la droite (u', v') sous la condition

$$A'_u \{ u'(A_2 - A_3y') + v'(A_3x' - A_1) \} = 0; \qquad (2)$$

comme l'équation (2) doit être une identité pour toutes les valeurs de u', v', qui vérifient l'équation (1), la conique (2) en u', v' doit se composer du point (1) en u', v' et d'un autre point. Mais le premier membre de (2) ne contient pas de terme constant. Nous pouvons donc poser

$$A'_u \{ u'(A_2 - A_3y') + v'(A_3x' - A_1) \} \equiv (u'x' + v'y' + 1)(\lambda u' + \mu v'),$$

où λ et μ sont des paramètres inconnus. Cette équation donne les conditions suivantes :

$$\frac{\lambda x'}{A_{12} - A_{13}y'} = \frac{\mu y'}{-A_{12} + A_{23}x'} = \frac{\lambda y' + \mu x'}{A_{22} - A_{11} + A_{13}x' - A_{23}y'}$$
$$= \frac{\lambda}{A_{23} - A_{33}y'} = \frac{\mu}{-A_{13} + A_{33}x'}.$$

Enfin l'élimination de λ et μ donne en supprimant les accents de x' et y'

$$\left.\begin{aligned} A_{33}xy - A_{23}x - A_{13}y + A_{12} &= 0 \\ A_{33}(x^2 - y^2) - 2A_{13}x + 2A_{23}y + A_{11} - A_{22} &= 0 \end{aligned}\right\}; \qquad (3)$$

ces deux équations prouvent que les foyers de la conique donnée sont les points d'intersection de deux hyperboles équilatères concentriques, pour lesquelles les asymptotes de l'une coïncident avec les axes de l'autre. Ces quatre points se trouvent donc sur deux diamètres de ces courbes. Et d'après le théorème qui dit que les quatre points d'intersection de deux hyperboles équilatères sont de quatre manières les sommets et l'orthocentre d'un triangle, ces deux diamètres sont des diamètres rectangulaires. Mais de deux diamètres rectangulaires l'un rencontre l'hyperbole équilatère en deux points réels, tandis que l'autre la rencontre en deux points imaginaires. Soient F et F_1 les foyers réels, G et G_1 les foyers imaginaires, O le centre commun des deux hyperboles équilatères. Comme $OF = F_1O$ et $OG = G_1O$ les droites imaginaires FG et F_1G_1 sont parallèles; mais d'après le théorème cité elles sont rectangulaires. Donc FG et F_1G_1 passent par un des points cycliques, etc.

Les coordonnées du centre commun des hyperboles équilatères, qui est en même temps le centre de la conique donnée, sont

$$x = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \quad y = \frac{A_{23}}{A_{33}}.$$

La conique du faisceau (3), qui passe par ce point, fait donc connaître les axes de la conique donnée, etc.

2. Ce que nous venons de trouver, nous permet d'écrire immédiatement l'équation ponctuelle de la cubique, qui est le lieu des foyers d'un faisceau tangentiel de coniques. En effet, remplaçons $A_{ik}^2 = 0$ par $B_{ik}^2 + \lambda C_{ik}^2 = 0$ et les équations (3) deviennent

$$B_{33}xy - B_{23}x - B_{13}y + B_{12} + \lambda(C_{33}xy - C_{23}x - C_{13}y + C_{12}) = 0,$$
$$B_{33}(x^2 - y^2) - 2B_{13}x + 2B_{23}y + B_{11} - B_{22}$$
$$+ \lambda\{C_{33}(x^2 - y^2) - 2C_{13}x + 2C_{23}y + C_{11} - C_{22}\} = 0.$$

En éliminant λ on trouve donc

$$\begin{vmatrix} xy - B_{23}x - B_{13}y + B_{12}, & B_{33}(x^2 - y^2) - 2B_{13}x + 2B_{23}y + B_{11} - B_{22} \\ xy - C_{23}x - C_{13}y + C_{12}, & C_{33}(x^2 - y^2) - 2C_{13}x + 2C_{23}y + C_{11} - C_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation représente une cubique; car les termes du quatrième ordre se détruisent. Les termes du troisième ordre sont

$$- B_{33} \begin{vmatrix} 2xy, & C_{23}x + C_{13}y \\ x^2 - y^2, & C_{13}x - C_{23}y \end{vmatrix} + C_{33} \begin{vmatrix} 2xy, & B_{23}x + B_{13}y \\ x^2 - y^2, & B_{13}x - B_{23}y \end{vmatrix},$$

ou

$$(x^2 + y^2)\{(B_{33}C_{23} - B_{23}C_{33})x - (B_{33}C_{13} - B_{13}C_{33})y\}.$$

Donc la cubique en question est une cubique circulaire. Le facteur linéaire

$$(B_{33}C_{23} - B_{23}C_{33})x - (B_{33}C_{13} - B_{13}C_{33})y$$

fait connaître la direction de l'axe de la parabole comprise dans le faisceau.

Si le faisceau est un faisceau de paraboles, B_{33} et C_{33} sont nuls et les termes du troisième ordre se détruisent également. Donc le lieu des foyers des paraboles inscrites dans un triangle donné est une conique. Ce résultat est connu; car le cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes d'une parabole passant par le foyer, le lieu des foyers des paraboles inscrites à un triangle donné est le cercle circonscrit au triangle. Effectivement, les termes du second degré

$$4 \begin{vmatrix} B_{23}x + B_{13}y, & C_{23}x + C_{13}y \\ B_{13}x - B_{23}y, & C_{13}x - C_{23}y \end{vmatrix}$$

admettent le facteur $x^2 + y^2$, etc.

Si les coniques du faisceau tangentiel sont concentriques, on a

$$\frac{B_{13}}{C_{13}} = \frac{B_{23}}{C_{23}} = \frac{B_{33}}{C_{33}}.$$

Dans ce cas, le lieu des foyers se réduit à la conique

$$\begin{vmatrix} {}_{13}xy - B_{23}x - B_{13}y + B_{12}, & B_{33}(x^2 - y^2) - 2B_{13}x + 2B_{23}y + B_{11} - B_{12} \\ B_{33}C_{12} - B_{12}C_{33}, & B_{33}(C_{11} - C_{22}) - (B_{11} - B_{22})C_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

hyperbole équilatère, concentrique aux coniques du faisceau, etc.

Nous remarquons que la cubique circulaire, que nous avons engendrée au moyen de deux faisceaux projectifs d'hyperboles équilatères a

été trouvée géométriquement par M. Schroeter comme le lieu des points d'intersection des éléments correspondants de deux faisceaux projectifs de cercles. Au sujet de cette courbe, voir les articles suivants :

STEINER, *Journal de Crelle*, t. 45, p. 375; SCHRÖTER, *Mathematische Annalen*, t. 5, p. 50 ; PELZ, *Sitzungsberichte von Wien*, II, t. 64, p. 730; HERMES, *Journal de Crelle*, t. 97, p. 177; NEUBERG, *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. 1, p. 76 ; SCHOUTE, *Journal de Crelle*, t. 99, p. 98.

SUR LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DÉTERMINÉS PAR LA MÉTHODE DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES ;

(Extrait d'une lettre de M. G. DE LONGCHAMPS.)

A propos des deux exercices que vous avez aimablement cités à la p. 127 du n° de mai 1890, voulez-vous me permettre d'appeler votre attention sur la méthode que j'ai cherché à mettre en lumière, dans la petite note à laquelle vous avez emprunté les exercices en question.

Lorsque, dans un problème déterminé, deux inconnues x, y vérifient simultanément deux équations :

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0, \tag{1}$$

on fait partout la remarque évidente qu'en considérant x, y comme des coordonnées courantes, ces quantités x, y seront les coordonnées des points communs aux deux courbes U, V qui correspondent aux équations précédentes. Mais il arrive, le plus souvent, que cette méthode, qui ne laisse rien à désirer au point de vue de la théorie, devient impraticable, ou tout au moins compliquée, par suite du degré élevé des courbes considérées. L'idée, fort simple d'ailleurs, que j'ai voulu signaler dans la note citée est la suivante. Au lieu de construire les courbes U, V posons

$$x = f_1(X), \quad y = f_2(Y); \tag{2}$$

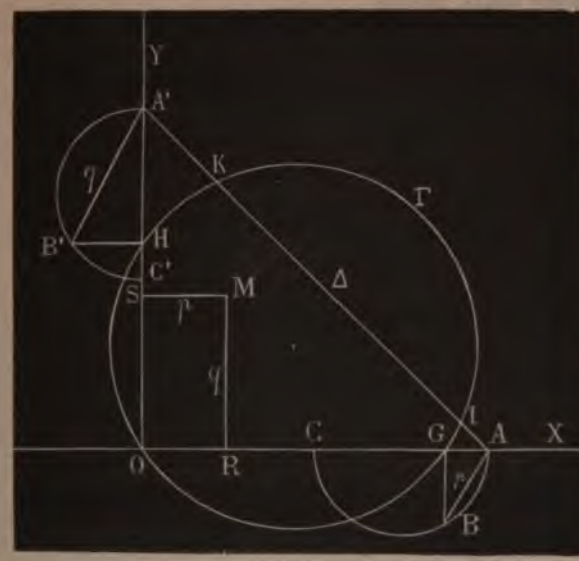
en choisissant $f_1(X)$, $f_2(Y)$ de façon à obtenir des équations plus simples que celles auxquelles a conduit la solution du problème envisagé. Alors, en déterminant les points communs aux courbes qui correspondent aux équations :

$$f\{f_1(X), f_2(Y)\} = 0, \quad \varphi\{f_1(X), f_2(Y)\} = 0,$$

on aura ensuite les inconnues principales x, y au moyen des formules (2).

Au fond, c'est la méthode, éternellement féconde, des transformations; méthode appliquée aux problèmes déterminés. L'exemple suivant fera peut-être mieux comprendre l'utilité de cette très petite remarque.

Je prends la question 440 de la p. 126 (*Mathesis*, t. X). Il s'agit, *deux droites rectangulaires* OX, OY *étant données, de mener par un point*



donné M, *pris dans le plan* XOY, *une transversale rencontrant* OX, OY *en des points* N, P *tels que*

$$\overline{MN}^2 + \overline{MP}^2 = a^2.$$

Posons

$$MN = u, \quad MP = v;$$

nous avons

$$u^2 + v^2 = a^2, \tag{3}$$

puis

$$\frac{q^2}{u^2} + \frac{p^2}{v^2} = 1\,(*). \tag{4}$$

Si l'on voulait obtenir u, v par la méthode qu'on pourrait appeler la ***méthode cartésienne***, il faudrait considérer u, v comme des coordonnées courantes et chercher l'intersection du cercle (3), avec la Kreuzcurve (4);

(*) p, q sont les coordonnées de M, dans le système XOY.

une pareille construction n'est pas simple. On peut même dire que ce procédé est inacceptable, dans un problème dépendant de la géométrie du compas et qui, par conséquent, doit être résolu avec la ligne droite et la circonférence.

C'est alors que l'on peut introduire l'idée des transformations. Ainsi, dans l'exemple traité, posons

$$\frac{q^2}{u^2}=\frac{X}{\lambda},\quad \frac{p^2}{v^2}=\frac{Y}{\lambda'}; \tag{F}$$

λ, λ' désignant deux paramètres dont nous disposerons tout à l'heure, de façon à produire certaines simplifications. Les équations (3), (4) deviennent

$$\frac{q^2\lambda}{X}+\frac{p^2\lambda'}{Y}=\varepsilon^2, \tag{3'}$$

$$\frac{X}{\lambda}+\frac{Y}{\lambda'}=1. \tag{4'}$$

Ainsi, grâce à la transformation qui correspond aux formules (F), nous sommes ramenés à trouver l'intersection d'une droite et d'une hyperbole équilatère passant par l'origine.

Un grand nombre de problèmes du second degré, ou de ceux qui s'y rattachent (*problèmes quadratiques*, comme disent, je crois, les Anglais) peuvent être, par la méthode analytique, ramenés à la détermination de l'intersection d'une droite Δ et d'une conique. Or, comme on sait, cette intersection peut être obtenue en remplaçant la conique par un cercle Γ passant par un point arbitraire; l'origine, par exemple.

Mais les développements, exigés par cette méthode, sont d'un ordre qui n'est pas assez élémentaire; il y a intérêt à dégager la solution du problème de ces considérations.

Revenons à la question particulière qui nous occupe. D'après ce que nous avons expliqué, il faut d'abord construire les valeurs X, Y qui vérifient les équations (3'), (4'). Celles-ci donnent, successivement,

$$0=\frac{X^2}{\lambda}-\frac{XY}{\lambda}-X=\frac{X^2}{\lambda}+\frac{p^2\lambda X+q^2\lambda Y}{\varepsilon^2\lambda}-X, \tag{5}$$

$$0=\frac{XY}{\lambda}+\frac{Y^2}{\lambda'}-Y=\frac{p^2\lambda' X+q^2\lambda Y}{\varepsilon^2\lambda}+\frac{Y^2}{\lambda'}-Y. \tag{6}$$

Des relations 5, 6 nous tirons alors

$$X^2+Y^2+\frac{X}{\varepsilon^2\lambda}(p^2\lambda^2+p^2\lambda'^2-\varepsilon^2\lambda^2)+\frac{Y}{\varepsilon^2\lambda'}(q^2\lambda^2+q^2\lambda'^2-\varepsilon^2\lambda'^2)=0.$$

Cette équation représente la circonférence Γ, à laquelle nous avons fait tout à l'heure allusion, circonférence qui passe par les points cherchés et par l'origine(*). Nous pouvons maintenant disposer des paramètres h, h' de façon à simplifier le tracé de Γ. A cet effet, prenons

$$h = h' = a.$$

Les inconnues auxiliaires X, Y représentent alors les solutions communes aux équations :

$$(\Delta) \qquad X + Y = a,$$

$$(\Gamma) \qquad X^2 + Y^2 + X\left(\frac{2p^2}{a} - a\right) + Y\left(\frac{2q^2}{a} - a\right) = 0(**).$$

A la première correspond une droite AA', obtenue en prenant OA et $OA' = a$; l'autre, représente une circonférence Γ, construite comme l'indique la figure. On a pris, à cet effet, $OC = OC' = \frac{1}{2}a$. Sur AC, on décrit une demi-circonférence et l'on projette en AG, sur OX, une corde AB de longueur p. Le point H étant déterminé d'une façon analogue, Γ est la circonférence circonscrite au triangle OGH; elle coupe AA' aux points cherchés.

Après avoir déterminé X, Y, les inconnues principales U, V se construiront facilement au moyen des formules (F).

Permettez-moi une dernière remarque. La discussion, en général, se fait très simplement en suivant la méthode que nous indiquons ici et qui offre l'avantage, au moins dans un grand nombre de cas, de résoudre le problème, non par des formules compliquées, qui ne donnent, pour abou-

---

(*) Au point de vue pratique, il importe de faire passer la circonférence en question par l'origine, parce qu'elle est ainsi déterminée, quand on a trouvé les points où elle coupe les axes, sans qu'il soit nécessaire, ce qui est ordinairement assez long, de construire le rayon.

(**) On peut arriver plus rapidement à ce résultat en observant que les équations (3'), (4'), quand on y fait $h = h' = a$, donnent :

$$q^2Y + p^2X = aXY, \quad X + Y = a;$$

et, par suite,

$$2\frac{q^2}{a}Y + 2\frac{p^2}{a}X = 2XY = a^2 - X^2 - Y^2 = a(X + Y) - X^2 - Y^2.$$

Mais nous avons voulu indiquer la solution générale, celle qui correspond à une circonférence, dans l'équation de laquelle entrent deux paramètres arbitraires.

tir à la solution géométrique, rien de précis, rien de simple, pour mieux dire, mais au moyen d'une construction pouvant être effectuée rapidement. Ainsi dans l'exemple précédent, la réalité des quantités X, Y découle immédiatement de la remarque suivante : *la distance du centre de* Γ *à la droite* Δ *doit être plus petite que le rayon de* Γ.

En appliquant ce problème aux équations (Δ), (Γ) on retrouve le discriminant de l'équation bicarrée, considérée dans la solution indiquée, t. X, p. 126.

Pour que la méthode que nous avons indiquée dans le *Bulletin scientifique*, et que nous venons d'appliquer, comme on l'a vu, soit comprise, il suffit qu'elle s'adresse aux élèves connaissant la représentation cartésienne d'un point et aussi, mais sans autre développement, l'équation de la droite et celle de la circonférence ; c'est-à-dire, peu de chose. Je crois même que cette notion devrait, tant elle est simple et tant elle rencontre d'applications élémentaires, être introduite dans le cours de mathématiques élémentaires ; au moins dans celui qui s'adresse à ceux qui veulent poursuivre leurs études mathématiques.

NOTES MATHÉMATIQUES.

17. *A propos d'un problème d'Algèbre, dit le problème de l'héritage*(*). M. Mister nous remet une *cinquième solution* laquelle tient compte de *toutes les conditions* de l'énoncé et n'exige, partant, aucune vérification.

Quand un enfant vient prendre sa part, il prend d'abord une certaine somme puis la $n^{ième}$ partie d'un certain reste, que j'appellerai R_p, et laisse

$$\left(\frac{n-1}{n}\right) R_p.$$

Quand l'enfant suivant arrive pour prendre la sienne, il prend la même somme augmentée de a et la $n^{ième}$ partie d'un autre reste, R_{p+1}, et il laisse

$$\left(\frac{n-1}{n}\right) R_{p+1}.$$

(*) Des quatre manières de traiter le problème exposées dans *Mathesis*, p. 111-112, la première est correcte, la seconde est remarquable en ce qu'elle donne deux solutions, la troisième semble la plus facile ; la quatrième se trouve depuis longtemps dans le Traité d'Algèbre de M. Choquet (Note de M. E. Gelin).

Pour que deux enfants consécutifs quelconques aient la même part, il faut évidemment que les restes R_p et R_{p+1} satisfassent à l'équation

$$\frac{1}{n}R_p - \frac{1}{n}R_{p+1} = a$$

ou

$$R_p - R_{p+1} = na. \tag{1}$$

La différence entre les sommes laissées par deux enfants successifs constitue nécessairement la part d'un enfant; et, d'après ce qui précède, cette part aura pour valeur

$$\frac{n-1}{n}R_p - \frac{n-1}{n}R_{p+1} \quad \text{ou} \quad (n-1)a.$$

Le capital C laissé par le père se tire de l'équation

$$a + \frac{C-a}{n} = (n-1)a,$$

laquelle donne

$$C = (n-1)^2 a.$$

Le nombre des enfants s'en déduit.

On aurait pu, d'ailleurs, déterminer le nombre des enfants avant de connaître le capital. Soit x le nombre des enfants. Dans l'équation (1) faisons successivement $p = 1, 2, 3, \ldots\ldots x-1$; on aura cette suite d'égalités

$$\left\{\begin{array}{l} R_1 - R_2 = na, \\ R_2 - R_3 = na, \\ \ldots\ldots\ldots \\ R_{x-1} - R_x = na, \\ R_x = 0; \end{array}\right. \tag{2}$$

et en les ajoutant membre à membre et réduisant, on obtient

$$R_1 = (x-1)na.$$

Si l'on observe que le capital inconnu doit être égal, d'une part, à $R_1 + a$ et, d'autre part, à $(n-1)ax$, on aura pour déterminer le nombre x des enfants, l'équation

$$(n-1)ax = (x-1)na + a;$$

on en tire

$$x = n - 1.$$

Remarque. Si dans l'énoncé, au lieu de dire que le capital est entièrement partagé, on disait qu'il reste b francs pour les pauvres, la dernière des équations (2) devrait être remplacée par

$$\frac{n-1}{n} R_x = b,$$

ou

$$R_x = \frac{n}{n-1} b; \tag{3}$$

il en résulterait, en ajoutant ces équations membre à membre,

$$R_1 = (x-1)na + \frac{nb}{n-1};$$

et, pour déterminer le nombre des enfants on aurait l'équation

$$(n-1)ax + b = (x-1)na + a + \frac{nb}{n-1}, \tag{4}$$

laquelle donnerait

$$x = (n-1) - \frac{b}{a(n-1)}. \tag{5}$$

Pour que le problème soit possible, il faut que x soit entier, ce qui exige que b soit nul ou égal à un certain nombre de parts d'enfants.

8. *Propriétés de quadriques homothétiques de même centre* (par A. Mineur, professeur agrégé). Si l'on coupe deux surfaces homothétiques de même centre, par un plan de direction donnée, rencontrant ces surfaces suivant des ellipses, la différence des aires des sections ainsi déterminées reste constante quand le plan se déplace parallèlement à lui-même. — Ce théorème se démontre aisément en rapportant les deux surfaces à un système de diamètres conjugués dont deux sont parallèles au plan donné.

×9. *Addition à la solution de la question* 703 (p. 125). Si dans le 1°, $N = 425$, $N' = 131$, donc N' peut être divisible par 131, sans que N le soit. Dans le 2°, si $N = 394$, $N' = 856 = 8.107$; donc N' peut être divisible par 107, sans que N le soit.

QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT.

Définition et limite du produit de plusieurs quantités incommensurables.

1. *Définition du produit* $\lambda\mu\nu$ *de plusieurs nombres incommensurables* λ, μ, ν. Pour fixer les idées, nous supposerons λ, μ, ν positifs. 1° Soient l, m, n trois nombres commensurables variables croissants, et L, M, N trois nombres commensurables décroissants, ayant respectivement les nombres λ, μ, ν pour limites. On a donc

$$\lim (L - l) = 0, \quad \lim (M - m) = 0, \quad \lim (N - n) = 0.$$

2° Puisque l'on a

$$l < L, \quad m < M, \quad n < N,$$

on a aussi

$$lmn < LMN.$$

Ensuite, puisque l, m, n sont des quantités croissantes, il en est de même du produit lmn. Donc, d'après le principe fondamental de la théorie des limites(*), lmn a une limite finie ω.

3° Le produit LMN, supérieur à lmn, est décroissant comme chacun de ces facteurs; il a donc une limite finie Ω, d'après le principe fondamental de la théorie des limites.

4° $\Omega = \omega$. Car, soit s'il est possible, c un nombre commensurable compris entre ω et Ω, et tel, par conséquent, que l'on ait

$$lmn < c < LMN.$$

On déduit de là

$$c - lmn < LMN - lmn, \quad LMN - c < LMN - lmn.$$

Or,

$$\begin{aligned} LMN - lmn &= (LMN - lMN) + (lMN - lmN) + (lmN - lmn) \\ &= (L - l)\,MN + (M - m)\,lN + (N - n)\,lm. \end{aligned}$$

Si l'on suppose l, m, n, L, M, N inférieurs à une grandeur fixe P, on a donc

$$LMN - lmn < P^2\,[(L - l) + (M - m) + (N - n)].$$

La somme des quantités $L - l$, $M - m$, $N - n$, dont chacune devient et

---

(*) *Un nombre toujours croissant (ou toujours décroissant) a une limite finie ou infinie* (Voir *Mathesis*, t. V, pp. 193-196). La limite est finie, si la variable reste toujours inférieure, en valeur absolue, à une quantité finie donnée; ici, par exemple, lmn est toujours inférieure à l'une des valeurs de LMN.

reste aussi petite que l'on veut, jouit aussi de cette propriété, et il en est de même de son produit par P^2. Donc

$$LMN - lmn, \quad c - lmn, \quad LMN - c,$$

ont pour limite zéro, ou

$$c = \lim lmn, \quad c = \lim LMN,$$

c'est-à-dire $c = \omega$, $c = \Omega$, ce qui est contraire à l'hypothèse que ω et Ω sont inégaux. On a donc $\Omega = \omega$.

5° Les produits lmN, lMn, Lmn, lMN, LmN, LMn, intermédiaires entre lmn, LMN ont aussi ω pour limite(*).

6° En résumé, les huit produits

$$(l \text{ ou L}) \times (m \text{ ou M}) \times (n \text{ ou N})$$

ont une limite commune ω. Par conséquent, on peut donner la définition suivante :

Le produit $\lambda\mu\nu$ *des nombres incommensurables* λ, μ, ν *est la limite* ω *du produit des nombres commensurables* l ou L, m ou M, n ou N, *qui ont respectivement* λ, μ, ν *pour limite.*

2. *Le produit* $\lambda\mu\nu$ *est unique.* Soient l', m', n' trois nombres commensurables variables croissants, L', M', N' trois nombres commensurables décroissants ayant aussi respectivement λ, μ, ν, pour limites. On prouve, comme plus haut, que les huit produits

$$(l' \text{ ou L}') \times (m' \text{ ou M}') \times (n' \text{ ou N}')$$

ont une limite commune ω'. Je dis que $\omega' = \omega$. En effet, d'après la définition des nombres l, m, n; l', m', n'; L, M, N; L', M', N', on a

$$l' < L, \quad m' < M, \quad n' < N; \quad l < L', \quad m < M', \quad n < N'.$$

Par suite,

$$l'm'n' < LMN; \quad lmn < L'M'N',$$

et, d'après un principe de la méthode des limites(**),

$$\lim l'm'n' \leqq \lim LMN; \quad \lim lmn \leqq \lim L'M'N',$$

c'est-à-dire,

$$\omega' \leqq \omega, \quad \omega \leqq \omega',$$

relations d'où il résulte que $\omega' = \omega$.

(*) *Si deux quantités variables ont une limite commune, toute quantité intermédiaire a la même limite* (Voir, par exemple, *Mathesis*, VI, pp. 268-269).

(**) *La limite d'une variable toujours supérieure à une autre variable est égale ou supérieure à la limite de celle-ci* (Voir, par exemple, *Mathesis*, t. VI, pp. 269-271).

3. *Limite du produit* (uv ..... wt) *de variables finies, commensurables ou incommensurables.* La démonstration de la relation

$$\lim (uv \dots wt) = \lim u \times \lim v \times \dots \times \lim w \times \lim t \qquad (B)$$

donnée précédemment (*Mathesis*, pp. 113-115) s'applique seulement au cas où tous les nombres considérés sont commensurables.

Maintenant que nous avons établi le sens exact que l'on peut attribuer au produit de nombres incommensurables, elle peut être étendue, avec des modifications insignifiantes, au cas où l'une ou plusieurs des quantités $u, v, \dots w, t, uv \dots wt$, $\lim u$, $\lim v$, ..., $\lim w$, $\lim t$, $\lim (uv \dots wt)$ sont incommensurables. La relation (B) peut donc être régardée comme établie d'une manière générale. (P. M.)

BIBLIOGRAPHIE.

Compléments d'algèbre et notions de géométrie analytique, à l'usage des candidats à l'École de Saint Cyr et des élèves de mathématiques élémentaires qui se destinent aux mathématiques spéciales par A. Macé de Lépinay, ancien élève de l'École normale, Professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV. Second fascicule : Notions de géométrie analytique. Paris, Nony, 1891 (page 173-392). Prix des deux fascicules : 4 fr.

Nous avons donné le sommaire du premier fascicule dans le n° de février(*), pp. 40-41. Voici celui du second fascicule, qui est rédigé avec le même soin que le premier.

Ch. IV. *Des Projections.* 1. Segments positifs et segments négatifs. 2. Angles. 3. Projections quelconques. 4. Projections orthogonales. 5. Trois exercices.

Ch. V. *Des Coordonnées.* 1. Coordonnées rectangulaires. Équation de la circonférence, de l'ellipse, de l'hyperbole, de la parabole, de la cissoïde de Dioclès, de la strophoïde. 2. Transformation des coordonnées rectangulaires. Conditions pour qu'une équation du second degré représente une circonférence. 3. Classification des lignes planes. 4. Sept exercices.

Ch. VI. *De la ligne droite.* 1. Signification géométrique de l'équation du premier degré à deux variables. Équation de la ligne droite. 2. Diverses formes de l'équation de la ligne droite :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 ; \quad x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0 ; \quad \frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha} = \rho ;$$

$$y - y' = m(x - x') ; \quad \frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'} ;$$

$$Ax + By + C + \lambda (A'x + B'y + C') = 0, \text{ etc.}$$

(*) Les imperfections que nous avons signalées dans ce premier fascicule sont, pour ainsi dire, imposées par le programme, comme nous l'avons appris depuis.

Intersection de deux droites; conditions pour que trois droites soient concourantes, etc. 3. Angles et distances. Séparation du plan en deux régions de signe contraire par une droite. Application : Chercher dans quelles régions du plan doit se trouver le point de coordonnées x et y pour que l'on ait

$$(x+y-2)(x-2y+2)^2(y-2x-2)(x-2)^2 < 0.$$

4. Systèmes de droites représentés par $f(x)=0$, $f(x,y)=0$, la dernière relation étant supposée homogène. Angle, bissectrice des droites représentées par

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=0.$$

5. Tangentes et asymptotes. Tangente à la circonférence, aux courbes

$$y=ax^4+bx^2+c, \quad y(x^2+1)=x^2-x;$$

tangente à l'origine à une courbe dont l'équation est de la forme

$$y=x\varphi(x,y).$$

Asymptote de la courbe représentée par

$$(y-2x+1)^2=x^4-4x+3$$

et discussion de cette courbe. 5. Vingt et un exercices.

Ch. VII. *Des courbes du second degré.* 1. Classification des courbes du second degré par la résolution de l'équation, avec des exemples particuliers dans chaque cas principal. Marche à suivre quand les coefficients de l'équation dépendent d'un paramètre variable. Exemple : Chercher, suivant la valeur du paramètre λ, la nature des courbes représentées par l'équation

$$2(\lambda-1)x^2-4xy+\lambda y^2-8x-4y+12=0.$$

2. Réduction de l'équation générale du second degré aux formes simples par transformation des coordonnées. 3. Identité des courbes du second degré avec les courbes usuelles appelées ellipse, hyperbole, parabole. 4. Dix huit exercices, qui en comprennent en réalité quarante six.

L'ouvrage contient 195 figures dessinées avec soin.

Géométrie élémentaire par le P. H. LACOUTURE, S. J. Troisième édition. Paris, Retaux-Bray, 1891. (XIX-495 p. in-8°, avec nombreuses figures dans le texte). Prix, fr. 3,75.

Essai d'un manuel de géométrie assez élémentaire pour être employé dans les classes d'humanités, assez complet pour servir de base à l'enseignement des classes de mathématiques spéciales des lycées français. Voici le sommaire du livre qui donnera au lecteur une idée de l'arrangement des matières.

Préliminaires. I. *Figures élémentaires.* 1. Angle droit. 2-3. Triangles. 4. Triangles rectangles. 5. Parallèles. 6. Parallélogramme.

II. *Circonférence.* 1. Cordes, arc. 2. Droite et circonférence. 3. Positions relatives de deux circonférences. 4. Mesure des angles. 5. Construction des angles. 6. Construction des tangentes. 7. Construction de triangles et de polygones.

III. *Proportionnalité et similitude.* 1-2. Similitude. 3. Proportionnalité dans le

cercle. 4. Relations métriques dans le triangle. 5. Quadrilatère inscriptible. 6. Construction des formules algébriques, homogénéité, axe radical.

IV. *Polygones réguliers et circonférence.* A. 1. Polygones réguliers 2. Longueur de la circonférence. B. 1. Aire du triangle. 2. des polygones réguliers et du cercle.

V. *La droite et le plan.* 1. Le plan. 2. Parallélisme dans l'espace. 3. Droite et plans perpendiculaires. 4. Projections et perspectives. 5. Angles dièdres. 6. Angles polyèdres.

VI. *Polyèdres.* 1. Prismes. 2. Volume du prisme. 3. Pyramides. 4. Polyèdres (volume, symétrie, similitude, homothétie).

VII. *Surfaces et volumes des corps ronds.* 1. Cylindre et cône. 2. Sphère.

VIII. *Sphère et figures tracées sur la sphère.* 1. Sphère et plan. 2. Circonférences tracées sur la sphère. 3. Polygones sphériques.

IX. *Courbes tracées sur le cône et sur le cylindre.* 1. Ellipse. 2. Hyperbole. 3. Parabole. 4 Sections coniques. 5. Figures tracées sur le cylindre: ellipse et hélice.

Comme on le voit, ce nouveau manuel est fait à peu près sur le modèle des *Éléments de géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse, mais il leur est inférieur au point de vue du fond et de la forme. La *Géométrie élémentaire* du P. Lacouture n'est pas écrite, en effet, avec la précision qu'on est en droit d'attendre des auteurs venus après Legendre. En plusieurs endroits aussi, la nouvelle Géométrie laisse à désirer au point de vue de la rigueur. Ainsi les définitions relatives aux infiniment petits, aux infiniment grands, aux limites sont inexactes ou incomplètes. On peut aussi trouver à redire à la manière dont l'auteur parle du postulat de la parallèle unique.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 412.

(Voir *Mathesis*, (1), V, p. 23, (2), I, p. 29.)

Démontrer l'identité suivante :

$$\frac{m^p}{(1.2.3\ldots m)(1.2.3\ldots p)} = \mathrm{S}\frac{1}{(1.2.3\ldots\alpha)(1.2.3\ldots\beta)\ldots(1.2.3\ldots\lambda).2^{\gamma}(2.3)^{\delta}\ldots(2.3\ldots p)^{\lambda}}$$

le signe S ***portant sur toutes les valeurs entières, positives ou nulles, des quantités*** $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ ***qui vérifient les deux équations simultanées***

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda = m, \quad \beta+2\gamma+\cdots+p\lambda = p. \quad \text{(Weill.)}$$

Solution par M. G. Teixeira (directeur de l'École polytechnique de Porto). Le *Calcul différentiel* donne une démonstration de cette relation.

Partons de l'identité, qui est démontrée dans mon *Curso de Analyse*, t. I (*) (page 212 de la deuxième édition).

$$\Sigma \frac{p!}{\beta!\,\gamma!\dots\lambda!\,(2!)^{\gamma}\dots(p!)^{\lambda}} = \frac{1}{(m-\alpha)!}\left(\frac{d^p(e^x-1)^{m-\alpha}}{dx^p}\right)_0,$$

où Σ représente une somme qui se rapporte à toutes les solutions entières, positives ou nulles, des équations

$$\beta + 2\gamma + \dots + p\lambda = p, \quad \beta + \gamma + \dots \lambda = m - \alpha.$$

Cette identité donne

$$\Sigma \frac{1}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!\,(2!)^{\gamma}\dots(p!)^{\lambda}} = \frac{1}{\alpha!\,(m-\alpha)!\,p!}\left(\frac{d^p(e^x-1)^{m-\alpha}}{dx^p}\right)_0.$$

Si l'on donne maintenant à α les valeurs $0, 1, 2, \dots, m$ et si l'on fait l'addition des égalités résultantes, membre à membre, on trouve

$$\mathrm{S}\frac{1}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!\,(2!)^{\gamma}\dots(p!)^{\lambda}} = \frac{1}{p!}\Sigma\left[\frac{d^p}{dx^p}\left(\frac{1}{\alpha!\,(m-\alpha)!}(e^x-1)^{m-\alpha}\right)\right]_0$$

$$= \frac{1}{p!}\left[\frac{d^p}{dx^p}\Sigma\frac{(e^x-1)^{m-\alpha}}{\alpha!\,(m-\alpha)!}\right]_0 = \frac{1}{p!\,m!}\left[\frac{d^p}{dx^p}(e^x-1+1)^m\right]_0$$

$$= \frac{1}{p!\,m!}\left(\frac{d^p e^{mx}}{dx^p}\right)_0 = \frac{m^p}{m!\,p!}.$$

NOTE. Sur la formule qui sert de point de départ à M. Teixeira, ou plutôt sur une formule plus générale d'où l'on peut la déduire, voir *Mathesis*, 1881, (1), I, pp. 23-25. (P. M.)

Question 416.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 46.)

Soient O, O₁ deux circonférences qui se coupent en un point A. Trouver les lieux des centres, des foyers et l'enveloppe des axes des coniques osculatrices au cercle O en A et tangentes au cercle O₁. (DEWULF.)

Solution par M. [illegible]. Prenons pour axes des coordonnées la tangente et la normale au cercle O en A ; les équations des deux cercles seront

$$x^2 + y^2 - 2\rho y = 0, \quad x^2 + y^2 - ax - by = 0.$$

(*) L'un des meilleurs cours de calcul différentiel publiés récemment. La première édition a paru en 1887, la seconde en 1890 (l'auteur a écrit pour [illegible]). (P. M.)

Une conique osculatrice au cercle O en A a pour équation

$$x^2 + y^2 - dy - my(y - nx) = 0,$$

car les cordes communes sont AX et une droite passant par A ; nous remplaçons cette équation par

$$y^2 + \lambda yx + \mu x^2 - \mu dy = 0, \qquad (1)$$

λ et μ étant deux paramètres indéterminés.

Les coordonnées des points d'intersection de la conique avec le cercle O_1 vérifient l'équation suivante qui est une combinaison des équations de ces courbes :

$$(y^2 + \lambda xy + \mu x^2)(ax + by) - (x^2 + y^2)\mu dy = 0.$$

Divisant l'égalité (2) par x^3 et posant $\frac{y}{x} = K$, on obtient l'équation aux coefficients angulaires des droites joignant l'origine aux points d'intersection de la conique avec le cercle O_1 :

$$(b - \mu d)K^3 + (a + b\lambda)K^2 + (a\lambda + b\mu - d\mu)K + a\mu = 0. \qquad (2)$$

Pour qu'il y ait contact, deux racines doivent être égales. Représentons l'équation (2) par $AK^3 + BK^2 + CK + D = 0$; on sait que la condition d'égalité de deux racines est

$$(9AD - BC)^2 - 4(B^2 - 3AC)(C^2 - 3BD) = 0. \qquad (3)$$

Nous supposons qu'on y remplace A, B, C, D par les coefficients de l'équation (2).

Cela posé, les coordonnées du centre de la conique osculatrice vérifient les équations $\lambda y + 2\mu x = 0$, $2y + \lambda x - d\mu = 0$; d'où l'on tire

$$\mu = \frac{2y^2}{2x^2 + dy}, \quad \lambda = -\frac{4xy}{2x^2 + dy}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (3), nous aurons l'équation du lieu du centre.

Si l'on représente l'équation (1) par $f(x, y) = 0$, les coordonnées (x, y) du foyer de la conique osculatrice vérifient les équations

$$2\lambda f(x, y) = f'_x f'_y, \quad f'^2_x - f'^2_y = 4(\mu - 1)f(x, y),$$

desquelles on peut tirer λ, μ pour substituer les valeurs dans l'égalité (3). On aura ainsi l'équation du lieu du foyer.

Un axe de la conique a une équation de la forme $f'_x + pf'_y = 0$; son

coefficient angulaire $-\dfrac{2\mu+p\lambda}{\lambda+2p}$ doit vérifier l'équation

$$Bu^2+2(A-C)u-B=0,$$

où $A=\mu$, $B=\lambda$, $C=1$. Représentons l'équation de l'axe par $\alpha x+\beta y+1=0$; il sera facile de former, au moyen des valeurs de α et β et de la condition (3), une relation constante entre α et β; ce sera l'équation de l'enveloppe de l'axe en coordonnées tangentielles.

×Question 704 et 708.

(Voir *Mathesis*, (2) I, pp. 50 et 80.)

704. *Dans tout triangle* ABC

$$(a\operatorname{tg}B-2r)(b\operatorname{tg}C-2r)(c\operatorname{tg}A-2r)=(a\operatorname{tg}C-2r)(b\operatorname{tg}A-2r)(c\operatorname{tg}B.-2r),$$

r étant le rayon du cercle inscrit. (Mandart.)

708. $$(a\operatorname{tg}B-2\gamma)(b\operatorname{tg}C-2\alpha)(c\operatorname{tg}A-2\beta)=-(a\operatorname{tg}C-2\beta)(b\operatorname{tg}A-2\gamma)(c\operatorname{tg}B-2\alpha).$$

α, β, γ *étant les rayons des cercles exinscrits.* (E. Gelin.)

Solution par MM. Delahaye (à Roye, Somme) et Emmerich (Mulheim).
Au moyen des formules

$$a=2R\sin A,\quad r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

on trouve

$$a\operatorname{tg}B-2r=\frac{8R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos B}\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\cos B\sin\frac{C}{2}\right).$$

La parenthèse peut se transformer ainsi :

$$\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B}{2}-\left(\cos^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}$$
$$=\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin^2\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B-C}{2},$$

de sorte que

$$a\operatorname{tg}B-2r=\frac{8R\sin\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\cos B}.$$

On en conclut aisément que les deux membres de l'égalité de la question 704 ont pour valeur commune

$$\frac{8R^3 \sin^3\frac{A}{2}\sin^3\frac{B}{2}\sin^3\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}}{\cos A\cos B\cos C}.$$

De même pour la question 708,

$$a\,\mathrm{tg}\,B - 2\gamma = \frac{8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos B}\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} - \cos B\sin\frac{C}{2}\right)$$
$$= \frac{8R\cos\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{\cos B}, \text{ etc.}$$

Solution par M. François (la Haye).

$$a\,\mathrm{tg}\,B - 2r = a\,\mathrm{tg}\,B - 2(p-b)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}B = a(\mathrm{tg}\,B - \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}B) + (b-c)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}B$$
$$= \frac{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}B}{\cos B}[a + (b-c)\cos B] = \frac{b\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}B}{\cos B}(\cos C + \cos B).$$

On voit facilement qu'en portant cette valeur et les valeurs analogues dans l'égalité proposée, on trouve la même expression pour les deux membres.

Pour démontrer la relation de la question 708, observons que

$$a\,\mathrm{tg}\,B - 2\gamma = a\,\mathrm{tg}\,B - \frac{2S}{p-c} = a\,\mathrm{tg}\,B - \frac{ac\sin B}{p-c}$$
$$= \frac{a\,\mathrm{tg}\,B}{p-c}(p - 2c\cos^2\tfrac{1}{2}B), \text{ etc.}$$

Solution par MM. Decamps et Russo. Des égalités

$$\sin A = \frac{2S}{bc}, \quad \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

on déduit

$$\mathrm{tg}\,A = \frac{4S}{b^2+c^2-a^2};$$

donc

$$a\,\mathrm{tg}\,B - 2r = \frac{4aS}{a^2+c^2-b^2} - 2r = \frac{4arp}{a^2+c^2-b^2} - 2r = 2r(b+c)\frac{a+b-c}{a^2+c^2-b^2},$$

d'où la question 704.

De même,

$$a \operatorname{tg} B - 2\gamma = \frac{4aS}{a^2 + c^2 - b^2} - 2\gamma = \frac{4a(p-c)\gamma}{a^2 + c^2 - b^2} - 2\gamma$$

$$= 2\gamma(b-c)\frac{a+b+c}{a^2+c^2-b^2}, \text{ etc.}$$

M. MANDART a donné, de la question 708, une solution peu différente de celle qui précède; il signale aussi la relation :

$$(a \operatorname{tg} B + 2\alpha)(b \operatorname{tg} C + 2\beta)(c \operatorname{tg} A + 2\gamma) = (a \operatorname{tg} C + 2\alpha)(b \operatorname{tg} A + 2\beta)(c \operatorname{tg} B + 2\gamma), \quad (A)$$

comme traduction algébrique du théorème suivant : *Si, sur les médiatrices* A'O, B'O, C'O, *d'un triangle* ABC *on porte respectivement à partir des milieux* A', B', C' *des côtés et à l'extérieur, des longueurs* $A'A_1, B'B_1, C'C_1$ *égales à* α, β, γ, *les droites* AA_1, BB_1, CC_1 *se coupent au point de Gergonne du triangle.*

M. SOLLERTINSKY a donné de bonnes solutions des mêmes questions; il démontre aussi, très simplement, l'égalité (A) et les suivantes :

$$(a \operatorname{tg} B - 2\beta)(b \operatorname{tg} C - 2\gamma)(c \operatorname{tg} A - 2\alpha) = -(a \operatorname{tg} C - 2\gamma)(b \operatorname{tg} A - 2\alpha)(c \operatorname{tg} B - 2\beta),$$

$$\frac{(a \operatorname{tg} B - 2r)(b \operatorname{tg} C - 2r)(c \operatorname{tg} A - 2r)}{(a \operatorname{tg} C + 2\alpha)(b \operatorname{tg} A + 2\beta)(c \operatorname{tg} B + 2\gamma)} = \frac{r^3}{\alpha\beta\gamma}.$$

Solution par M. LEMOINE. 1° On a

$$a \operatorname{tg} B - 2r = \frac{ac \sin B}{c \cos B} - 2r = \frac{2pr}{c \cos B} - 2r$$

$$= \frac{2r}{c \cos B}(p - c \cos B) = \frac{r}{c \cos B}(a + b + c - 2c \cos B)$$

$$= \frac{r}{c \cos B}\left(b + c + \frac{b^2 - c^2}{a}\right) = \frac{2r(b+c)(p-c)}{ac \cos B}.$$

De là, on déduit facilement que les deux membres de l'égalité à établir ont pour valeur commune

$$\frac{r^3(b+c)(c+a)(a+b)}{2pR^3 \cos A \cos B \cos C} = \frac{4r^3(p^2 + 2Rr + r^2)}{p^2 - (2R + r)^2}.$$

On démontrerait de même la formule

$$(2x + a \operatorname{tg} B)(2x + b \operatorname{tg} C)(2x - c \operatorname{tg} A)$$
$$= (2x + a \operatorname{tg} C)(2x - b \operatorname{tg} A)(2x - c \operatorname{tg} B)$$

et les deux autres analogues.

2° On trouve aisément

$$a\,\mathrm{tg\,B} - 2\gamma = \frac{ac\sin \mathrm{B}}{c\cos \mathrm{B}} - 2\gamma = \frac{2(p-c)\gamma}{c\cos \mathrm{B}} - 2\gamma$$

$$= \frac{2\gamma}{c\cos \mathrm{B}}(p - c - c\cos \mathrm{B}) = \frac{\gamma}{c\cos \mathrm{B}}(a + b - c - 2c\cos \mathrm{B})$$

$$= \frac{\gamma}{c\cos \mathrm{B}}\left(b - c + \frac{b^2 - c^2}{a}\right) = \frac{2p\gamma(b-c)}{ac\cos \mathrm{B}}.$$

On en conclut que les deux membres de l'égalité à démontrer ont pour valeur commune

$$\frac{2p^3(b-c)(c-a)(a-b)}{2\mathrm{R}^2 r\cos \mathrm{A}\cos \mathrm{B}\cos \mathrm{C}} = \frac{2p^3(b-c)(c-a)(a-b)}{r[p^2 - (2\mathrm{R}+r)^2]}.$$

On démontrerait d'une façon semblable la formule

$$(a\,\mathrm{tg\,B} - 2\beta)(b\,\mathrm{tg\,C} - 2r)(c\,\mathrm{tg\,A} + 2\gamma)$$
$$= -(a\,\mathrm{tg\,C} - 2\gamma)(b\,\mathrm{tg\,A} + 2\beta)(c\,\mathrm{tg\,B} - 2r)$$

et les deux formules analogues.

×Question 705.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 50.)

On considère tous les triangles sphériques ABC, ***inscrits à un même petit cercle, ayant un sommet fixe*** A ***et dans lesquels la somme cos*** AB + ***cos*** AC ***a une valeur constante. Démontrer :*** 1° ***que le point de rencontre des médianes décrit un grand cercle ;*** 2° ***que la base*** BC ***enveloppe une ellipse sphérique.*** (Déprez.)

Solution par M. B. Sollertinsky. 1° En désignant les cordes AC, AB par b, c et le rayon de la sphère S par R, on a

$$\cos \mathrm{AB} + \cos \mathrm{AC} = 2 - 2\left(\sin^2\frac{\mathrm{AB}}{2} + \sin^2\frac{\mathrm{AC}}{2}\right) = 2 - \frac{1}{2\mathrm{R}^2}\left(b^2 + c^2\right);$$

donc la somme $(b^2 + c^2)$ est constante.

Soient M le milieu de la corde BC ; N le point de rencontre de la droite AM avec le cercle ABC. On a

$$b^2 + c^2 = 2(\overline{\mathrm{AM}}^2 + \overline{\mathrm{BM}}^2);$$

mais

$$\mathrm{AM}(\mathrm{AN} - \mathrm{AM}) = \overline{\mathrm{BM}}^2,$$

d'où

$$\mathrm{AM}.\,\mathrm{AN} = \overline{\mathrm{AM}}^2 + \overline{\mathrm{BM}}^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} = \text{const.}$$

497. Étant donnés deux cercles égaux, on mène deux rayons parallèles, AA′ et BB′, du même côté de la ligne des centres AB. Sur A′B′ comme diamètre, on décrit une circonférence C. Calculer le rayon x d'une circonférence qui touche les trois circonférences A, B, C.

Soient $AA' = r$, $AB = 2d$, angle $A'AB = \alpha$. Le centre X de la circonférence cherchée se trouve sur la perpendiculaire élevée au milieu D de AB. Le triangle XCD donne

$$(d - x)^2 = r^2 + (r + x)^2 - d^2 - 2r \sin\alpha \sqrt{(r + x)^2 - d^2}, \text{ etc.}$$ (G. Russo.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

×725. Au triangle ABC, on circonscrit un autre triangle A′B′C′. Soient α, β, γ, α', β', γ' les projections d'un point S sur les côtés des triangles ABC, A′B′C′. 1° Les trois cercles $\alpha\beta'\gamma'$, $\beta\gamma'\alpha'$, $\gamma\alpha'\beta'$ concourent en un même point I. 2° Une circonférence quelconque Δ passant par S, I rencontre les premières circonférences aux points α'', β'', γ''; soit S′ le point de Δ diamétralement opposé à S. Les droites $S'\alpha''$, $S'\beta''$, $S'\gamma''$ rencontrent les côtés correspondants de ABC en trois points situés sur une droite passant par S. (Sollertinsky.)

×726. Vérifier l'identité

$$3^n - \left[\frac{n}{1}\right]^2 3^{n-1} + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 3^{n-2} - \cdots \mp 1$$

$$= 4^n - \frac{n}{1} C_{n+1,n} 4^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} C_{n+2,n} 4^{n-2} - \cdots \mp C_{2n,n}.$$ (E. Catalan.)

×727. Soient A′B′C′, A″B″C″ deux triangles inscrits au triangle ABC et homologiques avec ce dernier. Soient A‴, B‴, C‴ les intersections des côtés homologues des triangles A′B′C′, A″B″C″. Démontrer que le triangle [illegible] est homologique avec chacun des triangles ABC, [illegible]. (Lachlan.)

728. Trouver dans le plan d'un triangle ABC un point P tel que les puissances des points A, B, C par rapport aux cercles BCP, CAP, ABP soient proportionnelles à trois quantités données α, ζ, γ.

Rectifications. [illegible] $1 - K^2$ au lieu de $(1 + K)$: [illegible] au lieu de $c^2 - f^2 - c^2$. Page 124, question [illegible] des centres de courbure de [illegible]

SUR UNE CLASSE PARTICULIÈRE DE TRIANGLES;

par M. H. Brocard.

Au congrès de l'Association britannique pour l'avancement des sciences, tenu à Cheltenham en 1856, J. Booth a présenté un mémoire sur la Trigonométrie de la Parabole et sur l'origine géométrique des logarithmes.

Ce travail, qui a valu une juste célébrité à son auteur, renferme un tableau comparatif des formules fondamentales des trigonométries du cercle et de la parabole.

M. le professeur S. Günther a repris et complété l'étude de J. Booth et en a publié les résultats en 1882 dans un ouvrage traitant des logarithmes paraboliques et de la trigonométrie parabolique. Celle-ci est la trigonométrie basée sur la parabole et sur la strophoïde droite, de même que les autres trigonométries planes sont basées sur le cercle et sur l'hyperbole équilatère. C'est pourquoi J. Booth, qui avait fait une étude approfondie de la strophoïde, proposa de lui donner le nom de logocyclique, rappelant ainsi à la fois les relations de cette courbe avec la logarithmique et avec le cercle (voir N. A. M. (1) XX, 1861, p. 82-83, suppl. note de B. Tortolini).

Chacune de ces trigonométries possède des formules de transformation qui offrent de remarquables analogies, et dans l'ouvrage précité, M. Günther a eu l'ingénieuse idée d'établir ce rapprochement dans un tableau synoptique, imité de celui de J. Booth, avec l'adjonction des formules de la trigonométrie hyperbolique (voir aussi *Mathesis*, t. III, p. 134).

Après la trigonométrie du cercle, sur laquelle tout paraît avoir été dit, celle qui a fait le plus de progrès est la trigonométrie de l'hyperbole équilatère, grâce aux travaux importants dont elle a été l'objet de la part de plusieurs géomètres presque tous contemporains. Nous croyons que l'étude de la trigonométrie de la parabole fournirait pareillement matière à d'intéressantes recherches; car il serait à désirer, par exemple, que l'interprétation géométrique des formules y fût aussi développée que dans la trigonométrie du cercle, et il ne nous semble pas que ce résultat ait été obtenu pour certaines expressions qui se rencontrent dans quelques-unes de ces formules.

Il est remarquable que plusieurs de ces expressions interviennent très naturellement dans l'étude d'un problème très simple de géométrie, indépendant des propriétés de la parabole.

Le présent article a pour objet de signaler ce problème à la curiosité des géomètres, afin de les engager à chercher d'autres questions semblables, dont l'étude pourra les conduire à de nouveaux résultats relatifs à la trigonométrie parabolique.

*

Le problème que nous avons rencontré est le suivant : ***Trouver le lieu des centres de gravité des triangles ayant un angle constant et même cercle inscrit (ou ex-inscrit).***

Cherchons, d'abord, le lieu géométrique des milieux des bases de ces triangles opposées à l'angle constant donné.

En rapportant ces triangles à deux diamètres rectangulaires du cercle dont l'un passe par le sommet fixe, on adopte, croyons-nous, le système d'axes le plus simple.

Les trois tangentes qui représentent les côtés du triangle ont alors même forme d'équation.

Si l'on désigne par a le rayon du cercle et par m le coefficient d'inclinaison, une tangente a pour équation

$$y = mx + a\sqrt{1 + m^2}$$

ou

$$y = x \operatorname{tg} \varphi + a \operatorname{séc} \varphi. \qquad (1)$$

On reconnaît déjà le type d'équations qui se rencontrent dans l'étude de la logocyclique. On a, en effet (*loc. cit.*, p. 36, ou *Mathesis*, t. I, p. 81) la relation

$$r = a(\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{séc} \varphi). \qquad (2)$$

Or, $a(\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{sec} \varphi)$ est l'ordonnée du point de la droite AB dont l'abscisse est a, c'est-à-dire GL. Si donc on mène OM parallèle à AB et égale à GL, le lieu des points M sera une strophoïde droite (ou logocyclique) ayant O pour sommet et G pour point double ; cette courbe est donc représentée par l'équation (2), O étant le pôle et OG l'axe polaire. On peut aussi remarquer que B'L = OM, MN = NG.

On peut encore mener GL' parallèle à AL et égale à GL. Le lieu des points L' est la même strophoïde transportée de O en G.

Les coordonnées des points B, C d'intersection des tangentes fixes

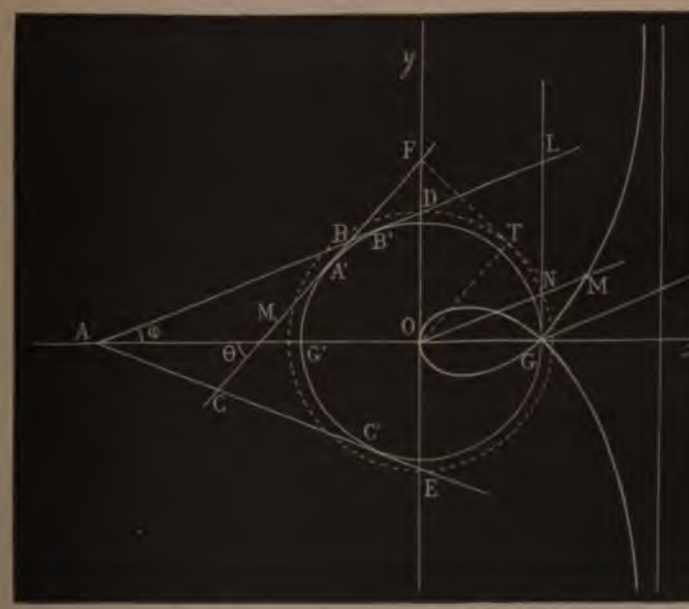
AB $(+\varphi)$, AC $(-\varphi)$, avec la tangente variable BC (θ) résulte équations de ces lignes :

$$y = x \operatorname{tg} \varphi + a \sec \varphi,$$
$$y = -x \operatorname{tg} \varphi - a \sec \varphi,$$
$$y = x \operatorname{tg} \theta + a \sec \theta.$$

La résolution des équations (3) et (5) donne

$$x_B = a \frac{\sec \theta - \sec \varphi}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \theta},$$
$$y_B = a \frac{\sec \theta \operatorname{tg} \varphi - \sec \varphi \operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \theta},$$

et pour obtenir x_C et y_C, il suffirait de changer le signe de tg sec φ dans les formules (6) et (7).



On en conclut, pour les coordonnées du milieu M_1 de BC :

$$x_{M_1} = a \frac{\sec \theta \operatorname{tg} \theta - \sec \varphi \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \theta},$$
$$y_{M_1} = a \operatorname{tg} \varphi \frac{\sec \theta \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \theta \sec \varphi}{\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \theta}.$$

L'élimination de θ entre ces deux équations ne présente guère de difficulté si on la cherche directement. Mais on peut y arriver aisément en observant que le lieu (M_1) est évidemment symétrique par rapport à AO et qu'il admet des branches infinies parallèles à AB et à AC, et que sur chaque rayon vecteur, issu de A, il existe seulement deux points de la courbe (M_1). D'autre part, celle-ci est tangente en G et en G' à la circonférence; on est donc amené à penser que le lieu (M_1) est une hyperbole ayant pour centre O et des asymptotes parallèles à AB et AC, et, par suite, ayant pour équation

$$x^2 - y^2 \cot^2 \varphi = a^2. \tag{10}$$

Or, cette supposition se trouve vérifiée, car en formant l'expression $x^2 - y^2 \cot^2 \varphi$, l'on trouve

$$x^2 - y^2 \cot^2 \varphi = a^2 \frac{\sec^2 \varphi - \sec^2 \theta}{\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \theta}, \tag{11}$$

et si on observe que l'on a identiquement

$$\sec^2 \varphi - \sec^2 \theta = \operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \theta, \tag{12}$$

ou

$$\sec^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \varphi = \sec^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \theta = 1, \tag{13}$$

on voit que l'équation (10) est bien le résultat de l'élimination, et que le lieu des points (M_1) est l'hyperbole définie plus haut.

Par analogie, le lieu des centres de gravité des triangles ABC est évidemment une autre hyperbole semblable à la précédente, le centre de similitude étant le point A, et le rapport de similitude, $\frac{2}{3}$.

*

Dans la monographie dont il a été question plus haut, M. S. Günther, reproduisant les formules de la trigonométrie parabolique de J. Booth, indique entre autres les suivantes :

$$\operatorname{tg}(\varphi \mp \theta) = \operatorname{tg} \varphi \sec \theta \pm \operatorname{tg} \theta \sec \varphi,$$
$$\operatorname{tg}(\varphi \perp \varphi) = 2 \operatorname{tg} \varphi \sec \varphi,$$
$$\sec(\varphi \perp \varphi) = 2 \operatorname{tg}^2 \varphi + 1 = 2 \sec^2 \varphi - 1,$$
$$\operatorname{tg}(\varphi \perp \theta) \operatorname{tg}(\varphi \top \theta) = \operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \theta.$$

Nous avons un peu modifié les notations pour la facilité typographique

et donné la préférence aux notations d'un autre ouvrage du même auteur sur les fonctions hyperboliques (1881, p. 201; voir *Mathesis*, t. IV, p. 169). Ces notations sont d'ailleurs celles de J. Booth (*A Memoir on the Trigonometry of the Parabola*, 1856).

Les signes $\perp$, $\top$ représentent, dans la pensée de ce géomètre, une certaine ressemblance avec les signes $+$ et $-$ de l'algèbre ordinaire. Booth les désigne en effet par « *logarithmic plus and minus*, » et il suffit de les échanger mutuellement dans les formules des deux autres trigonométries, moyennant les changements correspondants et habituels des symboles sin, cos, tg, Sh, Ch, Th.

Nous retrouvons, dans ces formules, une partie des expressions précédentes, qui reçoivent ainsi une interprétation géométrique assez simple.

Par exemple, la formule (9) peut s'écrire

$$y_{M_1} = \eta = a \operatorname{tg} \varphi \frac{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{séc} \theta - \operatorname{tg} \theta \operatorname{séc} \varphi}{\operatorname{séc}^2 \varphi - \operatorname{séc}^2 \theta} = \frac{a \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} (\varphi \perp \theta)}$$

et l'on en déduit

$$\operatorname{tg} (\varphi \perp \theta) = \frac{a \operatorname{tg} \varphi}{\eta}.$$

D'ailleurs, si on observe que les côtés AB, AC, BC rencontrent Oy en des points D, E, F, dont les distances à l'origine ont pour expressions séc φ, $-$ séc φ, et séc θ, il suffira de mener par le point F une tangente FT au cercle dont O est le centre et OD ou OE le rayon pour avoir

$$\overline{FT}^2 = FE.FD = (\operatorname{séc} \varphi + \operatorname{séc} \theta)(\operatorname{séc} \varphi - \operatorname{séc} \theta) = \operatorname{séc}^2 \varphi - \operatorname{séc}^2 \theta,$$

ou encore

$$\overline{FT}^2 = \overline{FO}^2 - \overline{OT}^2 = \operatorname{séc}^2 \varphi - \operatorname{séc}^2 \theta.$$

On remarquera aussi l'analogie des formules (13) avec les formules de la trigonométrie du cercle

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1,$$

et avec celles de la trigonométrie de l'hyperbole équilatère

$$\operatorname{Ch}^2 u - \operatorname{Sh}^2 u = \operatorname{Ch}^2 v - \operatorname{Sh}^2 v = 1.$$

2 juin 1888.

NOTE. 1. Voici l'origine des singulières notations de J. Booth. Dans le cas où le module est 1, les fonctions elliptiques $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{tn} u$ jouissent des propriétés suivantes :

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u + \operatorname{sn} v}{1 + \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v}, \quad \operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 + \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v}, \quad \operatorname{tn}(u+v) = \frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{cn} v} + \frac{\operatorname{tn} v}{\operatorname{cn} u}.$$

Si l'on pose

$$\operatorname{am} u = \varphi, \quad \operatorname{am} v = \psi, \quad \operatorname{am}(u+v) = \chi$$

on a

$$\sin\chi = \frac{\sin\varphi + \sin\psi}{1 + \sin\varphi \sin\psi},$$

$$\sec\chi = \sec\varphi \sec\psi + \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi, \quad \operatorname{tang}\chi = \operatorname{tang}\varphi \sec\psi + \operatorname{tang}\psi \sec\varphi$$

J. Booth a écrit, dans ces formules, $\varphi \perp \psi$, au lieu de χ.

2. Ces formules deviennent celles de la théorie des fonctions hyperboliques, si l'on pose :

$$\operatorname{sn} u = \operatorname{Th} U, \quad \operatorname{cn} u = \frac{1}{\operatorname{Ch} V}, \quad \operatorname{tn} u = \operatorname{Sh} V,$$

$$\operatorname{sn} v = \operatorname{Th} V, \quad \operatorname{cn} v = \frac{1}{\operatorname{Ch} V}, \quad \operatorname{tn} v = \operatorname{Sh} V,$$

$$\operatorname{sn}(u+v) = \operatorname{Th} W, \quad \operatorname{cn}(u+v) = \frac{1}{\operatorname{Ch} W}, \quad \operatorname{tn}(u+v) = \operatorname{Sh} W.$$

Alors, en effet, on trouve

$$\operatorname{sn}(u+v) = \operatorname{Th}(U+V), \quad \operatorname{cn}(u+v) = \frac{1}{\operatorname{Ch}(U+V)}, \quad \operatorname{tn}(u+v) = \operatorname{Sh}(U+V),$$

et, par suite $W = U + V$. (P. M.)

×SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE;

par M. Sollertinsky (Gatschina, Russie).

Par deux points donnés A, B ***faire passer une circonférence*** ω ***qui soit vue d'un point donné*** S ***sous un angle donné*** α.

Soient SP, SQ les tangentes menées de S à la circonférence ω. La polaire PQ de S passe par un point fixe S′, quelle que soit la circonférence décrite par A et B. Pour démontrer cette propriété, bien connue, cherchons les pieds des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle S dans le triangle SAB et prenons la distance de ces points pour diamètre d'une circonférence O (circonférence d'Apollonius du triangle SAB). Celle-ci coupe orthogonalement toute circonférence passant par A et B ; son diamètre SS′ est donc divisé harmoniquement par un cercle quelconque passant par A et B, et S′ appartient à la polaire de S par rapport au second cercle.

La perpendiculaire élevée au milieu de AB rencontre une parallèle menée par S à AB en un point D, situé sur la circonférence ωPSQ. Donc

$$SDQ = SPQ = SQP = \tfrac{1}{2}(\pi - \alpha).$$

Il résulte de là que le point Q est à l'intersection de la circonférence du segment capable de l'angle $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ construit sur SS′, avec une droite DQ qui fait avec SD le même angle $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)$.

La droite DQ coupe la circonférence du segment capable en deux points Q, Q′, de sorte que le problème admet deux solutions.

Remarque. Appelons ω, ω′ les deux cercles qui passent par A et B, et sont vus de S sous le même angle. Les polaires PQ, P′Q′ de S par rapport à ces cercles se coupent au point S′ ; les cordes PP′, QQ′ se coupent au point D.

Les cercles ω, ω′ sont des figures inverses (isogonales) par rapport au triangle ABS. En effet, si l'on transforme par inversion triangulaire le cercle ω, on obtient un cercle passant également par A et B, et dont les tangentes issues de S sont les symétriques des droites SP, SQ par rapport à la bissectrice de l'angle ASB ; donc le nouveau cercle résout le problème proposé et, par suite, se confond avec le cercle ω′.

Les tangentes en A à ces cercles étant symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle BAS, les rayons Aω, Aω′ le sont également ; on en déduit que les centres ω, ω′ sont des points inverses par rapport au triangle SAB(*).

(*) Pour passer du cercle ω au cercle ω′, on peut transformer le premier par rayons vecteurs réciproques, le pôle étant en S et la puissance égale à SA. SB; on prend ensuite la figure symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle ASB. M. Gob a employé avec succès cette méthode dans plusieurs recherches (Association française etc., Congrès de Limoges, 1891. Voir aussi J. M. E., 1891, pp. 114-127). On a

$$\omega Q = \omega S \sin\alpha, \quad \text{d'où} \quad \omega A : \omega S = \sin\alpha ;$$

le point ω se trouve donc sur la circonférence, lieu des points dont les distances aux points A, S ont un rapport donné. (J. N.)

FORMULES RELATIVES AUX POLYGONES RÉGULIERS;

par M. l'abbé E. GELIN, professeur au Collège Saint-Quirin, à Huy.

Notations.

a ou a_n côté du polygone régulier de n côtés;

R rayon du cercle circonscrit au polygone;

r apothème ou rayon du cercle inscrit;

S aire du polygone;

S_1 et V_1 surface et volume engendrés par un demi-polygone régulier, d'un nombre pair de côtés, tournant autour d'un axe passant par deux sommets opposés;

S_2 et V_2 surface et volume engendrés par un demi-polygone régulier, d'un nombre pair de côtés, tournant autour d'un axe passant par les milieux de deux côtés opposés;

S_3 et V_3 surface et volume engendrés par un demi-polygone régulier, d'un nombre impair de côtés, tournant autour d'un axe passant par un sommet et le milieu du côté opposé;

S_4 et V_4 surface et volume engendrés par un polygone régulier tournant autour de l'un de ses côtés;

S_5 et V_5 surface et volume engendrés par un polygone régulier tournant autour de la tangente menée par l'un de ses sommets au cercle circonscrit.

Formules générales.

$$R^2 = r^2 + \frac{a^2}{4}.$$

$$a_{2n} = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a_n^2}}, \qquad a_n = \frac{a_{2n}}{R}\sqrt{4R^2 - a_{2n}^2}.$$

$$S = \frac{1}{2}nar.$$

$$S_1 = 4\pi Rr. \qquad V_1 = \frac{4}{3}\pi Rr^2.$$

$$S_2 = 2\pi(R^2 + r^2). \qquad V_2 = \frac{2}{3}\pi r(R^2 + r^2).$$

$$S_3 = \pi(R + r)^2. \qquad V_3 = \frac{1}{3}\pi r(R + r)^2.$$

$$S_4 = 2n\pi ar. \qquad V_4 = n\pi ar^2.$$

$$S_5 = 2n\pi aR. \qquad V_5 = n\pi aRr.$$

Triangle équilatéral.

$$a = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3},$$
$$R = \tfrac{1}{3}a\sqrt{3} = 2r,$$
$$r = \tfrac{1}{6}a\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}R,$$
$$S = \tfrac{1}{4}a^2\sqrt{3} = \tfrac{3}{4}R^2\sqrt{3} = 3r^2\sqrt{3},$$
$$S_2 = \tfrac{3}{4}\pi a^2 = \tfrac{9}{4}\pi R^2 = 9\pi r^2,$$
$$V_3 = \tfrac{1}{24}\pi a^3\sqrt{3} = \tfrac{3}{8}\pi R^3 = 3\pi r^3,$$
$$S_4 = \pi a^2\sqrt{3} = 3\pi R^2\sqrt{3} = 12\pi r^2\sqrt{3},$$
$$V_4 = \tfrac{1}{4}\pi a^3 = \tfrac{3}{4}\pi R^3\sqrt{3} = 6\pi r^3\sqrt{3},$$
$$S_5 = 2\pi a^2\sqrt{3} = 6\pi R^2\sqrt{3} = 24\pi r^2\sqrt{3},$$
$$V_6 = \tfrac{1}{2}\pi a^3 = \tfrac{3}{2}\pi R^3\sqrt{3} = 12\pi r^3\sqrt{3}.$$

Carré.

$$a = R\sqrt{2} = 2r,$$
$$R = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2} = r\sqrt{2},$$
$$r = \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}R\sqrt{2},$$
$$S = a^2 = 2R^2 = 4r^2,$$
$$S_1 = \pi a^2\sqrt{2} = 2\pi R^2\sqrt{2} = 4\pi r^2\sqrt{2},$$
$$V_1 = \tfrac{1}{6}\pi a^3\sqrt{2} = \tfrac{2}{3}\pi R^3 = \tfrac{1}{3}\pi r^3\sqrt{2},$$
$$S_2 = \tfrac{3}{2}\pi a^2 = 3\pi R^2 = 6\pi r^2,$$
$$V_2 = \tfrac{1}{4}\pi a^3 = \tfrac{1}{2}\pi R^3\sqrt{2} = 2\pi r^3,$$
$$S_4 = 4\pi a^2 = 8\pi R^2 = 16\pi r^2,$$
$$V_4 = \pi a^3 = 2\pi R^3\sqrt{2} = 8\pi r^3,$$
$$S_5 = 4\pi a^2\sqrt{2} = 8\pi R^2\sqrt{2} = 16\pi r^2\sqrt{2},$$
$$V_8 = \pi a^3\sqrt{2} = 4\pi R^3 = 8\pi r^3\sqrt{2}.$$

Pentagone régulier.

$$a = \tfrac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2r\sqrt{5-2\sqrt{5}},$$
$$R = \tfrac{1}{10}a\sqrt{50+10\sqrt{5}} = r(\sqrt{5}-1),$$
$$r = \tfrac{1}{10}a\sqrt{25+10\sqrt{5}} = \tfrac{1}{4}R(\sqrt{5}+1).$$

$$S = \tfrac{1}{4}a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}} = \tfrac{5}{8}R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 5r^2\sqrt{5-2\sqrt{5}},$$

$$S_5 = \tfrac{1}{4}\pi a^2(5+2\sqrt{5}) = \tfrac{5}{8}\pi R^2(3+\sqrt{5}) = 5\pi r^2,$$

$$V_5 = \tfrac{1}{24}\pi a^3\sqrt{85+38\sqrt{5}} = \tfrac{5}{24}\pi R^3(\sqrt{5}+2) = \tfrac{5}{3}\pi r^3,$$

$$S_4 = \pi a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}} = \tfrac{5}{2}\pi R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 20\pi r^2\sqrt{5-2\sqrt{5}},$$

$$V_4 = \tfrac{1}{4}\pi a^3(5+2\sqrt{5}) = \tfrac{5}{4}\pi R^3\sqrt{5+2\sqrt{5}} = 10\pi r^3\sqrt{5-2\sqrt{5}},$$

$$S_3 = \pi a^2\sqrt{50+10\sqrt{5}} = 5\pi R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 20\pi r^2\sqrt{50-22\sqrt{5}},$$

$$V_3 = \tfrac{1}{4}\pi a^3(3\sqrt{5}+5) = \tfrac{5}{4}\pi R^3\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 10\pi r^3\sqrt{50-22\sqrt{5}}.$$

Hexagone régulier.

$$a = R = \tfrac{2}{3}r\sqrt{3},$$

$$R = a = \tfrac{2}{3}r\sqrt{3},$$

$$r = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}R\sqrt{3},$$

$$S = \tfrac{3}{2}a^2\sqrt{3} = \tfrac{3}{2}R^2\sqrt{3} = 2r^2\sqrt{3},$$

$$S_1 = 2\pi a^2\sqrt{3} = 2\pi R^2\sqrt{3} = \tfrac{8}{3}\pi r^2\sqrt{3},$$

$$V_1 = \pi a^3 = \pi R^3 = \tfrac{8}{9}\pi r^3\sqrt{3},$$

$$S_2 = \tfrac{7}{2}\pi a^2 = \tfrac{7}{2}\pi R^2 = \tfrac{14}{3}\pi r^2,$$

$$V_2 = \tfrac{7}{12}\pi a^3\sqrt{3} = \tfrac{7}{12}\pi R^2\sqrt{3} = \tfrac{14}{9}\pi r^3,$$

$$S_4 = 6\pi a^2\sqrt{3} = 6\pi R^2\sqrt{3} = 8\pi r^2\sqrt{3},$$

$$V_4 = \tfrac{9}{2}\pi a^3 = \tfrac{9}{2}\pi R^3 = 4\pi r^3\sqrt{3},$$

$$S_3 = 12\pi a^2 = 12\pi R^2 = 16\pi r^2,$$

$$V_3 = 3\pi a^3\sqrt{3} = 3\pi R^3\sqrt{3} = 8\pi r^3.$$

Octogone régulier.

$$a = R\sqrt{2-\sqrt{2}} = 2r(\sqrt{2}-1),$$

$$R = \tfrac{1}{2}a\sqrt{4+2\sqrt{2}} = r\sqrt{4-2\sqrt{2}},$$

$$r = \tfrac{1}{2}a(\sqrt{2}+1) = \tfrac{1}{2}R\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$S = 2a^2(\sqrt{2}+1) = 2R^2\sqrt{2} = 8r^2(\sqrt{2}-1),$$

$$S_1 = \pi a^2\sqrt{20+14\sqrt{2}} = 2\pi R^2\sqrt{2+\sqrt{2}} = 4\pi r^2\sqrt{4-2\sqrt{2}},$$

$V_1 = \frac{1}{6}\pi a^3\sqrt{116+82\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\pi R^3(2+\sqrt{2}) = \frac{4}{3}\pi r^3\sqrt{4-2\sqrt{2}},$

$S_2 = \frac{1}{2}\pi a^2(7+4\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\pi R^2(6+\sqrt{2}) = 2\pi r^2(5-2\sqrt{2}),$

$V_2 = \frac{1}{12}\pi a^3(11\sqrt{2}+15) = \frac{1}{12}\pi R^3\sqrt{100+62\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\pi r^3(5-2\sqrt{2}),$

$S_4 = 8\pi a^2(\sqrt{2}+1) = 8\pi R^2\sqrt{2} = 32\pi r^2(\sqrt{2}-1),$

$V_4 = 2\pi a^3(3+2\sqrt{2}) = 2\pi R^3\sqrt{4+2\sqrt{2}} = 16\pi r^3(\sqrt{2}-1),$

$S_5 = 8\pi a^2\sqrt{4+2\sqrt{2}} = 16\pi R^2\sqrt{2-\sqrt{2}} = 32\pi r^2\sqrt{20-14\sqrt{2}},$

$V_5 = 2\pi a^3\sqrt{20+14\sqrt{2}} = 4\pi R^3\sqrt{2} = 16\pi r^3\sqrt{20-14\sqrt{2}}.$

Décagone régulier.

$a = \frac{1}{2}R(\sqrt{5}-1) = \frac{2}{5}r\sqrt{25-10\sqrt{5}},$

$R = \frac{1}{2}a(\sqrt{5}+1) = \frac{1}{5}r\sqrt{50-10\sqrt{5}},$

$r = \frac{1}{2}a\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \frac{1}{4}R\sqrt{10+2\sqrt{5}},$

$S = \frac{5}{2}a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \frac{5}{4}R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2r^2\sqrt{25-10\sqrt{5}},$

$S_1 = \pi a^2\sqrt{50+22\sqrt{5}} = \pi R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{4}{5}\pi r^2\sqrt{50-10\sqrt{5}},$

$V_1 = \frac{1}{6}\pi a^3(7\sqrt{5}+15) = \frac{1}{6}\pi R^3(5+\sqrt{5}) = \frac{4}{15}\pi r^3\sqrt{50-10\sqrt{5}},$

$S_2 = \frac{1}{2}\pi a^2(11+4\sqrt{5}) = \frac{1}{4}\pi R^2(13+\sqrt{5}) = \frac{2}{5}\pi r^2(15-2\sqrt{5}),$

$V_2 = \frac{1}{12}\pi a^3\sqrt{1885+842\sqrt{5}} = \frac{1}{12}\pi R^3\sqrt{125+38\sqrt{5}} = \frac{2}{15}\pi r^3(15-2\sqrt{5}),$

$S_4 = 10\pi a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}} = 5\pi R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 8\pi r^2\sqrt{25-10\sqrt{5}},$

$V_4 = \frac{5}{3}\pi a^3(5+2\sqrt{5}) = \frac{5}{3}\pi R^3\sqrt{5} = 4\pi r^3\sqrt{25-10\sqrt{5}},$

$S_5 = 10\pi a^2(\sqrt{5}+1) = 10\pi R^2(\sqrt{5}-1) = 8\pi r^2(3\sqrt{5}-5),$

$V_5 = \frac{5}{2}\pi a^3\sqrt{50+22\sqrt{5}} = \frac{5}{2}\pi R^3\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 4\pi r^3(3\sqrt{5}-5).$

Dodécagone régulier.

$a = \frac{1}{2}R(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = 2r(2-\sqrt{3}),$

$R = \frac{1}{2}a(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = r(\sqrt{6}-\sqrt{2}),$

$r = \frac{1}{2}a(2+\sqrt{3}) = \frac{1}{4}R(\sqrt{6}+\sqrt{2}),$

$S = 3a^2(2+\sqrt{3}) = 3R^2 = 12r^2(2-\sqrt{2}),$

$S_1 = \pi a^2 (3\sqrt{6} + 5\sqrt{2}) = \pi R^2 (\sqrt{6} + \sqrt{2}) = 4\pi r^2 (\sqrt{6} - \sqrt{2})$,

$V_1 = \frac{5}{6}\pi a^3 (11\sqrt{6} + 19\sqrt{2}) = \frac{4}{3}\pi R^3 (2 + \sqrt{3}) = \frac{4}{3}\pi r^3 (\sqrt{6} - \sqrt{2})$,

$S_2 = \frac{1}{2}\pi a^2 (15 + 8\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\pi R^2 (6 + \sqrt{3}) = 2\pi r^2 (9 - 4\sqrt{3})$,

$V_2 = \frac{1}{12}\pi a^3 (54 + 31\sqrt{3}) = \frac{1}{24}\pi R^3 (7\sqrt{6} + 9\sqrt{2}) = \frac{2}{3}\pi r^3 (9 - 4\sqrt{3})$,

$S_4 = 12\pi a^2 (2 + \sqrt{3}) = 12\pi R^2 = 48\pi r^2 (2 - \sqrt{3})$,

$V_4 = 3\pi a^3 (7 + 4\sqrt{3}) = \frac{3}{2}\pi R^3 (\sqrt{6} + \sqrt{2}) = 24\pi r^3 (2 - \sqrt{3})$,

$S_3 = 12\pi a^2 (\sqrt{6} + \sqrt{2}) = 12\pi R^2 (\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 48\pi r^2 (3\sqrt{6} - 5\sqrt{2})$,

$V_3 = 3\pi a^3 (3\sqrt{6} + 5\sqrt{2}) = 6\pi R^3 = 24\pi r^3 (3\sqrt{6} - 5\sqrt{2})$.

QUESTIONS D'EXAMEN (*).

Concours de St Cyr, 1891 ; compositions écrites.

A. Calcul logarithmique.

On donne dans un triangle

$$A = 112^\circ 28' 47'',3, \quad b = 26734, \quad c = 96879.$$

Calculez B, C, *a*.

Résultats : $a = 109912,82$, $B = 54^\circ 31' 55'',88$.

B. Mathématiques.

(12 juin, de 8 h. 45 à 11 h.)

I. Dans un triangle BAC, rectangle en A, on connaît la hauteur *h* abaissée sur l'hypoténuse et la médiane issue du sommet B. Déterminer l'hypoténuse par le calcul. Discussion. Construction du triangle.

II. On donne deux droites parallèles AX, BY et une perpendiculaire commune $AB = 2a$. On fait tourner un angle droit A'OB' autour de son sommet O placé au milieu de AB ; ses côtés coupent AX, BY respectivement en A' et B'. Démontrer : 1° que le produit AA'. BB' est constant ; 2° que $A'B' = AA' + BB'$. 3° que la droite A'B' reste tangente à un cercle fixe. 4° Par le milieu I de la hauteur OH du triangle A'OB' on mène une

---

(*) La Librairie Ch. Delagrave (Paris, rue de la Sorbonne, 29) publie, depuis une trentaine d'années, les sujets des épreuves écrites et orales du baccalauréat ès-sciences, de l'examen d'admission à Saint-Cyr, à l'École navale, à l'École polytechnique, à l'École centrale des Arts et Manufactures, etc. Les solutions des questions de mathématiques, dues à M. E. Lacroix, sont souvent accompagnées de remarques intéressantes et instructives.

parallèle à chacun des côtés de ce triangle et l'on considère les points où elle rencontre les deux autres côtés. Démontrer que les six points ainsi obtenus sont sur une même circonférence. 5° Minimum du rayon de cette circonférence.

I. Equations :

$$b^2 + c^2 = a^2, \quad 2m^2 + \tfrac{1}{2} b^2 = a^2 + c^2, \quad bc = ah.$$

Les deux premières donnent

$$3c^2 = 4m^2 - a^2, \quad 3b^2 = 4(a^2 - m^2); \tag{1}$$

substituant ces valeurs dans la 3° équation on obtient

$$4a^4 - (20m^2 - 9h^2)\, a^2 + 16m^4 = 0, \tag{2}$$

$$8a^2 = 20m^2 - 9h^2 \pm \sqrt{(20m^2 - 9h^2)^2 - (16m^2)^2}. \tag{3}$$

Pour que les valeurs de a soient réelles il faut que la quantité sous le radical soit positive et que le second terme de l'équation (2) soit négatif, ce qui donne

$$20m^2 - 9h^2 > 0, \quad 20m^2 - 9h^2 > 16m^2,$$

ou simplement $m > \frac{3}{5} h$. Cette condition est suffisante. En effet, d'après les égalités (1), a^2 doit être compris entre m^2 et $4m^2$; mais le premier membre de (2) prend les signes $+$, $-$, $+$ quand on remplace a^2 respectivement par m^2, $2m^2$, $4m^2$; donc l'une des valeurs de a^2 est comprise entre m^2 et $2m^2$, l'autre entre $2m^2$ et $4m^2$.

Pour construire le triangle ABC, appelons B' le milieu de AC, B'' la projection de B' sur BC, O le milieu de BB'. Construisons d'abord le triangle BB'B'' au moyen des données $BB' = m$, $B'B'' = \frac{1}{2} h$.

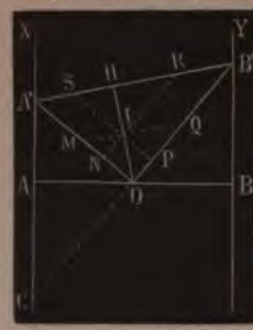
Le sommet A se déterminera par l'intersection de la circonférence décrite sur BB' comme diamètre, avec une parallèle à BB'' menée à la distance h. Pour qu'il y ait rencontre, la distance de O à la parallèle doit être plus petite que le rayon; donc on doit avoir $\frac{3}{4} h < \frac{1}{2} m$, $m > \frac{3}{2} h$. Faisant $d = BB'' = \sqrt{(\frac{1}{4} h^2 + m^2)}$, on déduit du quadrilatère inscriptible AB'B''B, la relation $CB''.CB = CB'.CA = 2\overline{CB'}^2$ ou $(a - d)\, a = \frac{1}{2} h^2 + 2(a - d)^2$, relation que l'on peut tirer de (2).

II. Si OB' rencontre AX en C, le triangle A'B'C est isoscèle, car $OB' = OC$ et A'O est perpendiculaire sur B'C. D'où

$1° \overline{OA}^2 = AA'.AC = AA'.BB'$; $2° A'B' = A'C = AA' + BB'$; $3° OA = OH$.

4° La parallèle à A'B' coupe OA', OB' en leurs milieux M, Q; la parallèle à OA' passe par le milieu S de A'H et rencontre OB' en un

point P; enfin la parallèle à OB′ passe par le milieu R de HB′ et coupe OA′ en un point N. On voit facilement que la figure SMQR est un rectangle. Donc les points S, M, Q, R, sont sur une circonférence ayant pour



diamètres MR, QS,; cette circonférence passe aussi par les points N, P, les angles RNM et SPQ étant droits.

5° $\overline{MR}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{RQ}^2 = \frac{1}{4}(\overline{A'B'}^2 + \overline{OH}^2)$;

OH étant constant, le minimum du cercle correspond au minimum de A′B′ ou de A′C; donc il a lieu pour A′C = 2 OA, c'est-à-dire lorsque l'angle AOA′ = 45°.

Le cercle MNPQ est le premier cercle de Lemoine du triangle ABC.

C. Epure.

(12 juin, de 1 h. 30^m à 4 h.)

Un tétraèdre SABC, dont l'angle trièdre S est trirectangle, a sa base ABC sur le plan horizontal. AB est sur la ligne de terre (A, vers la gauche) et a pour longueur 140^{mm}. La projection horizontale du sommet S est un point *s* dont les distances aux points A et B sont $As = 106^{mm}$, $Bs = 49^{mm}$.

Construire ce tétraèdre, puis son intersection avec la sphère ayant S pour centre et passant par le centre de la sphère inscrite au tétraèdre.

Dans la mise à l'encre, on représentera la partie du volume du tétraèdre extérieure à la sphère S.

ÉCOLE NAVALE DE FRANCE.

Composition écrite de géométrie pure et de géométrie analytique(*).

(3 juin, de 7 à 10 1/2 h.)

I. Triangles sphériques polaires. Condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse construire un triangle sphérique avec trois angles donnés.

(*) Nous empruntons les énoncés et en partie les solutions au fascicule publié par la librairie Croville-Morant.

II. Etant donné un cercle

$$x^2 + (y - \gamma)^2 = R^2$$

rapporté à deux axes rectangulaires Ox, Oy et qui coupe l'axe des x en deux points A et A', on considère un point quelconque M de ce cercle défini par l'angle φ que le rayon CM fait avec l'axe des x :

Trouver l'équation générale des coniques passant par les points A et A' et tangentes en M à la circonférence C ; démontrer que toutes ces coniques ont leurs axes parallèles ; trouver la direction de ces axes.

Parmi ces coniques on considérera :

1° celle pour laquelle la direction de la tangente MT au cercle et la direction de l'axe des y sont conjuguées. Déterminer géométriquement son centre et ses axes en grandeur et direction. Lieu du centre quand le point M parcourt la circonférence C ;

2° Celle pour laquelle la direction de la tangente MT et la direction Ox sont conjuguées. Mêmes questions que pour la précédente.

On exprimera en coordonnées polaires le lieu du centre.

Solution. La conique et le cercle ont pour sécantes communes AA' et MT ; donc d'après un théorème connu, les axes de la conique sont parallèles aux bissectrices des angles formés par ces sécantes.

1° Équation générale des coniques :

$$f(x, y) \equiv x^2 + (y - \gamma)^2 - R^2 - 2\lambda y [x \cos \varphi + (y - \gamma) \sin \varphi - R] = 0. \quad (1)$$

Équation du diamètre conjugué avec Oy :

$$\tfrac{1}{2} f'_y \equiv y - \gamma - \lambda [x \cos \varphi + (y - \gamma) \sin \varphi - R] - \lambda y \sin \varphi = 0. \quad (2)$$

Ce diamètre étant parallèle à MT, le premier et le dernier termes de l'équation (2) se détruisent ; d'où $\lambda = \dfrac{1}{\sin \varphi}$. Le centre satisfait aux égalités $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, ou

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - R = 0, \quad x \sin \varphi - y \cos \varphi = 0.$$

Donc ses coordonnées sont $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$; ce point est donc à l'intersection d'une parallèle à CM menée par O avec une parallèle à OY menée par M. Il décrit un cercle.

La conique (1) rapportée à son centre a pour équation

$$x^2 - 2xy \cot \varphi - y^2 = R^2.$$

C'est une hyperbole équilatère dont les carrés des demi-axes sont égaux à $\pm R^2 \sin \varphi$.

2° Diamètre conjugué avec Ox : $x - \lambda y \cos\varphi = 0$; comme il est parallèle à OT, on a $\lambda = -\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$. La conique considérée a donc pour équation

$$\cos^2\varphi\,[x^2 + (y-\gamma)^2 - R^2] + 2y\sin\varphi\,[x\cos\varphi + (y-\gamma)\sin\varphi - R] = 0.$$

Équations du centre :

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = 0, \quad y - \gamma - R\sin\varphi = 0. \tag{3}$$

Le centre est donc à l'intersection d'une parallèle à CM par O, avec une parallèle par M à Ox. La coordonnée angulaire du centre est donc $\omega = \frac{\pi}{2} + \varphi$. Remplaçant φ, x, y par $\omega - \frac{\pi}{2}$, $\rho\cos\omega$, $\rho\sin\omega$, on déduit de la seconde des équations (3) :

$$\rho = \frac{\gamma - R\cos\omega}{\sin\omega}, \quad \text{ou} \quad (x^2 + y^2)(y-\gamma)^2 - R^2x^2 = 0.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 670.

(Voir *Mathesis*, (1), IX, p. 280 et (2), I, p. 31.)

1° *Les cercles osculateurs d'une courbe plane ne peuvent rencontrer un même cercle sous un angle constant.* 2° *Il n'y a pas de courbes dont les sphères osculatrices rencontrent orthogonalement une sphère fixe.* 3° *Y en a-t-il dont les sphères osculatrices rencontrent une même sphère sous un angle constant ?* (E. Cesáro.)

Solution par M. V. Jamet (Marseille). 1° Soit une courbe plane C dont tous les cercles osculateurs coupent sous un angle constant un cercle fixe O, M un point situé sur la développée de C, s l'arc de cette développée compté à partir d'un point fixe et terminé en M; soit encore A l'un des points d'intersection du cercle O avec le cercle osculateur à la courbe C, et dont le centre est en M. Abaissons, du point O une perpendiculaire OI sur MA; observons que les longueurs OI, AI sont constantes et que, par conséquent, le rayon MA ne diffère que par une constante, de la tangente menée du point M, au cercle de centre O et de rayon OI. D'autre part, si le point M se meut sur la développée de C, la différentielle de ce

rayon sera égale à ds; si donc on désigne OI par a, et les coordonnées du point M par x, y, il y aura, entre x, y, s, la relation

$$ds = \frac{xdx + ydy}{\pm\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}},$$

les axes de coordonnées, rectangulaires, étant issus du point O; ou bien, en coordonnées polaires,

$$(r^2 - a^2)(r^2 d\theta^2 + dr^2) = r^2 dr^2$$

ou encore,

$$\pm d\theta = \frac{adr}{r\sqrt{r^2 - a^2}} = \frac{\frac{adr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}}} = -d\left(\text{arc sin}\,\frac{a}{r}\right)$$

et, par conséquent,

$$a = r\sin(\theta_0 \pm \theta).$$

C'est l'équation générale des tangentes au cercle décrit du point O comme centre, avec a pour rayon. Donc la courbe cherchée aurait pour développée une ligne droite, ce qui est impossible.

2° Si toutes les sphères, osculatrices à une courbe fixe, coupaient à angle droit une sphère fixe O, on transformerait cette courbe, par rayons vecteurs réciproques, en une courbe dont toutes les sphères osculatrices couperaient un plan fixe à angle droit : il suffirait, pour cela, de placer le pôle de la transformation sur la sphère O. Mais le plan normal à la courbe transformée, étant sans cesse osculateur à la courbe, lieu des centres des sphères osculatrices, serait un plan fixe, ce qui est impossible.

3° La transformation par rayons vecteurs réciproques nous conduit encore à chercher une courbe dont toutes les sphères osculatrices coupent un plan fixe sous un angle constant.

A ce plan, pris pour plan des xy, nous rapporterons la courbe, lieu des centres des sphères osculatrices. Soient x, y, z, les coordonnées d'un point de cette courbe, s l'arc de cette courbe, compté à partir d'un point fixe et terminé en M, $d\sigma$ l'angle de contingence en M, $F(\sigma)$ son rayon de courbure au même point, R le rayon de la sphère osculatrice correspondante. Dans un mémoire inséré aux *Annales de la faculté de Toulouse* (année 1890, 1er fascicule), j'ai démontré la formule suivante :

$$R^2 = \left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\cos\sigma d\sigma + A\right]^2 + \left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\sin\sigma d\sigma + B\right]^2 \qquad (a)$$

où A, B, désignent deux constantes. Si l'on appelle α l'angle donné, cette formule se transforme ainsi :

$$\frac{z^2}{\cos^2\alpha} = \left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\cos\sigma d\sigma + A\right]^2 + \left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\sin\sigma d\sigma + B\right]^2$$

et l'on en déduit

$$z = \Phi(\sigma),$$

Φ désignant une fonction connue de la variable σ. Je vais chercher à exprimer x, y, en fonction de la même variable. A cet effet, je rappelle les formules connues :

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2, \quad (d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2 = ds^2 d\sigma^2,$$

d'où je déduis :

$$\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 = F^2 - \Phi'^2, \quad \left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right)^2 = F'^2 + F^2 - \Phi''^2.$$

La fonction F étant donnée, les seconds membres de ces deux égalités sont des fonctions connues de σ, et l'on est conduit à intégrer un système de deux équations différentielles simultanées, où x, y sont les fonctions inconnues de la variable σ.

A cet effet, nous poserons :

$$\frac{dx}{d\sigma} = \sqrt{F^2 - \Phi'^2}\cos\theta, \tag{2}$$

et, par conséquent,

$$\frac{dy}{d\sigma} = \sqrt{F^2 - \Phi'^2}\sin\theta. \tag{3}$$

Par suite, aussi :

$$\frac{d^2x}{d\sigma^2} = -\sqrt{F^2 - \Phi'^2}\sin\theta\cdot\frac{d\theta}{d\sigma} + \frac{FF' - \Phi'\Phi''}{\sqrt{F^2 - \Phi'^2}}\cos\theta,$$

$$\frac{d^2y}{d\sigma^2} = \sqrt{F^2 - \Phi'^2}\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{d\sigma} + \frac{FF' - \Phi'\Phi''}{\sqrt{F^2 - \Phi'^2}}\sin\theta$$

et

$$(F^2 - \Phi'^2)\left(\frac{d\theta}{d\sigma}\right)^2 + \frac{(FF' - \Phi'\Phi'')^2}{F^2 - \Phi'^2} = F'^2 + F^2 - \Phi''^2,$$

$$d\theta = \pm\frac{\sqrt{F^2(F^2 - \Phi'^2) - (F'\Phi' + F\Phi'')^2}}{F^2 - \Phi'^2}d\sigma.$$

On connaît ainsi la fonction θ par une quadrature : les formules (2), (3) font connaître x, y par des quadratures : les expressions obtenues, jointes à la formule (1), définissent la courbe, lieu des centres des sphères osculatrices. Soit S cette courbe : la courbe cherchée sera l'enveloppe des caractéristiques des sphères décrites des divers points de S comme centre, et dont le rayon est une fonction de σ, définie par la formule (a). Nous engageons nos jeunes lecteurs à examiner les formes particulières de la fonction $F(\sigma)$ qui donnent lieu à des résultats intéressants.

Question 685.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 128.)

On donne une conique K ***et deux points*** A, B ***pris sur la courbe. Démontrer qu'il existe toujours deux points qui jouissent de la propriété suivante : Une droite quelconque menée par l'un ou l'autre de ces points rencontre la conique en deux points*** P, Q ***tels que la somme des angles*** APB ***et*** AQB ***est constante.***

Ces deux points sont le pôle et le milieu de la corde EF ***qui est vue des points*** A ***et*** B ***sous des angles droits.*** (G. TARRY.)

Solution par M. KLUYVER, ***professeur à Amsterdam.*** Nous déduisons cette proposition du théorème plus général que voici :

Etant donnés deux points A, B ***sur une conique*** K ***et deux points*** I, J ***dans son plan, les droites qui rencontrent*** K ***en deux points*** P, Q ***satisfaisant à la condition***

$$P(ABIJ) \cdot Q(ABIJ) = m \text{ (*)} \qquad (1)$$

enveloppent une autre conique K'. ***Lorsqu'on fait varier la constante*** m, ***la conique*** K' ***engendre un faisceau tangentiel.***

(*) (ABIJ) représente le rapport anharmonique

$$\frac{IA}{IB} : \frac{JA}{JB}.$$

Ce rapport est nul lorsque le troisième point coïncide avec le premier ou le quatrième avec le second ; il est infini lorsque le quatrième point se confond avec le premier ou le troisième avec le second. De même, P(ABIJ) désigne le rapport anharmonique

$$\frac{\sin IPA}{\sin IPB} : \frac{\sin JPA}{\sin JPB}.$$

Pour démontrer ce théorème, supposons le point P fixe sur la conique; alors un point Q du plan qui vérifie constamment l'égalité (1) engendre une conique K_1, car le rapport Q(ABIJ) a une valeur constante. K_1 passe par les points A, B, I, J; donc cette courbe coupe K en deux points Q, Q′ qui varient avec la position de P sur K; il en résulte que les cordes PQ, PQ′ enveloppent une même courbe K′ de la deuxième classe. Soient U, T, R, S les points de rencontre de K avec les droites AI, AJ, BI, BJ. Lorsque P est en U ou S, le rapport P(ABIJ) est nul; par suite, d'après la condition (1) le rapport Q(ABIJ) doit être infini ce qui fait coïncider Q avec T ou R. Donc UT, UR, ST, SR sont des tangentes à K′ qui ne dépendent pas de la valeur particulière de m; par conséquent les coniques K′ qui correspondent aux différentes valeurs de m sont inscrites au quadrilatère UTSR.

Un faisceau tangentiel comprend trois coniques dégénérées en des couples de points, qui sont les couples de sommets opposés du quadrilatère circonscrit. Le couple U, S correspond à $m = 0$; le système des points R, T, à $m = \infty$.

Soient Y, X les intersections des droites RU et ST, UT et SR; ces points représentent également l'une des coniques dégénérées du faisceau tangentiel. On peut donc énoncer le corollaire suivant du théorème énoncé plus haut:

Etant donnés deux points A, B *sur une conique* K *et deux points* I, J *dans son plan, il existe deux points* X, Y *jouissant de la propriété que toute droite menée par l'un de ces points rencontre la courbe en deux points* P, Q *tels que le produit des rapports anharmoniques* P(ABIJ), Q(ABIJ) *ait une valeur constante.*

Si l'on considère l'hexagone inscrit AUSBRTA, on voit que les droites US, RT, IJ concourent en un même point H. De plus, le triangle diagonal XYH du quadrilatère inscrit RUST est autopolaire; donc XY, polaire de H, passe par le pôle de IJ. Soient E, F les points de rencontre de YH avec K ou les points de contact des tangentes issues de X;

ce sont les points doubles de l'involution (UT, RS) et, par suite, les faisceaux A (IJEF), B (IJEF) sont harmoniques.

Pour passer au théorème de M. Tarry, prenons pour I, J les points cycliques. Alors les rapports anharmoniques P(IJAB), Q(IJAB) sont égaux à $e^{-2\alpha i}$, $e^{-2\beta i}$, α et β désignant les angles BPA, BQA ; si leur produit est constant, la somme $\alpha + \beta$ sera constante. La droite IJ étant à l'infini, la polaire XY de l'un de ses points passe par le centre de la conique K et X est le milieu de la corde EF. Enfin, les faisceaux A(IJEF), B(IJEF) étant harmoniques, les angles EAF, EBF sont droits.

MM. Decamps et Liénard ont esquissé de bonnes solutions analytiques, mais sans arriver à des résultats assez simples.

Question 714.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 104.)

Soient P, Q, R *trois points d'une parabole tels, que les normales concourent en un même point. Les tangentes en ces points rencontrent une perpendiculaire à l'axe en trois points d'où l'on mène trois nouvelles tangentes à la courbe. Démontrer que la circonférence circonscrite au triangle formé par ces dernières tangentes passe par le sommet de la parabole.*

(Tucker.)

Solution par M. Déprez. La condition que la normale en un point (x, y) d'une parabole ayant pour équation $y^2 = 2px$ passe par un point donné N (α, β), conduit à l'égalité

$$\beta - y = -\frac{y}{p}\left(\alpha - \frac{y^2}{2p}\right), \quad \text{ou} \quad y^3 - 2p(\alpha - p)y - 2p^2\beta = 0. \quad (1)$$

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées de trois points P, Q, R de la parabole tels que les normales concourent en N; y_1, y_2, y_3 étant les racines de (1), on a

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0. \quad (2)$$

Donc *le centre de gravité du triangle* PQR *est situé sur l'axe de la parabole* (théorème connu). Réciproquement, cette condition est suffisante pour que les normales concourent en un même point.

La tangente en un point (x, y) de la parabole a pour équation

$$Yy = p\left(X + \frac{y^2}{2p}\right), \quad \text{ou} \quad y^2 - 2Yy + 2pX = 0.$$

On en conclut que les ordonnées y', y'' des points de contact des tangentes issues d'un point M (X, Y) vérifient les égalités

$$y' + y'' = 2Y, \quad y'y'' = 2pX. \tag{3}$$

Cela posé, soient P', Q', R' les points de la parabole tels, que les tangentes en P et P', Q et Q', R et R' se coupent sur une même droite perpendiculaire à l'axe et ayant pour abscisse X, et soient (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), (x'_3, y'_3) les coordonnées de ces points. D'après la seconde des égalités (3), on a

$$y'_1 = \frac{2pX}{y_1}, \quad y'_2 = \frac{2pX}{y_2}, \quad y'_3 = \frac{2pX}{y_3},$$

et en remplaçant, dans (1), y par $\frac{2pX}{y'}$, on obtient l'équation

$$\beta y'^3 + 2X(\alpha - p)y'^2 - 4pX^3 = 0, \tag{4}$$

qui a pour racines y'_1, y'_2, y'_3. On observe immédiatement que

$$\frac{1}{y'_1} + \frac{1}{y'_2} + \frac{1}{y'_3} = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma y'_2 y'_3 = 0. \tag{5}$$

Désignons par P'', Q'', R'' les sommets du triangle formé par les tangentes menées en P', Q', R' à la parabole, et par (x''_1, y''_1), ... leurs coordonnées. Les relations (3) donnent

$$2y''_1 = y'_2 + y'_3, \quad 2px''_1 = y'_2 y'_3, \quad \text{etc.} \tag{6}$$

Des égalités (5) et (6) on conclut facilement

$$x''_1 + x''_2 + x''_3 = 0; \tag{7}$$

donc le centre G du triangle P''Q''R'' est situé sur la tangente au sommet de la parabole. L'orthocentre (H) du même triangle étant sur la directrice et le centre ω du cercle circonscrit étant sur la droite HG à une distance $G\omega = \frac{1}{2}$ HG, on voit facilement que ω est sur la perpendiculaire élevée au milieu de la distance OF comprise entre le sommet O et le foyer F de la courbe; donc le cercle P'' Q'' R'' passe par O.

Soient P''', Q''', R''' les points où se coupent deux à deux les tangentes menées en P, Q, R; les ordonnées y'''_1, y'''_2, y'''_3 étant égales à

$$\tfrac{1}{2}(y_2 + y_3), \quad \tfrac{1}{2}(y_3 + y_1), \quad \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2),$$

on a

$$y_1''' + y_2''' + y_3''' = 0;$$

donc le centre de gravité du triangle P''' Q''' R''' est situé sur l'axe de la parabole.

M. Decamps a résolu la même question en considérant l'équation du cercle P'' Q'' R'' sous la forme

$$\Sigma\lambda_1 [Yy_2' - p(X + x_3')][Yy_3' - p(X + x_3')] = 0. \qquad (8)$$

Pour que cette équation représente une circonférence passant par l'origine, on doit avoir

$$\Sigma\lambda_1 (y_2'y_3' + p^2) = 0, \quad \Sigma\lambda_1 (y_2' + y_3') = 0, \quad \Sigma\lambda_1 x_2' x_3' = 0.$$

Or, la dernière de ces égalités se ramène à

$$\Sigma\lambda_1 y_2'^2 y_3'^2 = 0;$$

la seconde, si l'on observe que l'équation (5) donne

$$y_2' + y_3' = -\frac{y_2' y_3'}{y_1'}, \text{ etc.},$$

prend la forme

$$\Sigma\lambda_1 \frac{y_2' y_3'}{y_1'} = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma\lambda_1 y_2'^2 y_3'^2 = 0.$$

Donc le théorème est démontré.

Comme il n'a pas été fait usage de la condition que les termes en X^2, Y^2 de l'équation (8) aient même coefficient, on voit que toute conique circonscrite au triangle P'' Q'' R'' et ayant un axe parallèle à celui de la parabole passe par le sommet de cette courbe.

M. Tucker a signalé un grand nombre de propriétés, fort curieuses, du groupe des trois points P, Q, R qu'il appelle *points conormaux* (!) (Voir *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. XXI, N^{os} 397, 398).

Question 720.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 104.)

Quel que soit l'entier n, $n^{13} - n$ *est divisible par* 2730. (Anthony.)

Démonstration fondée sur le théorème de Fermat, par MM. E. Lemoine, Delahaye, Joachimescu, Russo, Mandart, Greenstreet, Soons, Emmerich. Il faut démontrer que $n(n^{12} - 1)$ est toujours divisible par chacun des facteurs 13, 7, 5, 3, 2. Or, d'après le théorème de Fermat, si ces facteurs ne divisent pas n, ils divisent respectivement $n^{12} - 1$, $n^6 - 1$, $n^4 - 1$, $n^2 - 1$, $n - 1$; donc ils divisent $n^{13} - 1$.

Démonstration directe, par MM. Denys, Decamps, François, Vladi-

MIRESCU et BELLENS. On a $2730 = 2.3.5.7.13$; démontrons, par exemple, que $n^{13} - n$ est toujours divisible par 7. On peut avoir

$$n = \mathcal{M}.\ 7, \quad \mathcal{M}.\ 7 \pm 1, \quad \mathcal{M}.\ 7 \pm 2, \quad \mathcal{M}.\ 7 \pm 3.$$

Dans le premier cas, la propriété est évidente. Dans les autres cas, on trouve facilement

$$n^2 = \mathcal{M}.\ 7+1, \quad \mathcal{M}.\ 7+4, \quad \mathcal{M}.\ 7+2,$$

$$n^4 = \mathcal{M}.\ 7+1, \quad \mathcal{M}.\ 7+2, \quad \mathcal{M}.\ 7+4,$$

$$n^{12} = (n^4)^3 = \mathcal{M}.\ 7+1; \quad \mathcal{M}.\ 7+1; \quad \mathcal{M}.\ 7+1;$$

donc $n^{13} - 1 = \mathcal{M}.\ 7$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

729. On donne une droite AB, une circonférence C, et une droite CDP, sur laquelle on prend deux points fixes, D et P. Par le point P, on mène, arbitrairement, une transversale qui coupe en E la droite AB, en F et G la circonférence C. On joint E à D, F et G à C, par les droites DE, CF, CG qui se coupent en M, M'. Le lieu des points M, M' est une conique, dont on demande la discussion. (E. CATALAN.)

730. Étant donnée une circonférence O, on prolonge un rayon quelconque OM de la longueur $MN = n$. MP, où MP est la perpendiculaire abaissée de l'extrémité M du rayon sur un diamètre fixe AA'. 1° Démontrer que le lieu du point N est un limaçon de Pascal; 2° Trouver l'aire de la courbe; 3° Trouver la longueur de la courbe, dans le cas de $n = 1$.

(KEELHOFF.)

***731.** On donne deux droites concourantes OG, OL et deux cercles concentriques de centre O. On mène au cercle intérieur une tangente variable SR, et des points S et R, où elle rencontre OG, OL, les tangentes SA, RA au cercle extérieur. Trouver le maximum de l'angle SAR.

(G. H. NIEWENGLOWSKI.)

***732.** Les droites menées par les sommets d'un triangle ABC parallèlement à une même direction donnée rencontrent la circonférence circonscrite aux points A', B', C'. Les droites de Simson relatives à ces points forment un triangle A''B''C''. Démontrer que le lieu du centre de la circonférence A''B''C'' est la circonférence décrite sur HO pour diamètre. (SOLLERTINSKY.)

PROPRIÉTÉS DES CONIQUES,

par M. SOLLERTINSKY.

On appelle *quadrilatère harmonique* un quadrilatère inscriptible MFM'F' (fig. 1), dans lequel le produit de deux côtés opposés MF.M'F' est égal au produit des deux autres côtés opposés MF'. M'F. Les perpendiculaires abaissées de M sur les côtés M'F, M'F', sont proportionnelles aux côtés MF, MF' (à cause de deux triangles semblables) et par suite aux côtés M'F, M'F'; donc MM' est la symédiane du triangle M'FF'; par analogie, c'est aussi la symédiane de MFF' et FF' est une symédiane dans les deux triangles FMM', F'MM'.

Soient C, D les milieux des diagonales FF', MM', et G le milieu du côté M'F'. Les angles F'M'C, M'F'C étant égaux aux angles MM'F et M'MF, les triangles M'F'C, M'MF sont directement semblables; donc aussi le triangle MDF est semblable à F'GC ou à F'M'F. Par analogie, le triangle F'DM est semblable à F'M'F; donc les triangles MDF, F'DM sont semblables entre eux, et il en est de même de M'DF et F'DM'. Il résulte de là que MM' est la bissectrice de l'angle FDF' et que

$$\overline{DM}^2 = \overline{DM'}^2 = DF \cdot DF'.$$

Fig. 1.

Réciproquement, si sur la bissectrice de l'angle D d'un triangle FDF' on prend les longueurs

$$DM = DM' = \sqrt{DF \cdot DF'},$$

les points M, F, M', F' sont les sommets d'un quadrilatère harmonique.

Ces notions sont connues (voir *Mathesis*, t. V, p. 202); mais il n'était peut-être pas inutile de les rappeler ici avant de les appliquer à une question déjà traitée par plusieurs auteurs.

I. Soit D un point quelconque d'une ellipse ABA'B' ayant pour centre C, pour foyers F, F'. Portons sur la normale en D les longueurs $DM = DM' = \sqrt{DF \cdot DF'}$; le quadrilatère MFM'F' sera harmonique.

La droite CF sera donc aussi la bissectrice de l'angle MCM′ et égale à $\sqrt{CM \cdot CM'}$.

Or, de $DF + DF' = 2a$ on tire

$$2DF \cdot DF' = 4a^2 - (\overline{DF}^2 + \overline{DF'}^2) = 4a^2 - 2(\overline{DC}^2 + \overline{CF}^2) = 2(a^2 + b^2 - \overline{DC}^2);$$

mais si CE est le demi-diamètre conjugué avec CD, l'on a $\overline{CD}^2 + \overline{CE}^2 = a^2 + b^2$. Donc $DF \cdot DF' = \overline{CE}^2$. Ainsi, *le produit des rayons vecteurs d'un point* D *de l'ellipse est égal au carré du demi-diamètre conjugué avec celui qui passe par* D (théorème connu).

II. Calculons CM et CM′. Nous avons

$$CM \cdot CM' = \overline{CF}^2 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

$$\overline{CM}^2 + \overline{CM'}^2 = 2(\overline{CD}^2 + \overline{DM}^2) = 2(\overline{CD}^2 + \overline{CE}^2) = 2(a^2 + b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2;$$

il en résulte

$$CM = (a - b), \quad CM' = (a + b).$$

Par conséquent : *connaissant deux demi-diamètres conjugués* CD, CE *d'une ellipse, si sur une perpendiculaire abaissée de* D *sur* CE *on porte les longueurs* DM = DM′ = CE, *on obtient les foyers* F, F′ *en prenant sur la bissectrice de l'angle* MCM′ *les longueurs* $CF = CF' = \sqrt{CM \cdot CM'}$; *les distances* CM′, CM *sont égales à la demi-somme et à la demi-différence des axes de l'ellipse.* (CHASLES.)

III. Cette proposition admet plusieurs conséquences, fort curieuses.

1. Les points M, M′ sont les foyers d'une ellipse passant par C, tangente au petit axe BB′ et ayant même grand axe que l'ellipse proposée.

2. Si sur la normale en un point D d'une ellipse on porte les longueurs DM, DM′ égales à la moyenne proportionnelle entre les rayons vecteurs DF, DF′, les points M, M′ décrivent deux circonférences concentriques avec l'ellipse et ayant pour rayons la demi-différence et la demi-somme des axes de l'ellipse.

3. Réciproquement, étant données deux circonférences de même centre C, si deux rayons CM, CM′ tournent constamment avec la même vitesse angulaire dans des sens contraires, le milieu D de la droite qui joint leurs extrémités engendre une ellipse ayant pour axes la somme et la différence des rayons des deux cercles.

4. Les tangentes aux extrémités E, E′ du diamètre CE rencontrent la tangente menée en D aux points T, T′, qui décrivent une ellipse ayant

pour axes $2a\sqrt{2}$, $2b\sqrt{2}$; CT et CT′ sont deux diamètres conjugués de cette nouvelle ellipse, et la figure TMT′M′ est un carré. Donc si l'on construit un carré ayant pour diagonale la corde TT′ qui joint les extrémités de deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse, les extrémités de la seconde diagonale se meuvent sur deux circonférences.

Fig. 2.

IV. Considérons maintenant une hyperbole (fig. 2) ayant pour centre C, pour foyers F et F′, pour asymptotes CU, CV. Un point quelconque D de cette courbe est le milieu de la tangente TT′ limitée par les asymptotes.

Le triangle CTT′ a une surface constante; donc si GG′ est la tangente au sommet A, on a

$$CT.CT' = CG.CG' = \overline{CF}^2 = \overline{CF'}^2.$$

D'ailleurs FF′ est la bissectrice de l'angle TCT′; par conséquent, *les foyers* F, F′ *d'une hyperbole et les points* T, T′ *où une tangente coupe les asymptotes sont les sommets d'un quadrilatère harmonique* TFT′F′.

Fig. 3.

Il résulte de là que

$$DT = DT' = \sqrt{DF.DF'};$$

mais DT est égal au demi-diamètre conjugué avec CD; donc on retrouve ici, par une méthode peut-être nouvelle, la propriété démontrée ci-dessus (§ I) pour l'ellipse.

V. Portons maintenant sur la normale en D les segments

$$DM = DM' = \sqrt{DF.DF'} = DT \text{ (fig. 3)}.$$

Les points M, M′ *décrivent deux hyperboles* (M), (M′) *dont chacune est égale à la conjuguée de l'autre, qui sont polaires réciproques par rapport*

au cercle décrit du centre C *avec le rayon* $\sqrt{a^2-b^2}$, *et dont les axes ont pour longueurs* $2(a-b)$, $2(a+b)$.

Pour démontrer cette proposition, portons sur la hauteur MP du triangle CMM' les segments MR = MQ = CM', et sur la hauteur M'P' les segments M'R' = M'Q' = CM. Les triangles CMR, R'M'C ont deux couples de côtés CM et R'M', MR et M'C égaux et perpendiculaires; donc ils sont égaux et les troisièmes côtés CR et CR' sont égaux et perpendiculaires. On démontre de même que CQ et CQ' sont égaux et perpendiculaires. Les triangles CRQ', CR'Q ont les côtés CR et CR', CQ' et CQ égaux et perpendiculaires. Appelons T, T' les milieux des droites Q'Q, RR'; les droites M'T, MT' qui joignent les milieux de deux côtés des triangles Q'QR', RQR' sont parallèles à QR' et égales à $\frac{1}{2}$ QR'; les droites MT, M'T' sont parallèles à RQ' et égales à $\frac{1}{2}$ RQ'. Il résulte de là que la figure MTM'T' est un carré.

Mais on a supposé $DM = DM' = \sqrt{DF.DF'}$; donc TT' est bien la tangente au point D de l'hyperbole, et T, T' sont les points où cette tangente rencontre les asymptotes.

Les droites CT, CT' sont donc fixes; les droites CR, CR' qui font un angle de 45° avec CT', et les droites CQ, CQ' qui font un angle de 45° avec CT sont également fixes. Je dis maintenant que l'aire CRQ est constante. En effet, elle a pour mesure $\frac{1}{2}$ RQ . CP = CM'.CP; mais

$$\overline{MM'}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{CM'}^2 - 2CM'.CP = 2\overline{CD}^2 + 2\overline{DM'}^2 - 2CM'.CP,$$

d'où

$$2CM'.CP = 2\overline{CD}^2 + 2\overline{DM'}^2 - MM'^2 = 2(\overline{CD}^2 - DM'^2)$$
$$= 2(\overline{CD}^2 - \overline{DT}^2) = 2(a^2 - b^2).$$

Par conséquent, la droite QR se meut de manière à déterminer avec les droites fixes CR, CQ un triangle d'aire constante; elle enveloppe donc une hyperbole ayant pour asymptotes les droites CR, CQ qui font avec les asymptotes de l'hyperbole donnée un angle de 45°; le point de contact de QR est précisément son milieu M.

Les angles R'CQ', RCQ sont supplémentaires; donc les triangles CR'Q', CRQ sont équivalents. Par conséquent, les droites QR, Q'R' enveloppent des hyperboles dont l'une est égale à la conjuguée de l'autre; M et M' sont les points de contact.

Pour trouver les axes des hyperboles (M), (M'), il suffit de faire coïn-

cider D avec un sommet réel de l'hyperbole proposée; les demi-axes réels de (M), (M') sont alors les distances $CM = a - b$, $CM' = a + b$; les demi-axes imaginaires sont évidemment $a + b$, $a - b$.

On a trouvé ci-dessus

$$CP \cdot CM' = CP' \cdot CM = a^2 - b^2.$$

Donc M' est le pôle de QR par rapport à un cercle Δ décrit de C comme centre avec le rayon $\sqrt{a^2 - b^2}$; de même, M est le pôle de Q'R'. Donc les courbes (M), (M') sont polaires réciproques par rapport à ce cercle.

VI. La proposition que nous venons d'établir est probablement nouvelle. Elle admet beaucoup de conséquences.

1. L'orthocentre H du triangle CMM' décrit la polaire réciproque de la développée de l'hyperbole (D) par rapport au cercle Δ. Car

$$CH \cdot Ch = CP \cdot CM' = a^2 - b^2.$$

2. Les coordonnées (x_1, y_1) (x'_1, y'_1) des points M, M' s'expriment très simplement en fonction des coordonnées (x, y) du point D. En effet,

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a-b}{a}\, x, \\ y_1 = \dfrac{a+b}{b}\, y; \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_1 = \dfrac{a+b}{a}\, x, \\ y'_1 = -\dfrac{a-b}{b}\, y. \end{cases}$$

3. Les droites RR', QQ' se coupent en un point μ diamétralement opposé à C sur la circonférence CTT'. Le lieu de μ est donc une hyperbole.

4. Sur MM' comme diagonale construisons un rectangle $Mm M'm'$ dont les côtés sont parallèles aux axes de l'hyperbole proposée. Les sommets de la seconde diagonale ont pour cordonnées (x_1, y'_1), (x'_1, y_1); donc ils décrivent des hyperboles équilatères ayant pour équations

$$x_1^2 - y_1'^2 = (a-b)^2, \quad x_1'^2 - y_1^2 = (a+b)^2.$$

Ces deux coniques sont encore polaires réciproques par rapport au cercle Δ. La droite mm' enveloppe une courbe ayant pour équation

$$(ax)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}};$$

c'est ce qu'on trouve aisément en observant que cette droite est la symétrique de la normale MM' à l'hyperbole donnée par rapport à l'ordonnée de D.

5. Le cercle circonscrit au carré MT M'T' est de puissance constante

$(a^2 - b^2)$ par rapport au centre C; il a donc pour enveloppe une anallagmatique dont la déférente est l'hyperbole donnée.

La figure précédente donne encore lieu à d'autres remarques intéressantes.

BIBLIOGRAPHIE.

Cours d'Algèbre élémentaire, par l'abbé F. VERHELST, docteur en philosophie, licencié en sciences physiques, professeur au collège St-Jean Berchmans à Anvers. *Tome deuxième.* Bruxelles, E. Ramlot, 1891. Un vol. in-8° de 196 pages.

Le tome deuxième du *Cours d'Algèbre* de M. l'abbé Verhelst renferme le calcul des radicaux, la résolution des équations du second degré, des questions de maximum et de minimum, des équations bicarrées, des équations réciproques et des équations binômes, les progressions, les logarithmes définis par les progressions et par la fonction exponentielle, les arrangements, les combinaisons et la formule du binôme. Les théories sont, comme dans le premier volume, exposées simplement, clairement, avec méthode et rigueur, et accompagnées d'exercices nombreux et bien choisis.

Peu de manuels d'Algèbre sont autant à la portée des élèves; peu sont à ce point appropriés à l'enseignement élémentaire; peu, croyons-nous, obtiendront un succès plus grand et plus mérité. H. GELIN.

Cours d'Algèbre, à l'usage de la classe de mathématiques spéciales et des candidats à l'École normale supérieure et à l'École Polytechnique, par B. NIEWENGLOWSKI, Docteur ès-sciences, ancien élève de l'École normale supérieure, Professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand. Deuxième édition. Paris, Colin et C^ie^ 1891. (Deux volumes gr. in-8° de II-385 et 508 p.). Prix : 12 francs.

Voici le sommaire de cet ouvrage dont nous publions un compte rendu détaillé dans la *Revue des questions scientifiques*.

LIVRE I. *Compléments d'algèbre élémentaire.* 1, 2 3. Limites des sommes, produits, quotients, racines; exposants fractionnaires, négatifs, incommensurables. 4, 5, 6. Polynômes ordonnés, division, plus grand commun diviseur. 7, 8, 9, 10, 11. Analyse combinatoire, binôme, formule de Taylor, racine m^ième^ d'une polynôme. 12. Limites de quelques expressions irrationnelles. 13, 14, 15. Déterminants, équations du premier degré, formes linéaires. 16. Imaginaires.

LIVRE II. 1. Séries. 2. Fractions continues. 3. Continuité. 4. Fonctions exponentielles; logarithmes.

LIVRE III. *Notions de calcul différentiel et de calcul intégral.* 1. Infiniment petits. 2. Calcul différentiel. 3. Applications à l'étude de la variation des fonctions. 4. Formules de Taylor et de Maclaurin. 5. Règle de l'Hospital. 6. Intégrales définies. 7. Fonctions de plusieurs variables indépendantes. 8. Formes quadratiques.

LIVRE IV. *Théorie des équations.* 1. Théorème fondamental; Racines infinies, etc. 2. Fonctions symétriques. 3. Divisibilité algébrique. 4. Racines égales. 5. Elimi-

nation. 6. Transformation des équations; abaissement. 7. Théorème de Descartes, de Rolle, de Budan et de Sturm. 8. Limites des racines. Racines commensurables. 9. Racines incommensurables. 10. Équations du 3e et du 4e degré. 11. Décomposition des fractions rationnelles. 12. Théorie des différences.

APPENDICE. 1. Fonction continue sans dérivée. 2. Démonstration du théorème fondamental de l'analyse algébrique, par Walecki. 3. Questions proposées dans divers concours et problèmes divers.

Le manuel de M. Niewenglowski est très complet; il dépasse de beaucoup les exigences des programmes. Nulle part, l'auteur n'a sacrifié la rigueur à la simplicité. Dans les théories des incommensurables, de la divisibilité algébrique, des imaginaires, des dérivées, des intégrales définies, son livre est à la hauteur des progrès réalisés par l'analyse depuis trente ans. Près de six cents exercices, souvent très difficiles, forment le complément des théories exposées dans le texte du livre.

Le *Cours d'Algèbre* de M. Niewenglowski est peut-être d'un usage difficile pour les élèves, comme semble le dire l'auteur lui-même dans sa préface, mais il rendra incontestablement de grands services aux professeurs de mathématiques spéciales désireux de se tenir au courant des méthodes rigoureuses d'exposition de l'analyse mathématique.

P. MANSION.

Extension de la méthode de Gräfe. Méthode pratique pour la résolution numérique complète des équations algébriques ou transcendantes, par M. E. CARVALLO, professeur au lycée S. Louis. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1890 (40 p. in-4°).

Au moyen du théorème de Taylor, on peut toujours ramener approximativement une équation transcendante à une équation algébrique. Une équation algébrique étant mise sous la forme $F(-x^2)+xf(-x^2)=0$, on trouve aisément que si l'on pose $y+x^2=0$, la transformée en y est $(Fy)^2+y(fy)^2=0$, de même degré que la première. En appliquant plusieurs fois cette transformation, on déduira, de l'équation donnée, une autre équation

$$A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \cdots + A_{m-1} z + A_m = 0,$$

où les racines seront égales à $-x^\mu$, μ étant une puissance de 2 aussi grande qu'on le veut. Les coefficients A se calculent aisément, d'une manière approximative, par le secours des logarithmes.

Aux racines de module distinct de l'équation en x, correspondent, dans l'équation en z, des racines de module tellement différent, pour μ suffisamment grand, que celles de module le plus petit sont absolument négligeables devant les autres. Par exemple, si toutes les racines de l'équation en x sont réelles, pour μ assez grand, les racines $a, b, \ldots, l$ de l'équation en z, qui sont telles que

$$a+b+\cdots+l=-\frac{A_1}{A_0}, \quad ab+ac+\cdots+kl=+\frac{A_2}{A_0}, \text{ etc.},$$

pratiquement vérifieront les relations

$$a=-\frac{A_1}{A_0}, \quad ab=\frac{A_2}{A_0}, \quad abc=-\frac{A_3}{A_0}, \quad \text{etc.},$$

si l'on suppose $a > b > c$, etc. Autrement dit, l'équation en z pourra subir une *dissociation complète* et être remplacée par

$$A_0 a + A_1 = 0, \quad A_1 b + A_2 = 0, \quad A_2 c + A_3 = 0, \text{ etc.}$$

Si l'équation en x a des racines de même module, par exemple des racines imaginaires, la *dissociation* de l'équation en z sera *incomplète*. Ainsi, en particulier, si les m racines de cette équation se divisent en trois groupes, j de module R ou supérieur à R, k de module R′ ou voisin de R′, l de module R″ ou inférieur à R″, les rapports R′ : R, R″ : R′ étant très petits, l'équation en z se dissociera en les trois suivantes :

$$A_0 z^j + A_1 z^{j-1} + A_2 z^{j-2} + \cdots + A_j = 0,$$

$$A_j z^k + A_{j+1} z^{k-1} + A_{j+2} z^{k-2} + \cdots + A_{j+k} = 0,$$

$$A_{j+k} z^l + A_{j+k-1} z^{l-1} + A_{j+k-2} z^{l-2} + \cdots + A_m = 0,$$

dont la première donnera les racines de module égal ou supérieur à R, la seconde celles de module voisin de R′, la troisième celles de module égal ou inférieur à R″.

Telle est, en substance, la méthode du géomètre suisse, Gräfe (1837), dont Encke (1841) et Merino (1879) ont signalé les avantages avant M. Carvallo. Mais c'est ce dernier qui a eu le mérite de l'exposer d'une manière pratique dans sa dissertation doctorale. Nous renvoyons le lecteur à cet intéressant opuscule pour la détermination du nombre μ et pour les détails des calculs et des exemples. Selon nous, tous ceux qui doivent enseigner la théorie des équations ne peuvent se dispenser de le lire et d'en faire connaître la substance à leurs élèves. (P. M.)

SUR LA DISTANCE DE DEUX POINTS;

par M. Aug. Poulain, à Angers.

M. Thiry a déduit récemment du théorème de Stewart, et sans trigonométrie, une formule qui donne la distance de tout point du plan d'un triangle à un potentiel d'ordre quelconque (*). Cette formule n'est qu'un cas particulier d'une de celles que Lagrange a données en 1783 (**). Elles s'appliquent à deux points quelconques M, M_0, rapportés à n points de référence A, B, ..., situés ou non dans le même plan.

Soient α, β, ... les coordonnées barycentriques de M, c'est-à-dire les masses à appliquer à A, B, ... pour que M soit leur centre de gravité;

(*) Supplément de *Mathesis*, juin 1891; et *Applications du théorème de Stewart* (Hoste, à Gand, et Gauthier-Villars).

(**) Tome V de l'édition Serret, p. 535. La démonstration occupe trois pages in-4°. (Voir aussi Steiner, *G. Werke*, II, p. 109-159, ou *Crelle*, XXI, 33-63. *Réd.*)

λ_0, μ_0, ... les coordonnées multipolaires de M_0, c'est-à-dire les distances M_0A, ... Posons enfin $\sigma = \alpha + \beta + \cdots$ D'après Lagrange, on a

$$\overline{MM_0}^2 = \frac{\Sigma\alpha\lambda_0^2}{\sigma} - \frac{\Sigma\overline{AB}^2\alpha\beta}{\sigma^2}, \tag{1}$$

$$\overline{MM_0}^2 = \frac{\Sigma\alpha(\lambda_0^2 - \lambda^2)}{\sigma}. \tag{2}$$

La remarquable méthode de M. Thiry permet d'établir la formule (1) dans toute sa généralité. En effet, soit P le centre de gravité des masses, sauf α. Si nous regardons le théorème comme vrai pour $n - 1$ masses, nous pouvons calculer M_0P, AP et alors il suffit d'appliquer le théorème de Stewart au triangle M_0AP.

De là on passe à la formule (2), en amenant M_0 en M. Le premier membre de (1) devenant nul donne

$$\Sigma\overline{AB}^2\alpha\beta = \sigma\Sigma\alpha\lambda^2, \tag{3}$$

et cette égalité permet de passer de (1) à (2).

Voici, pour (1), une autre démonstration, très rapide(*). Menons par M_0 trois axes rectangulaires. M étant un centre de gravité, ses coordonnées rectilignes X, Y, Z sont données par des équations de la forme

$$X = \frac{\Sigma\alpha\lambda_0 \cos XM_0A}{\sigma}; \quad Y = \text{etc.}; \quad Z = \text{etc.};$$

d'où élevant au carré et ajoutant,

$$\overline{MM_0}^2 = \frac{\Sigma\alpha^2\lambda_0^2 + 2\Sigma\alpha\beta\lambda_0\mu_0 \cos AM_0B}{\sigma^2}. \tag{4}$$

Si on remplace $2\lambda_0\mu_0 \cos AM_0B$ par $\lambda_0^2 + \mu_0^2 - \overline{AB}^2$, on trouve (1).

Applications. 1° La formule (1) comprend celle de Stewart (c'est le cas de deux points de référence), et par suite celles qui sont relatives à la médiane et à la bissectrice d'un triangle.

2° Elle donne les valeurs des coordonnées multipolaires λ, μ, ... de M en fonction de ses barycentriques α, β, ... Il suffit d'amener M_0 en A. Comme conséquence, Lagrange fait remarquer qu'étant données les

---

(*) C'est à peu près celle qui se trouve dans les *Exercices de mécanique* par de St Germain (1889, n° 21). Nous sommes arrivé à ces formules tripolaires par une autre voie dans le *Journal de Mathém. spéciales*, 1889, p. 8.

masses de différents corps et leurs distances mutuelles, on peut calculer la distance λ, ... de chacun d'eux au centre de gravité.

3° Cette formule (1) donne immédiatement la formule d'Euler relative à OI. On a

$$\overline{OI}^2 = R^2 - \frac{abc}{2p} = R^2 - 2Rr.$$

De même, elle donne le théorème de Feuerbach. Il suffit de calculer λ_0, ... pour le centre O_9 du cercle des neuf points, ce qui s'obtient en égalant deux valeurs de la puissance de A par rapport à ce cercle. On trouve

$$\lambda_0^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{bc\cos A}{2}.$$

Par suite

$$\overline{IO_9}^2 = \frac{R^2}{4} + \frac{abc}{4p}(\Sigma\cos A - 2) = \frac{R^2}{4} + Rr\left(\frac{r}{R} - 1\right) = \left(\frac{R}{2} - r\right)^2.$$

4° Si tous les points A, B, ... sont sur un même cercle ou une même sphère de rayon R, la puissance P de M, c'est-à-dire $\overline{MM_0}^2 - R^2$, a d'après (1), pour valeur

$$P = -\frac{\Sigma\overline{AB}^2\alpha\beta}{\sigma}. \tag{5}$$

On en tire immédiatement l'équation du cercle circonscrit à ABC ... et, par suite, l'équation d'un cercle quelconque, en exprimant qu'on a une conique passant par l'intersection du premier cercle avec la droite de l'infini $\sigma = 0$,

$$\sigma\Sigma l\alpha - \Sigma\overline{AB}^2\alpha\beta = 0.$$

Même résultat pour les sphères.

5° On sait que, dans le cas d'un triangle de référence, la distance MM_0 a pour valeur

$$\begin{aligned}\overline{MM_0}^2 &= -\Sigma\overline{AB}^2\left(\frac{\alpha}{\sigma} - \frac{\alpha_0}{\sigma_0}\right)\left(\frac{\beta}{\sigma} - \frac{\beta_0}{\sigma_0}\right) \\ &= -\frac{\Sigma\overline{AB}^2\alpha\beta}{\sigma^2} - \frac{\Sigma\overline{AB}^2\alpha_0\beta_0}{\sigma_0^2} + \frac{\Sigma\overline{AB}^2(\alpha\beta_0 + \beta\alpha_0)}{\sigma\sigma_0}.\end{aligned} \tag{6}$$

Cette formule reste vraie pour un nombre quelconque de points de référence A, B, ... et même dans l'espace. On la tire de (1) en remplaçant λ_0, ... en fonction de α_0, ...

NOTES MATHÉMATIQUES.

10. *Sur les formules de la Trigonométrie sphérique* (d'après M. Ed. Lucas). Pour l'établissement des formules générales de la géométrie analytique à trois dimensions et de la trigonométrie sphérique, il est préférable de prendre pour angles d'un triangle sphérique ABC, les suppléments des angles intérieurs. Soient donc a, b, c les côtés et A, B, C les angles *extérieurs* du triangle ABC. On a, moyennant cette convention,

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \quad \cos A = \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2} A} + \frac{\sin \frac{1}{2}(b-c)}{\sin \frac{1}{2}(B-C)} = 0, \quad \frac{\cos \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} A} + \frac{\cos \frac{1}{2}(b+c)}{\cos \frac{1}{2}(B+C)} = 0. \quad \text{(Delambre.)}$$

Si l'on pose

$$2p = a + b + c, \quad 2P = A + B + C,$$

la formule de Lhuillier s'écrit

$$\cot^2 \tfrac{1}{2} P = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} p \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p-a) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p-b) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p-c),$$

et donne par la considération du triangle A'BC (A' est l'antipode de A)

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}(P - A) = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p-b) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(p-c)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} p \operatorname{tang} \frac{1}{2}(p-a)}.$$

On peut permuter les lettres minuscules et les lettres majuscules et écrire par exemple

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}(p-a) = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(P-B) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(P-C)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} P \operatorname{tang} \frac{1}{2}(P-A)}.$$

De là

$$\cot \tfrac{1}{2} p \cot \tfrac{1}{2} P = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p-a) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(P-A) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p-b) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(P-B) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p-c) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(P-C)$$

11. *Problème de l'héritage. — Sixième solution.* Finck, dans son *Système d'Algèbre élémentaire*, Strasbourg 1839, page 560, donne la solution suivante, qu'il attribue à Euler, et qui diffère peu de la quatrième, de M. Catalan (p. 112) :

« On représentera, avec Euler, par x le bien total, par p_m la part du rang m, par s_{m-1} la somme des parts précédentes, et l'on aura

$$p_m = am + \frac{x - s_{m-1} - am}{n},$$

$$p_{m+1} = a(m+1) + \frac{x - s_{m-1} - p_m - a(m+1)}{n},$$

d'où

$$p_{m+1} - p_m = a - \frac{p_m + a}{n},$$

et

$$p_{m+1} = p_m \cdot \frac{n-1}{n} + a \cdot \frac{n-1}{n}. \qquad (1)$$

Cette relation prouve qu'il est permis de faire $p_{m+1} = p_m$, c'est-à-dire de supposer les parts égales : car cette hypothèse introduite dans (1) donne $p_m = a(n-1)$, quantité qui est en effet indépendante de m. »

« Je ferai observer, ajoute Finck, que cette solution n'a pas toute la généralité possible, si on ne suppose pas $p_m = p_{m+1}$. En effet, l'équation (1) est une équation aux différences finies, dont l'intégrale est

$$p_m = a(n-1) + C\left(\frac{n-1}{n}\right)^m,$$

C étant arbitraire.

Les parts sont donc

$$p_1 = a(n-1) + C\left(\frac{n-1}{n}\right),$$

$$p_2 = a(n-1) + C\left(\frac{n-1}{n}\right)^2, \text{ etc.}$$

Pour avoir x, on se sert de l'équation $p_1 = a + \frac{x-a}{n}$ qui donne

$$x = a(n-1)^2 + C(n-1).$$

Quant au nombre des parts, si on le nomme y, pour le trouver, on fera la somme des parts

$$a(n-1) + C\left(\frac{n-1}{n}\right),$$

$$a(n-1) + C\left(\frac{n-1}{n}\right)^2,$$

. . . . . .

$$a(n-1) + C\left(\frac{n-1}{n}\right)^y.$$

Cette somme devant être égale à x, on a

$$a(n-1)^2 + C(n-1) = ay(n-1) + (n-1)C\left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^y\right],$$

ou

$$a(n-1) = ay - C\left(\frac{n-1}{n}\right)^y.$$

Voilà donc une équation entre C et y. On pourra donner à y telle valeur ***entière positive*** qu'on voudra, cette équation donnera C ».

SUR LES QUADRANGLES COMPLETS;

par M. J. Neuberg.

(Fin; voir *Mathesis*, (2) I, p. 33, 67, 81.)

10. Pour simplifier l'écriture, nous désignons maintenant par X, Y, Z les milieux des côtés BC, CA, AB du triangle ABC; par X', Y', Z' les milieux des côtés opposés AD, BD, CD du quadrangle (fig. 1).

D'après un théorème connu, le lieu des centres des coniques passant par A, B, C, D, est une conique ayant pour diamètres les droites XX', YY', ZZ' et passant par les intersections P, Q, R des côtés opposés du quadrangle. Ce lieu porte le nom de ***conique des neuf points*** du quadrangle ABCD.

Fig. 1.

Il existe une hyperbole équilatère circonscrite au quadrangle. Son centre E est à l'intersection des cercles des neuf points des triangles ABC, BCD, CDA, DAB.

On peut remarquer le théorème suivant qui résulte immédiatement de ce qui précède et d'où Steiner a déduit une foule de propriétés curieuses des coniques (*Œuvres complètes*, t. II, p 689; *J. de Crelle*, t. LXVI, p. 237):

Soient XX', YY', ZZ' *trois droites qui se divisent mutuellement en parties égales au point* G. *Les cercles* XYZ, XY'Z', X'YZ', X'Y'Z *passent par un même point* E; *les cercles* X'Y'Z', X'YZ, XY'Z, XYZ' *se coupent en un*

même point E', *symétrique de* E *par rapport à* E. *Les droites* XX', YY', ZZ', EE' *sont quatre diamètres d'une même conique.*

Les huit cercles considérés se partagent de quatre manières en deux groupes de quatre cercles passant par un même point; par exemple, les cercles EXY, EX'Y', E'XY', E'X'Y passent par Z et les cercles E'X'Y', E'XY, EX'Y, EXY', par Z'. La relation entre les quatre droites XX', YY', ZZ', EE' est donc symétrique.

Revenant au quadrangle ABCD, nous pouvons énoncer la propriété suivante, peu connue: *Dans un quadrangle complet* ABCD *les quatre cercles* X'Y'Z', XYZ', XY'Z, X'YZ *qui passent par les milieux de trois côtés ayant une extrémité commune passent par un même point* E'.

Il existe un second quadrangle A'B'C'D' dont les côtés ont les mêmes milieux que ceux de ABCD; les deux quadrangles sont symétriques par rapport à G. E' est le centre de l'hyperbole équilatère passant par A', B', C', D'.

D'après une remarque faite ci-dessus, les points X, X' sont les centres de deux hyperboles équilatères circonscrites aux deux quadrangles dont les milieux des côtés sont en Y, Y', Z, Z', E, E'.

11. Désignons par $A_dB_dC_d$, $B_aC_aD_a$, ... les triangles orthiques des triangles ABC, BCD, ... ou ce qui revient au même, par $D_aD_bD_c$, $A_bA_cA_d$, ... les triangles podaires des points D, A, ... par rapport aux triangles ABC, BCD... Les cercles circonscrits aux triangles orthiques (cercles des neuf points) des triangles ABC, BCD, ... passent par le centre E de l'hyperbole équilatère ABCD. Nous allons démontrer que *les cercles circonscrits aux podaires* $D_aD_bD_c$, ... *passent* également *par* E. Cette importante proposition peut être établie de différentes manières.

La démonstration suivante nous a été communiquée par M. Déprez. Il faut prouver que la circonférence $B_cB_dB_a$ passe par E ou que l'angle $B_dB_aB_c = B_dEB_c$. Or

$$B_dB_aB_c = B_dB_aB - B_cB_aB;$$

et les quadrilatères BB_dCB_a, BB_cDB_a étant inscriptibles, on a

$$\textit{angle}\ B_dB_aB = B_dCB, \quad \textit{angle}\ B_cB_aB = B_cDB,$$

de sorte que

$$B_dB_aB_c = B_dCB - B_cDB = ACB - ADB.$$

D'autre part, E est situé sur les cercles des neuf points des triangles

ACB, ADB; donc les quadrilatères EB_dZC_d, EB_eD_eZ sont inscriptibles, et l'on peut écrire

$$\textit{angle}\ B_dEB_e = B_dEZ - B_eEZ = B_dC_dZ - B_eD_eA.$$

En faisant encore intervenir les quadrilatères inscriptibles CB_dC_dB, DB_eD_eB, on trouve

$$\textit{angle}\ B_dC_dZ = ACB, \quad B_eD_eA = ADB;$$

d'où

$$\textit{angle}\ B_aEB_e = ACB - ADB = B_dB_aB_e.$$

12. Voici une démonstration due à John Casey; elle est fondée sur le théorème suivant dont une partie est déjà connue (*Mathesis*, (1) II, p. 226).

Soient D_1, D_2, D_3 *les symétriques d'un point* D *par rapport aux côtés d'un triangle* ABC. *Les cercles* BCD_1, CAD_2, ABD_3, $D_1D_2D_3$ *passent par un même point* D' (fig. 2).

Fig. 2.

Pour prouver ce théorème, soit D' le second point d'intersection des cercles ABD_3, BCD_1, et soient D_a, D_b, D_c les projections de D sur BC, CA, AB. Les quadrilatères inscriptibles AD_3BD', BD_1CD', AD_cDD_b, D_aDD_bC donnent

$$\textit{angle}\ D_3D'D_1 = D_3D'B + BD'D_1 = D_3AB + BCD_1 = BAD + DCB$$
$$= D_cD_bD + DD_bD_a = D_3D_2D + DD_2D_1 = D_3D_2D_1.$$

Donc la circonférence $D_1D_2D_3$ passe par D'.

Les faisceaux (D, ABC) et (D', ABC) étant inversement égaux, DD' est le diamètre d'une hyperbole équilatère passant par A, B, C. Les circonférences $D_aD_bD_c$, $D_1D_2D_3$ ont évidemment pour centre de similitude le point D; donc puisque la seconde passe par D', la première passe par le milieu E de DD'.

On en conclut que *la circonférence circonscrite au triangle podaire d'un point* D *par rapport à un triangle* ABC *passe par le centre de l'hyperbole équilatère* ABCD.

Il résulte de là que les quatre circonférences circonscrites aux triangles podaires des points A, B, C, D par rapport aux triangles BCD, CDA, DAB, ABC passent par un même point.

Ce théorème comprend, comme cas particulier, la propriété suivante : *Le lieu des centres des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle* ABC *est le cercle des neuf points.* Car toutes ces hyperboles passent par l'orthocentre, et le cercle des neuf points est circonscrit au triangle podaire de l'orthocentre.

13. Pour abréger le discours, nous appellerons *cercle podaire* d'un point D par rapport à un triangle ABC le cercle circonscrit à son triangle podaire. Les cercles podaires d'un quadrangle ABCD sont les cercles podaires de chacun des sommets par rapport au triangle formé par les trois autres sommets; leurs centres, et ces cercles eux-mêmes seront désignés par ε_a, ε_b, ε_c, ε_d.

Soient D, F deux points inverses par rapport au triangle ABC. Ils ont même cercle podaire coupant le cercle des neuf points du triangle ABC en deux points *d*, *f* dont l'un est le centre de l'hyperbole équilatère ABCD, l'autre celui de l'hyperbole équilatère ABCF.

Si le point D se meut sur une hyperbole équilatère fixe (D), circonscrite au triangle ABC, son inverse F parcourt un diamètre fixe OW de la circonférence ABC. Par conséquent, *lorsqu'un point* F *décrit un diamètre de la circonférence circonscrite à un triangle* ABC, *son cercle podaire passe par un point fixe d, centre de l'hyperbole transformée isogonale de ce diamètre.*

Soient δ, φ les intersections de l'hyperbole (D) avec le diamètre OW; les cinq points A, B, C, δ, φ étant sur une même hyperbole, les points *d*, *f* coïncident, et *le cercle podaire des points* δ, φ *touche le cercle des neuf points du triangle* ABC. Cette proposition due à M. M'Cay généralise le théorème de Feuerbach; car on en déduit qu'un cercle inscrit ou exinscrit à ABC, touche le cercle des neuf points au centre de l'hyperbole équilatère qui passe par le centre du cercle inscrit ou exinscrit et par les points A, B, C. — Ces remarques nous ont été communiquées par MM. Casey et Sollertinsky.

14. On vient de voir que les cercles podaires ε_a, ε_b, ε_c, ε_d d'un quadrangle complet ABCD passent par un même point E. Nous allons donner de cette proposition une troisième démonstration, qui nous conduira à d'autres propriétés de ces cercles.

Soient A', B', C', D' les inverses (conjugués isogonaux) des points A, B, C, D par rapport aux triangles BCD, CDA, DAB, ABC (fig. 3). Les angles D'BC, CBA' sont égaux à ABD, et les angles D'CB, BCA'

égaux à ACD; donc les points D′ et A′ sont symétriques par rapport à BC. Par conséquent, les côtés du quadrangle ABCD sont perpendiculaires sur les milieux des côtés opposés du quadrangle A′B′C′D′, et les points A, B, C, D sont les centres des cercles B′C′D′, C′D′A′, D′A′B′, A′B′C′; propriété que nous avons déjà rencontrée ci-dessus (n° 7).

Appelons x', y', z' les milieux des côtés du triangle A′B′C′, et x, y, z ceux des droites D′A′, D′B′, D′C′. Il résulte d'une propriété des points inverses que *les cercles podaires du quadrangle* ABCD *sont les cercles* $xy'z'$, $x'yz'$, $x'y'z$, xyz *qui passent par les milieux de trois côtés du quadrangle* A′B′C′D′ *ayant une extrémité commune*. Donc ils passent par un même point E (§ 10).

Fig. 3.

Soit G′ l'intersection des droites xx', yy', zz'. *Les cercles* ε_a, ε_b, ε_c, ε_d *sont les symétriques, par rapport au point* G′, *des cercles des neuf points des triangles* B′C′D′, C′D′A′, D′A′B′, A′B′C′.

On conclut de là que l'hyperbole équilatère qui passe par A, B, C, D et a pour centre E passe aussi par les symétriques des points A′, B′, C′, D′ par rapport à G′, ou que *les hyperboles* ABCD, A′B′C′D′ *sont symétriques par rapport à* G′.

15. D'autres conclusions intéressantes se déduisent de la figure 3.

Les cercles podaires ε_a, ε_b, ε_c, ε_d *d'un quadrangle* ABCD *se coupent deux à deux en six points* x, x', y, y', z, z' *situés sur les côtés du quadrangle et symétriques deux à deux par rapport à un même point* G′. Par exemple, les cercles ε_d, ε_a se coupent en x sur BC, et les cercles ε_b, ε_c en x' sur AD.

Le point E étant situé sur la circonférence xyz, le faisceau (E, xyz) est inversement égal à celui de trois parallèles aux côtés du triangle xyz; il est donc inversement égal au faisceau (D, ABC). Mais les lignes des centres $\varepsilon_a\varepsilon_d$, $\varepsilon_b\varepsilon_d$, $\varepsilon_c\varepsilon_d$ des cercles podaires sont perpendiculaires aux cordes communes Ex, Ey, Ez; donc le faisceau (ε_d, $\varepsilon_a\varepsilon_b\varepsilon_c$) est symétriquement égal au faisceau (D, ABC). En considérant de même les faisceaux (ε_a, $\varepsilon_b\varepsilon_d\varepsilon_c$), ..., on voit que le quadrangle $\varepsilon_a\varepsilon_b\varepsilon_c\varepsilon_d$ est inversement semblable au quadrangle ABCD.

Le quadrangle $\varepsilon_a\varepsilon_b\varepsilon_c\varepsilon_d$ est directement égal à celui qui a pour sommets les centres des cercles des neuf points de quadrangle A'B'C'D'. On en conclut aisément que *les centres des cercles des neuf points d'un quadrangle* ABCD *sont les sommets d'un quadrangle métapolaire à* ABCD.

16. Nous avons vu (8) que les triangles podaires

$$A_bA_cA_d, \quad B_aB_dB_c, \quad C_dC_aC_b, \quad D_cD_bD_a$$

d'un quadrangle ABCD sont semblables.

Ces triangles sont deux à deux homologiques, les centres d'homologie étant les points d'intersection x, x', y, y', z, z' *des cercles circonscrits.* En effet, l'hexagone $A_cBA_dB_cAB_d$ étant inscriptible dans la circonférence de diamètre AB, les côtés opposés (A_cB, B_cA), (BA_d, AB_d), (A_dB_c, B_dA_c) se coupent en trois points D, C, z, qui sont en ligne droite. Or, si *deux triangles semblables sont homologiques, ils sont homothétiques ou bien les centres de similitude et d'homologie sont les deux points d'intersection des circonférences circonscrites*(*). Par conséquent, le point de concours z des droites A_dB_c, B_dA_c est l'un des points d'intersection des cercles circonscrits aux triangles $A_bA_cA_d$, $B_aB_dB_c$; le second point d'intersection E de ces cercles est le centre de similitude de ces triangles. Ainsi :

Les quatre triangles podaires d'un quadrangle complet ont deux à deux pour centre de similitude le point de rencontre E *des cercles circonscrits.*

Il résulte de là que quatre points homologues des triangles podaires sont les sommets d'un quadrangle de forme constante. En particulier, *les quadrangles* $A_bB_aC_dD$, $A_cB_dC_aD_b$, $A_dB_cC_bD_a$, $\varepsilon_a\varepsilon_c\varepsilon_b\varepsilon_d$ *sont semblables entre eux et ont pour centre de similitude le point* E.

Les quadrangles ABCD, $A_bB_aC_dD_c$ sont inversement semblables; leur point double est P, leurs droites doubles sont les bissectrices des angles formés par AB et CD, leur rapport de similitude égale séc (AB, CD). De même, les quadrangles $A_cB_dC_aD_b$ et $A_dB_cC_bD_a$ sont inversement semblables à ABCD, le point double étant R ou Q, et une droite double, la bissectrice de l'angle ARB ou AQB. On voit de nouveau que le quadrangle $\varepsilon_a\varepsilon_b\varepsilon_c\varepsilon_d$ est inversement semblable à ABCD.

(*) M. Sollertinsky s'est servi de ce lemme pour établir les propositions du n° 16. L'article de M. Terrier (N. A. M, 1876, p. 108) renferme une foule de propriétés des quadrangles, dont nous ne reprenons ici qu'une partie ; quelques énoncés sont difficiles à comprendre. — On peut démontrer directement que l'angle des droites A_dB_c, A_cB_d est égal à chacun des angles $B_dB_aB_c$, $A_cA_bA_d$.

Désignons par M le point qui dans le quadrangle ABCD, correspond au point E considéré dans le quadrangle $A_bB_aC_dD_c$. Les droites homologues MP, εP sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle APD.

Nous concluons de là que *les droites symétriques de* EP, EQ, ER *par rapport aux bissectrices des angles* APD, AQB, ARB *concourent en un même point* M. Les distances de E aux points ε_a, ε_b, ε_c, ε_d, sont égales aux rayons des cercles podaires, et par suite inversement proportionnelles à R_a, R_b, R_c, R_d (n° 8); donc *il existe dans le plan d'un quadrangle* ABCD *un point* M *dont les distances aux sommets sont inversement proportionnelles aux rayons des cercles* BCD, CDA, DAB, ABC.

17. Considérons l'hexagone inscriptible $A_cAA_dB_cBB_d$. Les côtés opposés (A_cA, B_cB), (AA_d, BB_d), (A_dB_c, B_dA_c) se coupent en trois points qui sont en ligne droite; autrement dit, les orthocentres H_c, H_d des triangles ABD, ABC sont en ligne droite avec le point d'intersection z des cercles podaires ε_a, ε_b. Donc les côtés du quadrangle complet $H_aH_bH_cH_d$ passent, respectivement, par les secondes intersections des cercles podaires.

18. Voici encore un théorème d'une extrême élégance, qui nous a été communiqué par M. Sollertinsky :

Les centres ω_a, ω_b, ω_c, ω_d *des cercles des neuf points des triangles* BCD, CDA, DAB, ABC *sont les centres des cercles circonscrits aux triangles* $\varepsilon_b\varepsilon_c\varepsilon_d$, $\varepsilon_c\varepsilon_d\varepsilon_a$, $\varepsilon_d\varepsilon_a\varepsilon_b$, $\varepsilon_a\varepsilon_b\varepsilon_c$ *qui ont pour sommets les centres des cercles podaires du quadrangle* ABCD.

En effet, ces huit cercles passent par le même point E. Les cercles ω_a et ε_b circonscrits respectivement aux triangles $B_aC_aD_a$ et $B_aB_cB_d$ ont pour corde commune EB_a; donc la droite $\omega_a\varepsilon_b$ est perpendiculaire au milieu de EB_a. De même $\omega_a\varepsilon_c$ est perpendiculaire à EC_a, et $\omega_a\varepsilon_d$ à ED_a. Par suite, le faisceau $(\omega_a, \varepsilon_b\varepsilon_c\varepsilon_d)$ est inversement égal au faisceau de trois parallèles ou perpendiculaires aux côtés du triangle $B_aC_aD_a$. Mais les rayons O_aB, O_aC, O_aD du cercle circonscrit au triangle BCD sont perpendiculaires aux côtés du triangle orthique $B_aC_aD_a$ de BCD; donc les faisceaux $(\omega_a, \varepsilon_b\varepsilon_c\varepsilon_d)$, (O_a, BCD) sont inversement égaux et comme les triangles $\varepsilon_b\varepsilon_c\varepsilon_d$, BCD sont inversement semblables, ω_a est le centre du cercle $\varepsilon_b\varepsilon_c\varepsilon_d$.

19. Lorsque le quadrangle ABCD est inscriptible, les cercles podaires sont remplacés par des droites de Simson. Pour ce cas particulier, nous renvoyons aux N. A. M., 1869, (2), VIII, pp. 175 et 317.

QUESTIONS D'EXAMEN.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS.

Composition de Mathématiques.

(5 juin, de 7 h. à 11 h.)

On donne une parabole P ; on porte à partir de chacun de ses points et dans le même sens sur une parallèle à une direction fixe Δ des longueurs égales à la distance de ce point au foyer de P.

1° Trouver le lieu des extrémités de ces longueurs : montrer qu'il se compose de deux paraboles P_1 et P_2, et donner la raison de ce dédoublement.

2° Démontrer que les axes des paraboles P_1, P_2 sont perpendiculaires l'un à l'autre, qu'ils pivotent autour d'un même point indépendant de la direction Δ et que la somme des carrés des paramètres des paraboles est constante.

3° Trouver et construire le lieu décrit par le sommet des paraboles P_1 et P_2 lorsqu'on fait varier la direction Δ.

On prendra comme axes de coordonnées l'axe et la tangente au sommet de P ; on désignera par p son paramètre et par θ l'angle de Δ avec l'axe des x.

Solution. 1° Soit $M(x_0, y_0)$ un point quelconque de P ; sur une parallèle à Δ par M prenons $MN_1 = MN_2 = MF$. On trouve aisément pour les coordonnées de N_1

$$x - x_0 = \left(x_0 + \frac{p}{2}\right)\cos\theta, \quad y - y_0 = \left(x_0 + \frac{p}{2}\right)\sin\theta; \qquad (1)$$

celles de N_2 s'obtiennent par le changement de θ en $\theta + \pi$.

Des égalités (1) on tire

$$x_0 = \frac{x - \frac{1}{2}p\cos\theta}{1 + \cos\theta}, \quad y_0 = y - \frac{x + \frac{1}{2}p}{1 + \cos\theta}\sin\theta;$$

d'où, à cause de $y_0^2 = 2px_0$, l'équation du lieu décrit par N_1 :

$$\left(y - \frac{x + \frac{1}{2}p}{1 + \cos\theta}\sin\theta\right)^2 = 2p\left(\frac{x - \frac{1}{2}p\cos\theta}{1 + \cos\theta}\right). \qquad (2)$$

La forme de ce résultat montre que le lieu est une parabole P_1 dont une tangente et le diamètre conjugué ont pour équations

$$x = \tfrac{1}{2}p\cos\theta, \quad y = (x + \tfrac{1}{2}p)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta. \qquad (3)$$

L'axe de P_1 fait donc avec l'axe des x l'angle $\frac{1}{2}\theta$.

Si dans les égalités (2) et (3) on remplace θ par $\theta + \pi$, on voit que N_2 décrit une parabole P_2 dont l'axe fait avec l'axe des x l'angle $\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\pi$. Les axes des deux courbes P_1 et P_2 sont donc rectangulaires.

A deux points M, M′ de la parabole P situés sur une même ordonnée, correspondent deux points N_1, N_1' de P_1 ayant même abscisse. Si M et M′ se confondent avec le sommet A de P, N_1 et N_1' se confondent en un seul point n_1; il en résulte que la tangente en n_1 à la parabole P_1 est verticale. C'est la tangente trouvée ci-dessus; le diamètre correspondant, représenté par la seconde des équations (3) passe constamment par le pied de la directrice de P.

2° Pour trouver l'axe de P_1, nous nous servons de la méthode de Salmon. A cet effet, nous écrivons l'équation (2) ainsi :

$$\left[y-(x+\tfrac{1}{2}p)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\lambda\right]^2 = 2p\,\frac{x-\frac{1}{2}p\cos\theta}{1+\cos\theta}+2\lambda\left[y-(x+\tfrac{1}{2}p)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right]+\lambda^2,$$

et nous déterminons λ par la condition que la tangente représentée par l'équation

$$2p\,\frac{x-\frac{1}{2}p\cos\theta}{1+\cos\theta}+2\lambda\left[y-(x+\tfrac{1}{2}p)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right]+\lambda^2=0$$

soit perpendiculaire à l'axe ou ait pour coefficient angulaire $-\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\theta$. Nous aurons $\lambda = \frac{1}{2}p\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta$; par conséquent l'équation (2) est équivalente à celle-ci :

$$[y - x\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta]^2 = p\left[y\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta + x + p\,\frac{1-3\cos^2\frac{1}{2}\theta}{4\cos^2\frac{1}{2}\theta}\right]$$

ou

$$\left[y\cos\frac{\theta}{2}-x\sin\frac{\theta}{2}\right]^2 = p\cos\frac{\theta}{2}\left[y\sin\frac{\theta}{2}+x\cos\frac{\theta}{2}\right]+\frac{p^2}{4}\left(1-3\cos^2\frac{\theta}{2}\right).$$

Posant

$$Y = y\cos\frac{\theta}{2}-x\sin\frac{\theta}{2},\quad X = y\sin\frac{\theta}{2}+x\cos\frac{\theta}{2},$$

on aura pour l'équation de P_1

$$Y^2 = pX\cos\frac{\theta}{2}+\frac{p^2}{4}\left(1-3\cos^2\frac{\theta}{2}\right).$$

L'axe a donc pour équation $Y = 0$; on voit qu'il passe constamment

par l'origine. Les paramètres $2p_1$, $2p_2$ des paraboles P_1, P_2 ont pour valeurs

$$2p_1 = 2p\cos\frac{\theta}{2}, \quad 2p_2 = 2p\sin\frac{\theta}{2}; \qquad \text{d'où} \qquad p_1^2 + p_2^2 = p^2.$$

3° Les coordonnées du sommet de P_1 satisfont aux équations

$$y\cos\frac{\theta}{2} - x\sin\frac{\theta}{2} = 0, \quad \cos\frac{\theta}{2}\left(y\sin\frac{\theta}{2} + x\cos\frac{\theta}{2}\right) + \frac{p}{4}\left(1 - 3\cos^2\frac{\theta}{2}\right) = 0.$$

Éliminant θ, on trouve

$$(8x - p)(x^2 + y^2) = 3p(x^2 - y^2), \quad \text{ou} \quad y^2 = x^2\frac{\frac{1}{2}p - x}{x + \frac{1}{4}p};$$

on voit par cette équation que la forme du lieu des sommets des paraboles P_1 et P_2 se rapproche sensiblement de celle d'une strophoïde droite.

Solution géométrique. Nous ne faisons qu'indiquer la méthode. Soit MQ la perpendiculaire abaissée de M sur la directrice δ de P. Comme $MQ = MF = MN_1 = MN_2$, les triangles isoscèles MQN_1, MQN_2 sont de forme constante. Donc pour passer de P à P_1 ou P_2, on fait tourner d'un angle constant autour de leur pied les ordonnées de P relatives à δ. Cette transformation change les diamètres et les tangentes de P en des diamètres et des tangentes de P_1 ou P_2.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 691.

(Voir *Mathesis*, (1), X, p. 216.)

Un disque elliptique se déplace en restant toujours tangent à une droite fixe O*x en un point donné* O. *Quel est le lieu géométrique du centre de courbure de l'ellipse au point où elle est rencontrée par la normale fixe* O*y?*

(H. Brocard.)

Solution par M. V. Jamet (Marseille). Soit

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + y^2 - 2\lambda y = 0,$$

l'équation de l'ellipse rapportée aux deux droites O*x*, O*y*. Cherchons d'abord les relations qui doivent exister entre α, β, λ pour que cette ellipse soit de grandeur constante. Si elle était rapportée à deux axes

parallèles aux axes primitifs et passant par son centre, son équation serait :

$$\frac{-\beta^2+\alpha}{\alpha\lambda^2}\cdot(\alpha x^2+2\beta xy+y^2)-1=0;$$

si elle était rapportée à ses axes de symétrie, son équation serait

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1=0.$$

Si l'on fait

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=H,\quad \frac{1}{a^2b^2}=K, \tag{a}$$

on trouve, en vertu des propriétés des invariants :

$$\frac{(-\beta^2+\alpha)(\alpha+1)}{\alpha\lambda^2}=H,\quad \frac{(\alpha-\beta^2)^2}{\alpha^2\lambda^4}=K. \tag{b}$$

On en conclut :

$$\lambda=\pm\sqrt{\frac{K}{H^2}}\cdot\frac{(\alpha+1)^{\frac{2}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}},\quad \beta=\pm\frac{1}{H}\sqrt{H^2\alpha-K(\alpha+1)^2}.$$

En outre, l'équation de la normale à la courbe (1), au point x, y, est :

$$(\beta x+y-\lambda)(X-x)-(\alpha x+\beta y)(Y-y)=0,$$

X, Y, désignant les coordonnées courantes ; et cette normale touche son enveloppe en un point situé sur la droite représentée par l'équation :

$$\frac{\beta(X-x)-\beta x-y+\lambda-\alpha(Y-y)}{\alpha x+\beta y}=\frac{X-x-\beta(Y-y)+\alpha x+\beta y}{\beta x+y-\lambda}.$$

Si, dans ces deux dernières équations, on fait $x=0$, $y=2\lambda$, on voit que les coordonnées X, Y, d'un point du lieu remplissent les conditions suivantes :

$$X-2\beta(Y-2\lambda)=0,\quad \frac{\beta X-\lambda-\alpha(Y-2\lambda)}{2\beta}=X-\beta(Y-2\lambda)+2\beta\lambda.$$

On en conclut :

$$X=-\frac{2\beta}{\alpha}\lambda,\quad Y=\frac{2\alpha-1}{\alpha}\lambda,$$

puis, en vertu des formules (b),

$$X=\pm\frac{2}{H^2}\sqrt{\frac{K}{H}}\sqrt{-K(\alpha+1)^2+H^2\alpha}\cdot\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$Y=\pm\frac{1}{H}\sqrt{\frac{K}{H}}(2\alpha-1)\cdot\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ainsi, les deux coordonnées de chaque point du lieu s'expriment par des fonctions irrationnelles d'un même paramètre α. Je dis qu'on peut aussi les exprimer en fonction rationnelle d'un même paramètre u, et de la racine carrée d'un polynôme bicarré par rapport à u; de telle sorte que la courbe actuellement étudiée appartient à une catégorie de courbes signalées par Clebsch (*J. de Crelle*, t. 64, p. 210).

Posons :

$$\frac{\alpha+1}{\alpha}=u^2, \quad \text{ou bien} \quad \alpha=\frac{1}{u^2-1},$$

les formules précédentes deviendront :

$$X=\pm\frac{2}{H^2}\sqrt{\frac{K}{H}}\sqrt{-Ku^4+H(u^2+1)}\cdot\frac{u^3}{u^2-1},$$

$$Y=\pm\frac{1}{H}\sqrt{\frac{K}{H}}\cdot(3-u^2)\cdot\frac{u^3}{u^2-1},$$

et enfin, en vertu des formules (a),

$$\left.\begin{aligned} X&=\pm\frac{2a^2b^2}{(a^2+b^2)^{\frac{5}{2}}}\sqrt{-\left[u^2-a^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right]\left[u^2-b^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right]}\frac{u^3}{u^2-1}\\ Y&=\pm\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^{\frac{5}{2}}}\cdot\frac{(3-u^2)u^3}{u^2-1}.\end{aligned}\right\}(c)$$

Ces formules montrent que la courbe se compose de deux boucles fermées, symétriques l'une de l'autre par rapport à Ox, et admettant, l'une et l'autre, l'axe Oy pour axe de symétrie. Si l'on a $\frac{b^2}{a^2}<\frac{1}{2}$, les deux boucles se coupent mutuellement en deux points situés sur Ox, à égale distance du point O; si $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$, elles se touchent à l'origine; si $\frac{b^2}{a^2}>\frac{1}{2}$, elles n'ont aucun point commun.

Mais nous pensons que si l'étude de cette courbe présente quelque intérêt, cet intérêt réside surtout dans la recherche des intégrales auxquelles elle donne naissance.

Soit $f(X, Y)$ une fonction rationnelle des coordonnées d'un point mobile sur cette courbe. L'intégrale

$$\int f(X, Y)\,dY$$

se transformera, par les formules (*c*), en une somme d'intégrales algébriques, logarithmiques ou elliptiques; je dis que *ces dernières seront toutes de troisième espèce.*

En effet, supposons que la fonction $f(X, Y)$ se transforme comme il suit :

$$f(X, Y) = \frac{P + Q\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}}{S + T\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}},$$

où

$$\alpha^2 = a^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right), \quad \beta^2 = b^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right),$$

P, Q, S, T désignant des fonctions entières de u. En multipliant les deux termes de la fraction précédente par

$$S - T\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)},$$

on parvient à la mettre sous la forme

$$U + V\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)},$$

U, V désignant des fonctions rationnelles de u : nous nous occuperons exclusivement de l'intégrale

$$\int V\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}\, dY.$$

La fonction V se décompose en un polynôme entier $\Sigma A_k u^k$, et en une somme de fractions simples de la forme

$$\Sigma \frac{B_k}{(u - a)^k}.$$

Mais l'intégrale

$$\int \frac{dY}{(u - a)^k}$$

est égale à

$$\frac{1}{1.2.3 \ldots k} D_z^{k-1} \int \frac{dY}{(u - z)}, \quad \text{pour} \quad z = a.$$

Nous sommes donc ramenés à étudier 1° les intégrales de la forme

$$\int u^k . \sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}\, dY. \tag{A}$$

2° les intégrales de la forme

$$\int \frac{\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}\, dY}{u - a}. \tag{B}$$

1° A un facteur constant près, la différentielle de Y est égale à

$$u^2 . \frac{9 + 8u^2 - 3u^4}{(u^2 - 1)^3} du,$$

de sorte que toute intégrale de la forme (A) se transforme aisément en une somme d'intégrales de la forme suivante :

$$\int \frac{u^{2r} du}{(u^2 - 1)^2 \sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}}, \qquad (C)$$

ou de la forme :

$$\int \frac{u^{2r+1} du}{(u^2 - 1)^2 \sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}}.$$

Dans ce dernier cas, on revient aux fonctions élémentaires, en prenant u^2 pour variable indépendante.

Considérons l'identité

$$d\left(\frac{u^q \sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}}{u^2 - 1}\right) =$$

$$\frac{(q-4)u^{q+5} - (q+3)(\alpha^2 + \beta^2)u^{q+3} + [(q+1)(\alpha^2 + \beta^2) + (q+2)\alpha^2\beta^2]u^{q+1}}{(u^2 - 1)^2 \sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}} du$$

Intégrons les deux membres et remplaçons q par $2r - 5$, nous trouvons que toute intégrale de la forme (C) est la somme de trois termes, dont l'un est une fonction algébrique de u, et dont les deux autres sont, à des facteurs numériques près, des intégrales de la même forme, où r est remplacé, respectivement, par $r - 1$ et par $r - 2$. Le calcul de l'intégrale (C) se ramène donc ainsi, de proche en proche, à celui des intégrales

$$\int \frac{u^2 du}{(u^2 - 1)^2 \sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}}, \quad \int \frac{du}{(u^2 - 1)^2 \sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}}, \qquad (D)$$

qui se rattachent comme il suit à l'intégrale elliptique de troisième espèce. La première des deux intégrales ci-dessus est égale à

$$\int \frac{du}{(u^2 - 1)\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}} + \int \frac{du}{(u^2 - 1)^2 \sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}}. \qquad (E)$$

Posons

$$F(z) = \int \frac{du}{(u^2 - z)\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}}$$

la fonction (E) est égale à

$$F(z)+F'(z), \quad \text{pour} \quad z=1.$$

Quant à la fonction (D), elle est égale à $F'(z)$, pour $z=1$.

2° L'intégrale (B) est égale à une somme de termes de la forme :

$$\int \frac{u^{2p}du}{(u^2-1)^3(u-a)\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}, \qquad (F)$$

multipliés chacun par un coefficient constant.

Or :

$$\frac{u^{2p}}{u-a}=u^{2p-1}+au^{2p-2}+\cdots+a^{2p-1}+\frac{a^{2p}}{u-a}.$$

Ceci permet de transformer l'intégrale (F) en une somme d'intégrales de la forme (A), augmentée du terme suivant :

$$a^{2p}\int \frac{du}{(u^2-1)^3(u-a)\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}. \qquad (G)$$

En outre :

$$\frac{1}{(u^2-1)^3(u-a)}=\frac{au^2+2au+1}{2(1-a^2)(u^2-1)^2}+\frac{1}{(a^2-1)^2(u-a)}.$$

Donc enfin l'intégrale (G) se transforme en une somme d'intégrales de la forme (A), augmentée de l'intégrale elliptique de troisième espèce

$$\int \frac{du}{(u-a)\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}$$

multipliée par un facteur constant.

Bessan (Hérault), 14 septembre 1890.

×Question 701.

(Voir *Mathesis*, (2), I, pp. 32 et 79.)

Soient : ABCD *un rectangle inscrit dans la circonférence* O ; E *le milieu de* AD ; G *le point de rencontre de la circonférence avec la droite* CE ; F *un point quelconque de la diagonale* DB *et* K *sa projection sur* AD ; I *le milieu du segment* AK.

1° *L'angle* GIF = GAB. 2° *Si par* F *on mène une parallèle à* AD, *rencontrant* CE *en* N *et* BE *en* M, *les cinq points* F, N, D, G, I *sont sur une même circonférence.* 3° *Si* GF *rencontre en* P *la circonférence* O, *le quadrila-*

tère BMFP *est inscriptible et les points* A, M, P *sont sur une parallèle à* FI. 4° *Les droites* FI, AB *se rencontrent sur la circonférence circonscrite au triangle* AIG. (A. C.)

Solution par MM. Cristesco, Mandart *et* Dépréz. 1° Soit Q le point de rencontre de MN avec AB. On trouve aisément que FQ = AK, FM = MQ; par conséquent, MF = MQ = KI = IA; MI est donc parallèle à FK, AM à FI. Le triangle AGE, semblable à CDE, est semblable à BAE, et comme

$$AI : AE = MF : ED = BM : BE$$

les triangles partiels GAI, GIE sont semblables à ABM, AME. Il en résulte que l'angle GID = AME; par suite,

$$\textit{angle}\ GIF = GIE + EIF = AME + EAM = \pi - AEM = AEN,$$

et comme les angles GAB, AEC ont même mesure, les angles GIF, GAB sont égaux.

2° On vient de trouver

$$\textit{angle}\ GIF = IEN = \pi - ENF;$$

donc les points G, I, F, N, sont concycliques. On a aussi

$$\textit{angle}\ GIF = GAB = \pi - GDB;$$

par suite, la circonférence GIFN passe également par D(*).

3° L'angle

$$EMN = ENM = BCG = BPG;$$

donc le quadrilatère BMFP est inscriptible.

L'angle

$$PMF = PBF = PAD = \pi - AMN;$$

donc AM et MP ne forment qu'une seule ligne droite.

4° Soit H le point de rencontre de IF avec AB. On a

$$\textit{angle}\ AGI = BAM = AHI;$$

donc les points A, H, G, I appartiennent à une même circonférence.

Remarques par M. Liénard. La droite FI partage BD et AE en parties proportionnelles; car si MN coupe AB en Q, on a

$$MF = MQ = AI, \quad \text{d'où} \quad BF : BD = MF : ED = AI : AE.$$

(*) L'énoncé portait par erreur que FA est une tangente. Si l'on place F en B, FA coïncide avec BA, et la circonférence FIGDN avec la circonférence donnée ; or celle-ci ne touche pas BA.

Donc IF enveloppe une parabole S tangente aux droites BD, AD. AB est une position particulière de IF; donc c'est une tangente à S. Lorsque F est en D, I est en E; par suite S touche AD en E.

Le cercle circonscrit à un triangle formé par trois tangentes à une parabole passe par le foyer. Pour la parabole S, deux triangles circonscrits sont DBA, DFI; un troisième triangle a pour côtés BD, ED, ED, E étant le point de contact de AD. Donc les cercles ABD, IFD et le cercle passant par E et D et touchant BD en D se coupent au foyer de S. Le premier et le dernier de ces cercles se coupent en G, sur la droite CE; donc G est le foyer de S, et la circonférence DIF passe par G.

Il serait facile de déduire de là les propositions contenues dans la question 701.

×Question 710.

(Voir *Mathesis*, (2), I. p. 80.)

Si la relation

$$(-r_1+r_2+r_3)(r_1-r_2+r_3)(r_1+r_2-r_3)=-8r_1r_2r_3$$

existe entre les rayons des cercles exinscrits à un triangle ABC, *le périmètre de ce triangle est égal à* $r_1+r_2+r_3$. (Leudesdorf.)

Solution par MM. Lemoine, Delahaye, Emmerich, Decamps, Déprez, Russo, Cristesco, Denys, François, Mandart et M^lle^ De Haas. Posons $r_1+r_2+r_3=\partial$; la relation donnée s'écrit

$$(\partial-2r_1)(\partial-2r_2)(\partial-2r_3)=-8r_1r_2r_3.$$

Effectuant le produit et observant que $r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=p^2$ (*), on obtient $\partial^2=4p^2$; ce qu'il fallait démontrer.

(*) Cette relation se déduit facilement des formules $r_1=\frac{S}{p-a}$, etc., ou de $r_1=p\operatorname{tg}\frac{1}{2}A$, etc. — Les différentes solutions qui nous ont été adressées présentent quelques variantes peu importantes.

REMARQUE I. On démontrerait de même que la relation

$$(r + r_1 + r_3)(r + r_2 - r_3)(r - r_2 + r_3) = 8rr_2r_3$$

a pour conséquence $2(p - a) = r_2 + r_3 - r$. (LEMOINE.)

REMARQUE II. La relation proposée peut être écrite ainsi

$$(r_1 + r_2 + r_3)[(r_1 + r_2 + r_3)^2 - 4(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1)] = 0.$$

Elle se décompose en

$$r_1 + r_2 + r_3 = 0,$$
$$(r_1 + r_2 + r_3)^2 - 4(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1) = 0;$$

la dernière égalité est équivalente à

$$\sqrt{r_1} \pm \sqrt{r_2} \pm \sqrt{r_3} = 0.$$

Si l'on considère r_1, r_2, r_3 comme les coordonnées barycentriques d'un point, l'équation proposée exprime que ce point est à l'infini ou sur l'ellipse qui touche les côtés du triangle de référence en leurs milieux. (DÉPREZ.)

REMARQUE III. Si entre les rayons sphériques des cercles exinscrits à un triangle sphérique ABC, on a la relation

$$(-\operatorname{tg} r_1 + \operatorname{tg} r_2 + \operatorname{tg} r_3)(\operatorname{tg} r_1 - \operatorname{tg} r_2 + \operatorname{tg} r_3)(\operatorname{tg} r_1 + \operatorname{tg} r_2 - \operatorname{tg} r_3) + 2 \operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg} r_2 \operatorname{tg} r_3 = 0,$$

on a également

$$\operatorname{tg} r_1 + \operatorname{tg} r_2 + \operatorname{tg} r_3 = 2 \sin p \sqrt{1 + 2 \operatorname{tg} r \operatorname{tg} R}. \quad \text{(DÉPREZ.)}$$

Question 711.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 80.)

On considère une hyperbole équilatère H ***et le quadrilatère formé par les tangentes aux points d'incidence des normales issues d'un même point. Démontrer que les circonférences décrites sur les diagonales du quadrilatère comme diamètres passent par le centre de*** H ***et en ce point, sont mutuellement tangentes.*** (DE LONGCHAMPS.)

Solution par M. LIÉNARD. Soit $x^2 - y^2 = a^2$ l'équation de l'hyperbole, et soient A, B, C, D les points d'incidence des normales issues du point P(X, Y); on sait que ces points sont sur une seconde hyperbole représentée par

$$2xy - xY - yX = 0.$$

Le système des cordes AB, CD communes aux deux hyperboles a une équation de la forme

$$\lambda(x^2 - y^2 - a^2) + \mu(2xy - xY - yX) = 0. \qquad (1)$$

Si (x_1, y_1), (x_2, y_2) sont les coordonnées des pôles M, N de ces cordes, l'équation (1) doit être identique avec

$$(xx_1 - yy_1 - a^2)(xx_2 - yy_2 - a^2) = 0.$$

D'où les égalités de condition

$$\left.\begin{array}{c} x_1x_2 = \lambda, \quad y_1y_2 = -\lambda, \quad x_1y_2 + x_2y_1 = -2\mu, \\ a^2(x_1 + x_2) = \mu Y, \quad a^2(y_1 + y_2) = -\mu X, \quad a^2 = -\lambda. \end{array}\right\} (2)$$

D'autre part, la circonférence décrite sur MN comme diamètre a pour équation

$$\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right)^2,$$

Si elle passe par l'origine, on a

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0, \qquad (3)$$

et le coefficient angulaire de la tangente en ce point est égal à

$$-\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}.$$

Au moyen des relations (2), on constate immédiatement que l'égalité (3) est vérifiée et que la tangente en O a pour coefficient angulaire (Y : X) ou coïncide avec OP.

Voici une démonstration un peu différente. Les points d'incidence A, B, C, D des normales abaissées d'un point P à une hyperbole équilatère (H) sont situés sur une seconde hyperbole équilatère (H′) passant par le centre O de (H) et par le point P, et ayant des asymptotes parallèles aux axes de (H). Ces points étant situés à la fois sur deux hyperboles équilatères sont les sommets d'un quadrangle orthogonal ABCD ; c'est-à-dire que AB et CD, AC et BD, AD et BC sont des droites rectangulaires.

Soient M, N les pôles de AB, CD par rapport à (H). Les diamètres OM, ON conjugués avec les cordes rectangulaires AB, CD sont également rectangulaires ; donc la circonférence décrite sur MN comme diamètre passe par O. Le centre O est aussi situé sur la droite joignant

les milieux des diagonales du quadrilatère formé par les tangentes aux points A, B, C, D (Théorème de Newton). Ceci suffit pour démontrer complètement le théorème.

Autre solution, analytique, par M. DECAMPS.

×Question 713.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 104.)

Soient H *l'orthocentre du triangle* ABC, M *un point quelconque de son plan et* H_a, H_b, H_c, *les orthocentres des triangles* AMH, BMH, CMH. *Démontrer que les circonférences circonscrites aux triangles* AMH_a, BMH_b, CMH_c *passent par un même point.* (MEURICE.)

Solution par Mˡˡᵉ DE HAAS *et* M. SOLLERTINSKY. Les circonférences AMH_a, BMH_b, ABC sont les symétriques des circonférences AMH, BMH, ABH par rapport aux côtés du triangle ABM; elles concourent donc en un même point H_1 (jumeau de H par rapport au triangle ABM). De même, les circonférences BMH_b, CMC_c, ABC passent par un même point; etc.

×Question 715(*).

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 104.)

Si n *est impair et premier avec* 5, *le polynôme*

$$x^{4n} - x^{3n} + x^{2n} - x + 1 \tag{A}$$

est divisible par

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1. \tag{B}$$

(SHARP.)

Solution par MM. EMMERICH, GREENSTREET et SOONS. Le quotient de ces polynômes peut être écrit ainsi

$$\frac{x^{5n}+1}{x^n+1} : \frac{x^5+1}{x+1} = \frac{(x^{5n}+1)(x+1)}{(x^n+1)(x^5+1)}. \tag{1}$$

Si n est impair, $x^{5n}+1$ est à la fois divisible par x^n+1 et x^5+1; mais ces derniers binômes n'ont pas d'autre facteur commun que $x+1$, pourvu que n soit premier avec 5. Le facteur $x+1$ entrant deux fois

---

(*) Question 8951 de l'*Educational Times*. Dans la transcription de l'énoncé les mots « et premier avec 5 » avaient été oubliés (J. N.)

dans le numérateur de la fraction (1), celle-ci se réduit à un polynôme entier.

Solution par M. Joachimescu. Les racines de l'équation

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$$

sont

$$x = \cos\frac{\pi}{5} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{5}, \quad x = \cos\frac{3\pi}{5} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{5}. \qquad (2)$$

Le polynôme (A) peut s'écrire ainsi

$$x^{2n}\left[\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^2 - \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) - 1\right];$$

la quantité entre crochets, pour les valeurs (2), se réduit à

$$4\cos^2\frac{n\pi}{5} - 2\cos\frac{n\pi}{5} - 1, \quad 4\cos^2\frac{3n\pi}{5} - 2\cos\frac{3n\pi}{5} - 1. \qquad (3)$$

Le polynôme (B) étant mis sous la forme

$$x^2\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1\right],$$

on trouve pour la quantité entre crochets

$$4\cos^2\frac{\pi}{5} - 2\cos\frac{\pi}{5} - 1, \quad 4\cos^2\frac{3\pi}{5} - 2\cos\frac{3\pi}{5} - 1, \qquad (4)$$

expressions qui sont nulles, puisque les valeurs (2) sont les racines de l'équation

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1.$$

Or, les expressions (3) se ramènent aux quantités (4) lorsque n est un nombre impair, premier avec 5. Donc, etc.

Remarque. Plus généralement, si m est un nombre impair premier avec n, le polynôme

$$x^{(m-1)n} - x^{(m-2)n} + \cdots + 1$$

est divisible par

$$x^{m-1} - x^{m-2} + \cdots + 1. \quad \text{(Emmerich et Greenstreet.)}$$

×Question 718.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 104.)

Résoudre le système

$$xyz + x - y - z = a(1 + yz - xz - xy), \quad (1)$$
$$xyz + y - z - x = b(1 + xz - xy - yz), \quad (2)$$
$$xyz + z - x - y = c(1 + xy - yz - zx). \quad (3)$$

Solution par MM. MANDART *et* EMMERICH. L'équation (1), peut s'écrire, successivement,

$$x(yz + 1) - (y + z) = a(1 + yz) - ax(y + z),$$
$$(x - a)(1 + yz) = (1 - ax)(y + z), \quad \frac{1 + yz}{y + z} = \frac{1 - ax}{x - a},$$
$$\frac{1 + yz + y + z}{1 + yz - y - z} = \frac{1 - ax + x - a}{1 - ax - x + a}, \quad \frac{(1 + y)(1 + z)}{(1 - y)(1 - z)} = \frac{(1 + x)(1 - a)}{(1 - x)(1 + a)},$$

d'où pour les trois équations proposées :

$$\frac{(1+x)(1+y)(1+z)}{(1-x)(1-y)(1-z)} = \frac{(1+x)^2}{(1-x)^2} \cdot \frac{1-a}{1+a} = \frac{(1+y)^2}{(1-y)^2} \cdot \frac{1-b}{1+b} = \frac{(1+z)^2}{(1-z)^2} \cdot \frac{1-c}{1+c}.$$

Soit ρ la valeur commune des quatre rapports ; en faisant le produit des trois derniers, on trouve

$$\rho^3 = \rho^2 \frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{(1+a)(1+b)(1+c)}, \quad \rho = \frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{(1+a)(1+b)(1+c)}.$$

Ensuite

$$\frac{1+x}{1-x} = \pm \sqrt{\frac{(1-b)(1-c)}{(1+b)(1+c)}}, \quad \text{etc.}$$

Solution par MM. DÉPREZ *et* CRISTESCO. Les équations (1) et (2) peuvent prendre la forme

$$(x-y)(1+az) = (1-xy)(a+z), \quad (y-x)(1+bz) = (1-xy)(b+z),$$

d'où par division

$$\frac{1+az}{1+bz} + \frac{a+z}{b+z} = 0, \quad \text{ou} \quad z^2 + \frac{2(ab+1)}{a+b} + 1 = 0, \quad \text{etc.}$$

Solution par M. BROCARD. L'élimination de z entre les deux dernières équations donne, après suppression du facteur $y^2 - 1$,

$$(b + c)x^2 + 2(1 + bc)x + (b + c) = 0 ; \quad (4)$$

par analogie

$$(c+a)y^2+2(1+ca)y+(c+a)=0, \text{ etc.}$$

Remarques. I. Les valeurs de b et c déduites de (2) et (3) doivent évidemment satisfaire à l'équation (4); donc si on les désigne par $\frac{M}{N}, \frac{R}{S}$, on a, identiquement

$$(1+x^2)(MS+RN)=-2x(MR+MS);$$

c'est ce que l'on vérifie aisément, car on trouve

$$MS+RN=-2x(1-y^2)(1-z^2),\ MR+NS=(1+x^2)(1-y^2)(1-z^2).$$

Le type de polynôme $(1-y^2-z^2+y^2z^2)$ se retrouve pareillement dans le discriminant de l'équation (4) :

$$(1+bc)^2-(b+c)^2 \quad \text{ou} \quad (1-b^2)(1-c^2).$$

Pour que ce discriminant soit un carré parfait, on peut prendre

$$1+bc=p^2+q^2,\quad b+c=2pq;$$

alors on trouvera $x=-\frac{p}{q}$ ou $-\frac{q}{p}$.

On pouvait prévoir que chaque inconnue a des valeurs réciproques; en effet, les équations (1), (2), (3) ne changent pas quand on remplace x, y, z, a, b, c par $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$, etc. (H. Brocard.)

II. Les inconnues x, y, z seront réelles si a, b, c sont égaux à des sinus, ou à des sécantes, c'est-à-dire si a^2, b^2, c^2 sont tous trois inférieurs, ou tous trois supérieurs à l'unité. (Cristesco.)

MM. Denys et Decamps ont également donné de bonnes solutions de la question 718.

×Question 719.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 104.)

Si A, B, C *sont les angles d'un triangle*

$$\Sigma \sin^2(A-B)-\Sigma \sin(A-B)\sin(A-C)\cos A$$
$$=\tfrac{1}{2}[1-8\cos A\cos B\cos C]\Sigma \sin^2 A. \qquad \text{(Edwards.)}$$

Solution par M. Lemoine. Au moyen des égalités

$$\sin(A-B)=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin(A+B)}=\frac{a^2-b^2}{2Rc}, \text{ etc.}$$

le premier membre prend successivement les formes

$$\frac{1}{4R^2}\mathcal{S}\frac{(a^2-b^2)^2}{4c^2}-\frac{1}{4R^2}\mathcal{S}\frac{(c^2-a^2)(c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{2a^2b^2},$$

$$\frac{1}{8R^2a^2b^2c^2}\mathcal{S}[2a^2b^2(a^2-b^2)^2-c^2(c^2-a^2)(c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)],$$

$$\frac{1}{8R^2a^2b^2c^2}[a^6+b^6+c^6-2b^4c^4-2c^4a^4-2a^4b^4+a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)],$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{8R^2a^2b^2c^2}[a^2b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)],$$

$$\frac{1}{2}\frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}\left[1-8\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right].$$

La dernière expression se ramène au deuxième membre de l'égalité proposée; donc le théorème est démontré.

Solution par M. Dipeau. Soient x, y, z les projections d'un segment PQ sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle. On a la relation générale

$$\frac{1}{2}\overline{PQ}^2\,\mathcal{S}\sin^2 A=\mathcal{S}x^2+\mathcal{S}yz\cos A. \qquad (1)$$

En effet, si l'on mène AL égal et parallèle à PQ et que B', C' soient les projections de L sur AB, AC, AL est le diamètre du cercle AB'C'; donc

$$AL=\frac{B'C'}{\sin A}=\frac{\sqrt{\overline{AB'}^2+\overline{AC'}^2+2AB'.AC'\cos A}}{\sin A},$$

ou

$$\overline{PQ}^2\sin^2 A=y^2+z^2+2yz\cos A,$$

les projections x, y, z étant comptées à la règle des signes. En faisant la somme des trois égalités analogues, on obtient la formule (1).

Appliquons celle-ci à la distance HO de l'orthocentre au centre du cercle circonscrit; nous aurons

$$x=R\sin(B-C),\quad y=R\sin(C-A),\quad z=R\sin(A-B),$$

car x, par exemple, est égal à la projection du rayon AO sur BC et l'angle de AO avec AH est égal à $B-C$. D'après un théorème connu: $\overline{HO}^2=R^2(1-8\sin A\sin B\sin C)$, etc.

Question 721.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 128.)

Eliminer x et y entre les équations

$$a\cos x + b\cos y = 1, \quad a\sin x + b\sin y = 1, \tag{1}$$

$$\sin 2x - \sin 2y = c^2(a^2 - b^2) \tag{2}$$

(TUCKER.)

Solution par MM. DELAHAYE, BROCARD, DÉPREZ, EMMERICH, DECAMPS.

Les deux premières équations peuvent se mettre sous les formes

$$\begin{cases} a\sin x = 1 - b\sin y, \\ a\cos x = 1 - b\cos y; \end{cases} \quad \begin{cases} b\sin y = 1 - a\sin x, \\ b\cos y = 1 - a\cos x. \end{cases}$$

Elevant au carré et additionnant on obtient

$$\sin y + \cos y = \frac{2 + b^2 - a^2}{2b}, \quad \sin x + \cos x = \frac{2 + a^2 - b^2}{2a}.$$

Elevant ces nouvelles équations au carré on trouve

$$1 + \sin 2y = \frac{(2 + b^2 - a^2)^2}{4b^2}, \quad 1 + \sin 2x = \frac{(2 + a^2 - b^2)^2}{4a^2},$$

et en soustrayant et tenant compte de la troisième équation proposée :

$$4a^2b^2c^2(a^2 - b^2) = b^2(2 + a^2 - b^2)^2 - a^2(2 + b^2 - a^2)^2.$$

On peut diviser par $a^2 - b^2$, ce qui donne

$$4a^2b^2c^2 = 4(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)^2 - 4 = [2 - (a - b)^2][(a + b)^2 - 2].$$

Solution par M. DENYS et DE STREKALOF. Faisant la somme des carrés des premières équations on trouve

$$a^2 + b^2 + 2ab\cos(x - y) = 2. \tag{3}$$

Faisant la somme des mêmes équations multipliées d'abord par $\cos y$ et $\sin y$, et ensuite par $\cos x$ et $\sin x$, on obtient

$$a\cos(x - y) + b = \cos y + \sin y, \quad b\cos(x - y) + a = \cos x + \sin x.$$

Retranchons l'une de l'autre les deux dernières équations après les avoir élevées au carré; il vient

$$(a^2 - b^2)\sin^2(x - y) = \sin 2x - \sin 2y. \tag{4}$$

De celle-ci combinée avec l'équation (2), on déduit

$$\sin(x - y) = \pm c. \tag{5}$$

Enfin, de (3) et (5) on conclut

$$c^2 + \frac{(2 - a^2 - b^2)^2}{4a^2b^2} = 1.$$

Solution par Mlle C. DE HAAS (de Rotterdam). En mettant les équations (1) sous la forme

$$\begin{cases} b\cos y = 1 - a\cos x \\ 1 - a\sin x = b\sin y \end{cases}, \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a\cos x = 1 - b\cos y \\ 1 - b\sin y = a\sin x \end{cases}$$

et en faisant le produit, on trouve

$$\cos y - a\cos y\sin x = \sin y - a\cos x\sin y,$$
$$\cos x - b\cos x\sin y = \sin x - b\cos y\sin x.$$

Ces égalités peuvent être écrites ainsi :

$$\cos y - \sin y = a\sin(x-y), \quad \cos x - \sin x = b\sin(y-x);$$

on en tire en faisant la différence des carrés :

$$\sin 2x - \sin 2y = (a^2 - b^2)\sin^2(x-y).$$

et en combinant ce résultat avec l'équation (2) :

$$(6) \qquad \sin^2(x-y) = c^2.$$

Additionnons aussi les équations (1) après les avoir élevées au carré; il vient

$$(7) \qquad a^2 + b^2 + 2ab\cos(x-y) = 2.$$

De (6) et (7) on conclut la relation demandée

$$4a^2b^2c^2 = [2 - (a-b)^2][(a-b)^2 - 2]$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

899. Résoudre un triangle ABC, connaissant le côté BC, l'angle A et le produit k^2 des hauteurs BB', CC' des angles ABC, ACB.

On a

$$BB' = \frac{a\sin C}{\sin\frac{1}{2}(B-C)}, \quad CC' = \frac{a\sin B}{\sin\frac{1}{2}(B-C)}.$$

d'où

$$k^2 = \frac{a^2\sin B\sin C}{\sin^2\frac{1}{2}(B-C)\sin\frac{1}{2}(B+C)} = a^2\frac{\cos(B-C)-\cos A}{\cos\frac{1}{2}(B-C)+\sin\frac{3A}{2}}$$
$$= 2a^2\frac{\cos^2\frac{1}{2}(B-C)-\sin^2\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}(B-C)-\sin\frac{3A}{2}}.$$

499. Démontrer que l'équation

$$(x^2+y^2+z^2)^2=3(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$$

admet une seule solution réelle $x=\pm y=\pm z$.

L'équation se ramène à

$$(x^2-y^2)^2+(y^2-z^2)^2+(z^2-x^2)^2=0.$$

500. Soient A_1, B_1, C_1 trois points pris respectivement sur chacun des côtés du triangle ABC et tels que les perpendiculaires élevées en ces points sur les côtés concourent en un même point. Posons

$$BA_1=k.BC,\quad CB_1=k.CA,\quad AC_1=l.AB;$$

nous aurons

$$(2k-1)a^2+(2k-1)b^2+(2l-1)c^2=0. \qquad \text{(Besso.)}$$

501. Si le sommet A d'un triangle ABC décrit une circonférence Δ et que la base BC soit fixe, l'aire ABC varie proportionnellement à la puissance de A par rapport à un cercle fixe Δ'. Dans quel cas, ce cercle Δ' peut-il être remplacé par un point fixe? (Sollertinsky.)

Prenons BC pour axe des abscisses, et représentons le cercle Δ par

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0.$$

Cette équation peut prendre la forme

$$(x-a)^2+(y-b')^2-R'^2=2b''y,\quad \text{où}\quad b'+b''=b,\quad b'^2-R'^2=b^2-R^2;$$

il y a donc une infinité de cercles Δ', etc.

502. Une sécante tourne autour d'un point fixe A; elle rencontre les axes OX, OY aux points B, C. On joint B à un point fixe D pris sur OY, et par C on tire une parallèle à OX; les deux droites ainsi obtenues se coupent en un point M. Trouver le lieu géométrique de M.

Équation du lieu

$$ay^2+dxy-bdx-ady=0.$$

Trouver les asymptotes.

503. Trouver le maximum de l'aire du triangle formé par les axes d'une ellipse avec une normale.

QUESTIONS PROPOSÉES.

733. Soit P une parabole donnée de foyer F. D'un point M, arbitrairement choisi dans son plan, on mène à cette courbe les normales MA, MB, MC. Les tangentes aux points A, B, C forment un triangle

A'B'C'. Démontrer que la circonférence A'B'C' est vue du point M sous un angle constant α, tel que

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}.$$ (DE LONGCHAMPS.)

734. On donne une conique K, une droite d et un point O sur cette droite. Soient A, B deux points variables pris sur d et tels, que le produit OA . OB ait une valeur constante. Trouver le lieu des sommets du quadrilatère que forment les tangentes menées par A et B à la conique K.

735. Une parabole variable U touche une parabole fixe V en un point M et l'axe de V au pied de l'ordonnée de M. Le lieu du foyer de U est une cissoïde; la tangente au sommet enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements; le lieu du pied de la directrice est une quintique; le centre du cercle osculateur de U en M décrit une parabole semicubique. (DÉPREZ.)

736. Intégrer l'équation

$$y'=\frac{xy-y^2}{1-x^2}.$$ (E. CATALAN.)

×**737.** Soit B'C' la transversale du triangle ABC, antiparallèle du BC dans l'angle BAC et passant par le pied K_a de la symédiane AK. 1° La polaire de A par rapport au cercle décrit sur BC comme diamètre, passe par les orthocentres H, H' des triangles ABC, AB'C' et est perpendiculaire à la médiane AG de ABC. 2° La corde commune NN' des cercles décrits sur BC, B'C' comme diamètres passe par K_a et les droites AN, AN' sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle BAC. 3° On a

$$\frac{1}{\overline{AB}^2}+\frac{1}{\overline{AC}^2}=\frac{2}{\overline{AB'}^2+\overline{AC'}^2}.$$ (SOLLERTINSKY.)

×**738.** Soient a, b, c les trois côtés d'un triangle et x, y, z trois nombres, tels que leur somme $x+y+z$ soit positive. Démontrer que le produit xyz est négatif, si

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}=0.$$ (W. J. GREENSTREET, M. A.)

Rectifications. Page 167, ligne 3 en remontant, lire $-\gamma^2$ au lieu de $-R^2$; dernière ligne, $\pm\gamma^2\sin\varphi$ au lieu de $\pm R^2\sin\varphi$; page 168, ligne 6, *perpendiculaire* à CM, au lieu de *parallèle* à CM.

NÉCROLOGIE.

ÉDOUARD LUCAS.

Au moment de mettre sous presse le présent numéro, nous sommes surpris par une nouvelle douloureuse autant qu'inattendue. L'un des collaborateurs de *Mathesis* les plus zélés et les plus distingués, Édouard Lucas, vient de succomber à l'âge de 49 ans à une courte maladie.

Né à Amiens en 1842, Édouard Lucas avait été admis à la fois, en 1861, à l'École Polytechnique et à l'École Normale. Il opta pour cette dernière, fut quelque temps astronome-adjoint à l'Observatoire de Paris et servit brillamment en 1870, pendant la guerre franco-allemande, comme officier auxiliaire d'artillerie. Depuis lors, sa vie entière a été consacrée à l'enseignement et à la science. Il était en dernier lieu professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée St-Louis, à Paris.

Ses publications scientifiques sont innombrables et se trouvent répandues dans les principaux recueils mathématiques de l'Europe et des États-Unis. Les lecteurs de *Mathesis* ont pu maintes fois admirer la portée et la profondeur de cet esprit éminent, chez lequel la faculté d'invention était alliée à une grande érudition.

Les travaux d'Édouard Lucas ont porté sur presque toutes les branches des Mathématiques; mais ils ont eu pour principal objet l'Arithmétique supérieure. La mort le frappe au moment où il laisse une œuvre inachevée : il venait de publier un premier volume de sa *Théorie des nombres;* espérons que les notes laissées par lui permettront de reconstituer la suite de ce bel ouvrage.

La mort d'Édouard Lucas, on peut le dire sans aucune exagération, est une grande perte pour la science mathématique. Mais à côté du savant, il y avait en lui l'ami dévoué, le père de famille admirable.

Puissent les regrets que nous exprimons ici en notre nom et au nom de tous nos lecteurs, adoucir la douleur de ses nombreux amis et la désolation de ses enfants.

P. Mansion et J. Neuberg.

THÉORÈME DE CHOQUET.

M. Matrot, ingénieur en chef des mines (*), a appelé l'attention, il y a une quinzaine d'années, sur une curieuse remarque de Choquet (**), et en a montré la portée pratique pour la résolution numérique des équations. Cette remarque est tombée dans l'oubli ; on ne la trouve dans aucun des manuels d'algèbre publiés récemment (de Longchamps, Niewenglowski, Amigues, de Comberousse), non plus que dans le traité si répandu de M. Bertrand. C'est pourquoi nous croyons utile de la signaler aux lecteurs de *Mathesis*.

Soit

$$u = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \text{etc.},$$

une fonction entière, prenant pour $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n$, dont les différences successives sont $\Delta u_0, \Delta u_1, \ldots, \Delta u_{n-1}, \Delta^2 u_0, \Delta^2 u_1, \ldots, \Delta^2 u_{n-2}, \ldots, \Delta^n u_0$. Dans le cas où les quantités $x_0, x_1, \ldots, x_n$ diffèrent l'une de l'autre d'une même quantité h, de sorte que

$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad \ldots, \quad x_n = x_0 + nh,$$

on a, comme on sait (***),

$$u = u_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta u_0 + \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2}$$
$$+ \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 2\right)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} + \cdots$$
$$+ \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\cdots\left(\frac{x - x_0}{h} - n\right)\frac{\Delta^n u_0}{1.2\ldots n}.$$

(*) *Note sur la résolution numérique des équations algébriques de degré quelconque par la méthode des différences.* Lille, Danel, 1875 (18 p. in-8°. Extrait des Mémoires de la Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de Lille).

(**) *Traité d'Algèbre*, par Choquet. Paris, Mallet-Bachelier, 1856, pp. 377-378, et note des pages 385-386.

(***) C'est l'une des *deux* formules de Newton pour exprimer u au moyen des valeurs de $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$. La seconde se rapporte au cas où les valeurs de $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ne sont pas équidistantes (Voir, par exemple, notre *Résumé d'Analyse*, n° 243, pp. 120-122 et p. 285). Presque tous les auteurs français disent, à tort, que Newton n'a pas traité ce second cas.

Si l'on fait, pour abréger, $x - x_0 = hz$, cette formule devient

$$u = u_0 + z\Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \cdots + \frac{z(z-1)\ldots(z-n+1)}{1.2\ldots n}\Delta^n u_0.$$

Supposons que la valeur de z soit comprise entre 0 et 1, ce qui a lieu quand on donne à x des valeurs comprises entre x_0 et $x_0 + h$. Dans ce cas, les coefficients de Δu_0, $\Delta^2 u_0$, ... sont alternativement positifs et négatifs. Nous pouvons donc écrire, en mettant les signes en évidence,

$$u = u_0 + z\Delta u_0 - \frac{z(1-z)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{z(1-z)(2-z)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 - \frac{z(1-z)(2-z)(3-z)}{1.2.3.4}\Delta^4 u_0 + \cdots \pm \frac{z(1-z)\ldots(n-1-z)}{1.2\ldots n}\Delta^n u_0.$$

Or $\frac{1}{2}z(1-z)$ est au plus égal à $\frac{1}{8}$ quand z varie de 0 à 1; le coefficient de $\Delta^3 u_0$, quand z varie de 0 à 1, a pour maximum $\sqrt{1:243}$, comme on peut le prouver d'une manière élémentaire; donc il est inférieur à $\frac{1}{15}$. On a ensuite

$$\frac{z(1-z)(2-z)(3-z)}{1.2.3.4} < \frac{z(1-z)(2-z)}{1.2.3}\cdot\frac{3}{4} < \frac{1}{15}\cdot\frac{3}{4} \text{ ou } \frac{1}{20},$$

$$\frac{z(1-z)(2-z)(3-z)(4-z)}{1.2.3.4.5} < \frac{1}{20}\cdot\frac{4}{5} \text{ ou } \frac{1}{25},$$

. . . . . .

$$\frac{z(1-z)\ldots(n-1-z)}{1.2\ldots n} < \frac{1}{5n}.$$

Par conséquent, on peut écrire

$$u = u_0 + \lambda_1\Delta u_0 - \frac{\lambda_2}{8}\Delta_2 u_0 + \frac{\lambda_3}{15}\Delta_3 u_0 - \frac{\lambda_4}{20}\Delta_4 u_0 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{\lambda_n}{5n}\Delta_n u_0,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ désignant des fractions(*).

Il résulte de là que, chaque fois que u_0 surpasse, en valeur absolue, l'ensemble des termes de signe contraire à celui de u_0, termes où l'on

(*) Cette formule s'applique même aux fonctions transcendantes, si l'on remplace $\Delta^n u_0$ par $\pm h^n M_n$, M_n étant une quantité supérieure ou égale à la plus grande valeur de $D_x^n u$, dans l'intervalle $(x_0, x_0 + nh)$. Pour la démonstration de cette remarque due à Cauchy, voir, par exemple, notre *Résumé d'Analyse*, n° 244, pp. 124-125.

remplace les λ par 1, la fonction u ne change pas de signe quand x varie de x_0 à $x_0 + h$.

Pour montrer l'utilité de la remarque précédente, nous empruntons à la brochure de M. Matrot, une application relative à l'équation

$$8x^3 - 12x^2 + 3x - 1 = 0,$$

étudiée par Briot. « Si l'on substitue les nombres entiers consécutifs, on reconnaît facilement, comme le fait remarquer Briot, qu'il n'y a de doute que pour l'intervalle de 0 à 1. En substituant par dixièmes dans cet intervalle, on forme le tableau suivant :

x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
0,0	— 1,000	+ 0,188	— 0,192	+ 0,048
0,1	— 0,812	— 0,004	— 0,144	+ 0,048
0,2	— 0,816	— 0,148	— 0,096	+ 0,048
0,3	— 0,964	— 0,244	— 0,048	+ 0,048
0,4	— 1,208	— 0,292	— 0,000	+ 0,048
0,5	— 1,500	— 0,292	+ 0,048	+ 0,048
0,6	— 1,792	— 0,244	+ 0,096	+ 0,048
0,7	— 2,036	— 0,148	+ 0,144	+ 0,048
0,8	— 2,184	— 0,004	+ 0,192	+ 0,048
0,9	— 2,188	+ 0,188	+ 0,240	+ 0,048
1,0	— 2,000			

Si l'on applique la formule de Choquet aux subdivisions précédentes, « on voit immédiatement que u ne peut s'annuler dans aucune d'elles, puisque u_0 est, pour toutes, supérieur en valeur absolue, à la somme des trois différences. L'équation proposée n'a, par conséquent, aucune racine dans l'intervalle de 0 à 1. » D'ailleurs, en faisant $h = \frac{1}{2}$, on trouve

$$u = -1 - \tfrac{1}{2}\lambda_1 + \tfrac{2}{5}\lambda_3, \quad \text{de } x = 0 \text{ à } x = \tfrac{1}{2},$$

et

$$u = -1\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\lambda_1 + \tfrac{3}{4}\lambda_2 + \tfrac{2}{5}\lambda_3, \quad \text{de } x = \tfrac{1}{2} \text{ à } x = 1,$$

ce qui conduit à la même conclusion plus rapidement encore.

Comme on le voit, grâce au théorème de Choquet et Matrot, la méthode de recherche des racines des équations, fondée sur le principe de substitution (*), est plus pratique qu'elle ne le paraît au premier

(*) Appelée en France, *Méthode des Différences*, depuis 1852. Le principe de substitution est la base de la méthode de résolution des équations transcendantes.

abord. Quand on l'applique, on ne doit pas oublier qu'il est inutile de supposer h plus petit que la limite inférieure assignée par Cauchy à la différence de deux racines réelles de l'équation(*). (P. M.)

×THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE(**);

par M. SOLLERTINSKY (Gatchina, Russie).

1. Étant donné un triangle ABC, on peut construire quatre cercles ω_a, ω_{aa}, ω_{ab}, ω_{ac} tangents aux côtés AB, AC ou à leurs prolongements et au cercle circonscrit.

Les rayons de ces cercles sont respectivement

$$r\,\text{séc}^2\frac{A}{2},\quad r_a\,\text{séc}^2\frac{A}{2},\quad r_b\,\text{coséc}^2\frac{B}{2},\quad r_c\,\text{coséc}^2\frac{C}{2}.$$

Les polaires de A par rapport à ces cercles passent respectivement par les centres I, I_a, I_b, I_c, des cercles touchant les trois côtés de ABC.

Soient V_a, V_{aa}, V_{ab}, V_{ac} les points où les cercles ω_a, ω_{aa} ··· touchent le cercle ABC, et soient D, D' les points où les bissectrices AI, AI_b coupent le cercle ABC. Les droites D'I, D'I_a, DI_b, DI_c passent respectivement par V_a, V_{aa}, V_{ab}, V_{ac}. Les droites AV_a, BV_b, CV_c concourent au point inverse du point de Nagel du triangle ABC; les droites AV_{aa}, BV_{bb}, CV_{cc}, au point inverse du point de Gergonne; les droites AV_a, BV_{bc}, CV_{cb}, au point inverse d'un adjoint du point de Nagel; les droites AV_{aa}, BV_{ba}, CV_{ca}, au point inverse d'un adjoint du point de Gergonne.

Les droites V_aV_{aa}, $V_{ab}V_{ac}$ se coupent sur BC, au centre d'un cercle d'Apollonius du triangle ABC.

2. Soient α, β, γ; α', β', γ' les pieds des bissectrices intérieures et extérieures des angles du triangle ABC.

(*) M. Matrot a déduit de cette remarque le théorème suivant : Si l'on suppose exprimées en nombre décimaux toutes les racines réelles d'une équation algébrique de degré m, privée de racines égales et ayant l'unité pour coefficient de son premier terme et tous ses autres coefficients entiers, le nombre de chiffres communs, à partir de la gauche, à p racines est toujours inférieur à $[Nm(m-1):p(p-1)]$, N étant le nombre de chiffres, soit du double du plus grand coefficient de l'équation, soit du double d'une limite supérieure quelconque des modules des racines.

(**) Pour ces Théorèmes, on peut comparer *Mathesis*, t. X, p. 67 (DE LONGCHAMPS) et t. VII, p. 84. (VIGARIÉ.)

Les pôles des côtés du triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ par rapport au cercle ABC sont les inverses des adjoints des points de Gergonne. Le triangle $\alpha\beta\gamma$ est homologique avec le triangle formé par les tangentes en A, B, C au cercle ABC; le centre d'homologie est l'inverse du point de Gergonne du triangle ABC; l'axe d'homologie est la polaire, par rapport au cercle ABC, de l'inverse triangulaire du point de Nagel du triangle ABC.

Les triangles $\alpha\beta'\gamma'$, $\alpha'\beta\gamma'$, $\alpha'\beta'\gamma$ jouissent de propriétés analogues.

3. Les inverses des points de Gergonne du triangle ABC, pris trois à trois, sont les sommets de quatre triangles homologiques avec le triangle des tangentes en A, B, C au cercle ABC. Le centre d'homologie est le quatrième de ces points inverses; l'axe d'homologie est la polaire du centre du cercle tritangent correspondant.

4. Les milieux des bissectrices d'un triangle sont trois à trois sur quatre droites harmoniquement associées aux points du groupe de Gergonne; ces droites sont aussi les polaires des points de Gergonne correspondants par rapport aux cercles tritangents correspondants.

5. Soient m_1, m_2, m_3 les symétriques d'une même droite m par rapport aux trois côtés d'un triangle ABC. On sait (*Mathesis*, t. VI, p. 142) que le triangle $m_1m_2m_3$ est inversement semblable au triangle orthique de ABC; qu'il est perspectif avec le triangle ABC par rapport à un point r de la circonférence ABC, homologue de l'orthocentre de ABC considéré dans le triangle orthique.

Si m est antiparallèle à un côté de ABC, les droites m, m_1, m_2, m_3 forment un quadrilatère inscriptible.

Si m est la droite de Simson d'un point r de la circonférence ABC, le quadrilatère $mm_1m_2m_3$ est circonscriptible à une circonférence de centre r (*).

BIBLIOGRAPHIE.

Géométrie élémentaire. Théorèmes et problèmes comprenant les principales questions portées aux examens de l'école militaire et de l'école normale, par L. Thélin, professeur de mathématiques à l'école normale de Verviers, ancien inspecteur des études à l'école militaire. Quatre volumes in-12, cartonnés, de XIX-273, 244, 96, 111 pages,

---

*) Faisons tourner la droite m autour d'un point fixe : les sommets du triangle $m_1m_2m_3$ décrivent trois circonférences. (J. N.)

avec 280, 275, 96, 104 figures. — Namur, Ad. Wesmael-Charlier, 1882-1891. Prix : 3-50 + 4 + 2 + 2 francs.

Chacun des quatre volumes de M. Thélie comprend des applications relatives à deux des livres de la géométrie élémentaire, et ce travail est destiné spécialement aux étudiants qui se préparent aux écoles spéciales.

Tout en trouvant fort heureuse l'idée de réunir les propositions si nombreuses et si importantes qui ne figurent pas parmi les théorèmes classiques de Legendre, nous n'approuvons guère le plan général de l'ouvrage qui n'est en somme qu'un catalogue plus ou moins bien classé de questions pouvant être posées dans les examens. Se proposer un but pareil, c'est envisager la géométrie à un point de vue étroit et s'exposer à commettre des fautes graves. Le plus grand défaut de l'ouvrage est, suivant nous, l'absence de cohésion entre les propositions successives. L'emploi de rubriques générales portant sur plusieurs théorèmes ne remédie pas à cet inconvénient.

Non seulement les diverses applications ne sont rattachées par aucun lien, mais le plus souvent, elles ne sont même pas rangées dans l'ordre logique : ainsi, dans le livre I, les propriétés des milieux des côtés et des diagonales d'un quadrilatère se trouvent dispersées aux n^{os} 35, 40, 69. Bien plus, certaines vérités se trouvent répétées à plusieurs endroits et démontrées par des méthodes un peu différentes dans la forme, mais identiques au fond Par exemple, dans le livre I, les n^{os} 90, 91 traitent du même objet, comme aussi les n^{os} 92, 110, 112 de ce livre et les n^{os} 9, 11, 13 du livre VIII. Par suite, le nombre des questions résolues se trouve singulièrement réduit. Hâtons-nous d'ajouter que, malgré ces réductions, il reste énormément de choses dans le livre de M. Thélie, et c'est là sa principale, peut être sa seule qualité.

Quant à la rédaction, l'auteur a cherché à la rendre concise autant que possible, mais il n'y a réussi parfois qu'aux dépens de la clarté et de la correction. Citons, par exemple, cet énoncé (Livre I, n° 57) : « En divisant arbitrairement, mais dans le « même sens, les côtés d'un carré et joignant les points de division, on forme un « carré inscrit »

Malgré la concision habituelle de l'auteur, ses raisonnements présentent parfois des longueurs inexplicables. En lisant, par exemple, le commencement du livre VIII, on remarque immédiatement que les démonstrations des n^{os} 5, 14, 16, 18, 19, 20 peuvent être notablement simplifiées, la plupart en appliquant le théorème de Guldin qui se trouve exposé tout au début du livre. Il est vrai que l'auteur en donne une démonstration qui manque absolument de rigueur; peut-être a-t-il reconnu lui-même l'insuffisance de son raisonnement et a-t-il éprouvé quelque scrupule à se servir d'une vérité si peu établie.

Pour donner un exemple des simplifications qu'on pourrait apporter à certains théorèmes, citons encore le n° 75 du livre VIII; il s'agit de chercher le minimum de la fonction $x^2 + xy + y^2$, xy étant constant; l'auteur a recours à une équation bicarrée, alors qu'il est si simple d'observer que $x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy$.

En revanche, bien des démonstrations sont incomplètes; dans beaucoup de théorèmes et de problèmes, la discussion est insuffisante ou nulle; certains cas possi-

bles sont oubliés, la réciproque n'est pas établie, des généralisations ou des remarques importantes font défaut, etc.

Les exemples que nous avons donnés ci-dessus sont pris au hasard parmi beaucoup d'autres; la place nous manque pour énumérer toutes les fautes; nous ne pouvons cependant nous dispenser de signaler encore une grossière erreur de calcul (Livre VIII, n° 21) et un raisonnement faux (Livre I, n° 21).

Concluons en disant qu'il y a dans cet ouvrage la matière d'un bon livre; mais pour en tirer ce bon livre, il faudrait le refaire sur un plan nouveau et surtout le revoir avec soin d'un bout à l'autre au double point de vue de la forme et du fond(*).

M. STUYVAERT.

Traité d'Analyse, par É. PICARD, Membre de l'institut, Professeur à la Faculté des Sciences. Tome I : Intégrales simples et multiples. — Applications géométriques du calcul infinitésimal, 1891. Paris, Gauthier-Villars et Fils (XII-457 p., in-8)(**). Prix : 15 fr.

Dans ce *Traité d'Analyse*, le savant professeur de la Faculté des sciences de Paris a pour but principal de développer la théorie des équations différentielles. Comme cette partie du calcul intégral est intimement liée à plus d'une autre théorie, l'auteur a cru utile de donner, dans un premier volume, tous les préliminaires indispensables à ceux qui ne connaissent que les élements du calcul différentiel, pour aborder la théorie des équations différentielles.

Dans ce volume, il expose d'abord les éléments du calcul intégral, en insistant sur les notions d'intégrale curviligne et d'intégrale de surface, qui jouent un rôle si important en physique mathématique. La seconde partie traite de quelques applications de ces notions générales; au lieu de prendre des exemples sans intérêt, il développe la théorie de l'équation de Laplace et les propriétés fondamentales du potentiel. On y trouvera ensuite l'étude de quelques développements en séries, particulièrement des séries trigonométriques. La troisième partie est consacrée aux applications géométriques du calcul infinitésimal. Voici au reste le sommaire détaillé des matières du tome premier :

Ire PARTIE. — **Intégrales simples et multiples.** — CHAP. I. *Des intégrales définies.* Définition de l'intégrale définie, ses propriétés fondamentales. Fonction ayant pour dérivée une fonction donnée. Applications géométriques. Intégration par parties. Formule de Taylor. Changement de variable. Extension de la notion d'intégrale définie. Cas où la fonction et où les limites deviennent infinies. Différentiation sous le signe d'intégration. Intégrale d'une fonction complexe d'une variable

---

(*) Nous devons spécialement mettre nos jeunes lecteurs en garde contre l'*Histoire de la Géométrie*, inexacte et incomplète, mise en tête du premier volume. (P. M.)

(**) Les autres volumes contiendront Tome II : Fonctions analytiques. — Principes généraux de la théorie des équations différentielles; Tome III : Équations différentielles ordinaires; Tome IV : Équations aux dérivées partielles.

réelle. — CHAP. II. *Intégrales indéfinies.* Intégrales des fractions rationnelles. Intégrales hyperelliptiques. Intégrales de différentielles algébriques. Intégrales des fonctions rationnelles de $\sin x$ et $\cos x$. — CHAP. III. *Intégrales curvilignes.* Définition des intégrales curvilignes. Condition pour que l'intégrale curviligne $\int(P dx + Q dy)$ ne dépende que des limites. De l'intégrale curviligne considérée comme fonction de sa limite supérieure. Exemples d'intégrales effectuées le long d'un contour fermé. Racines communes à deux équations. — CHAP. IV. *Des intégrales doubles.* Définition des intégrales doubles. Changement de variables dans les intégrales doubles. Applications. Volumes et surfaces. Définition des intégrales de surfaces. Condition pour que l'intégrale de surface $\int(A dy dz + B dz dx + C dx dy)$ ne dépende que du contour Formule de Stokes. Racines communes à deux équations. — CHAP. V. *Des intégrales multiples.* Définition et propriétés fondamentales des intégrales multiples. Cas où la fonction devient infinie ou indéterminée. Quelques formules relatives aux intégrales triples. II^e^ PARTIE. — **L'équation de Laplace et ses applications. Développements en séries.** — CHAP VI. *De l'équation de Laplace.* Formule fondamentale. Énoncé du principe de Dirichlet. Problème de Dirichlet dans le cas d'une sphère. Sur une généralisation de l'intégrale de Gauss. Principe de Dirichlet pour une surface convexe. — CHAP. VII. *Attraction et potentiel.* Définitions et premières propriétés du potentiel. Formule de Poisson. Propriétés caractéristiques du potentiel. Attraction d'un ellipsoïde. Attraction d'une couche superficielle Théorème de M. Bertrand. Méthode de M. Robin pour la recherche d'une couche sans action sur un point intérieur. — CHAP. VIII. *Intégrations des séries. Séries entières.* Des séries uniformément convergentes. Des séries ordonnées suivant les puissances entières et croissantes de la variable. — CHAP. IX. *Des séries trigonométriques.* Généralités. Intégrale de Dirichlet. Série de Fourier. Ordre des coefficients. Sa convergence conforme. Sur les séries trigonométriques les plus générales. Théorème de M. Cantor. L'intégrale de Poisson Représentation approchée des fonctions. — CHAP. X. *Séries multiples.* Généralités sur les séries multiples. Théorème de Cauchy. Quelques applications. Exemples de séries multiples où les entiers ne sont pas arbitraires — III^e^ PARTIE.— **Applications géométriques du calcul infinitésimal.** — CHAP. XI. *Théorie des enveloppes. Surfaces réglées. Congruences et complexes.* Théorie des enveloppes. Surfaces développables. Surfaces réglées. Congruences de droites. Généralités sur les complexes. Complexes linéaires. — CHAP. XII. *Théorie du contact. Courbure.* Contact des courbes planes. Courbure des courbes planes. Développées et développantes. Contact des courbes gauches. Contact des courbes et des surfaces. Remarques sur les courbes gauches algébriques; formules de Cayley. Courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire. — CHAP. XIII. *Courbure et torsion des courbes gauches. Formules fondamentales.* Courbure et torsion des courbes gauches. Centre de courbure. Formules de Frenet. Quelques applications. Développées des courbes gauches. Hélices. Courbes sphériques. — CHAP. XIV. *Des courbes tracées sur une surface.* De la courbure des courbes tracées sur une surface. Théorèmes d'Euler et de Meunier. Lignes de courbure. Propriétés et équations générales. Théorème de Joachimsthal. Théorème de Dupin. Surface enveloppe de sphères. Cyclide de Dupin. Généralités sur les lignes

asymptotiques. Quelques exemples. Lignes asymptotiques de certaines surfaces réglées. — CHAP. XV. *Surfaces applicables. Représentation conforme. Cartes géographiques.* Expression du carré de l'élément d'arc sur une surface. Représentation conforme d'un plan sur un plan. Quelques exemples de représentation conforme. Sur les substitutions linéaires. Carte d'une surface.

SUR LES MOMENTS D'INERTIE(*);

par M. J. NEUBERG.

1. On sait que le *moment d'inertie* I, par rapport à un plan (P), d'un système de points matériels A_1, A_2, ..., dont les masses sont M_1, M_2, ... est la somme des produits de chaque masse par le carré de sa distance à ce plan. Si l'on pose $I = \rho^2 \Sigma M$(**), ρ est le *rayon d'inertie* du système (A) par rapport à (P). Avec M. Darboux, nous dirons aussi que I est le paramètre de (P) par rapport au système (A).

Soient (X_1, Y_1, Z_1), ... les coordonnées rectangulaires de A_1, ..., et soit

$$ux + vy + wz + p = 0$$

l'équation de (P). Alors

$$I(u^2 + v^2 + w^2) = \Sigma M(uX + vY + wZ + p)^2. \qquad (1)$$

L'enveloppe des plans de paramètre nul est la quadrique représentée en coordonnées tangentielles (u, v, w, p) par l'équation

$$\Sigma M(uX + vY + wZ + p)^2 = 0. \qquad (2)$$

Cette surface auxiliaire, considérée par M. Reye et par O. Hesse, peut

---

(*) Cet article tient lieu de solution de la question proposée 310 (*Mathesis*, t. IV, p. 48), laquelle demande une rectification. Nous en avons emprunté les développements, en grande partie, aux auteurs suivants :

REYE. *Beiträge zu der Lehre von den Trägheitsmomenten* (J. de Schlömilch, t. IX, pp. 433-455); *Trägheits- und höhere Momente eines Massensystems in Bezug auf Ebenen* (J. de Crelle, t. LXXII, pp. 293-326).

O. HESSE. *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes.* Leçon XXV.

DARBOUX. *Sur les rapports de la Théorie des moments d'inertie avec celle des surfaces homofocales* (Note XXII de la *Mécanique* de Despeyrous).

(**) Pour simplifier l'écriture, nous écrivons ΣM, ΣMX, ... au lieu de

$$M_1 + M_2 + \ldots, \quad M_1X_1 + M_2X_2 + \ldots, \quad \ldots$$

Lorsqu'il s'agit d'un système *continu* de points matériels, ces sommes sont remplacées par des intégrales définies.

être appelée *image d'inertie* du système (A) (*Imaginaires Bild*, d'après Hesse). Si toutes les masses sont positives et non situées dans un même plan, l'image d'inertie est un ellipsoïde imaginaire ; c'est l'hypothèse que nous adoptons d'abord. Il résulte des notions vues en géométrie analytique, qu'il existe un système d'axes rectangulaires, et généralement un seul, par rapport auquel l'équation (2) prend la forme réduite

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + Dp^2 = 0. \qquad (3)$$

En adoptant, dès le commencement, ces axes des coordonnées (appelés *axes principaux* d'inertie), nous pouvons identifier les équations (2) et (3), ce qui donne les égalités

$$\begin{array}{llll} \Sigma MX^2 = A, & \Sigma MZ^2 = B, & \Sigma MZ^2 = C, & \\ \Sigma MYZ = 0, & \Sigma MZX = 0, & \Sigma MXY = 0, & \\ \Sigma MX = 0. & \Sigma MY = 0, & \Sigma MZ = 0, & \Sigma M = D. \end{array}$$

On en conclut que le centre de symétrie de l'image d'inertie coïncide avec le centre de gravité G du système matériel ; que D est la masse totale du système et que A, B, C sont les paramètres des plans principaux d'inertie.

Soient a, b, c les rayons d'inertie du système par rapport aux plans principaux d'inertie, de sorte que

$$A = Da^2, \quad B = Db^2, \quad C = Dc^2 ;$$

l'équation de l'image d'inertie sera, en coordonnées tangentielles,

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 + p^2 = 0,$$

et en coordonnées ponctuelles,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

La formule (1) est maintenant remplacée par celle-ci :

$$I(u^2 + v^2 + w^2) = D(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 + p^2),$$

ou, à cause de $I = D\rho^2$, par l'égalité

$$(c^2 - \rho^2)u^2 + (b^2 - \rho^2)v^2 + (c^2 - \rho^2)w^2 + p^2 = 0,$$

laquelle exprime que le plan (P) touche la surface représentée en coordonnées ponctuelles par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2 - \rho^2} + \frac{y^2}{b^2 - \rho^2} + \frac{z^2}{c^2 - \rho^2} + 1 = 0.$$

Par conséquent : 1° *le carré du rayon d'inertie d'un système matériel par rapport à un plan donné est égal au carré du paramètre de la surface homofocale avec l'image d'inertie et tangente à ce plan ; 2° l'enveloppe des plans de même paramètre est une surface homofocale avec l'image d'inertie.*

2. L'image d'inertie étant rapportée à un tétraèdre conjugué $B_1B_2B_3B_4$ a une équation, en coordonnées tangentielles, de la forme

$$m_1\alpha^2 + m_2\beta^2 + m_3\gamma^2 + m_4\delta^2 = 0,$$

de sorte qu'on peut poser.

$$D(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 + p^2) \equiv \Sigma m(ux + vy + wz + p)^2, \qquad (4)$$

(x_n, y_n, z_n) désignant les coordonnées de B_n par rapport aux axes principaux d'inertie GX, GY, GZ.

De là le théorème suivant, dû à M. Reye :

Étant donné un système matériel quelconque, il existe une infinité de systèmes de quatre points B_1, B_2, B_3, B_4 *tels, que si on leur attribue des masses convenables* m_1, m_2, m_3, m_4, *leur moment d'inertie par rapport à un plan quelconque est égal à celui du système donné par rapport au même plan. Tous les tétraèdres* $B_1B_2B_3B_4$ *sont conjugués avec l'image d'inertie*(*).

Les deux systèmes matériels (A) et (B) sont *équivalents* relativement à leurs moments d'inertie par rapport à un plan quelconque. Ils ont même image d'inertie, même masse totale, même centre de gravité G. On tire de là les conséquences suivantes :

1° Le choix du point B_1 détermine sa masse m_1, le plan $B_2B_3B_4$ et le centre de gravité des masses m_2, m_3, m_4.

Car le plan $B_2B_3B_4$ est le plan polaire de B_1 ; si h est sa distance à B_1 et I_1 son paramètre, m_1 résulte de l'égalité évidente $I_1 = m_1h_1^2$; le point de rencontre de la droite CB_1 avec le plan $B_2B_3B_4$ est le centre de gravité des masses m_2, m_3, m_4.

(*) Bien que l'image d'inertie soit imaginaire, la construction des tétraèdres conjugués ne présente pas de difficulté. Le plan polaire du point (x_1, y_1, z_1) a pour équation

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} + 1 = 0;$$

il coïncide avec le plan polaire du point $(-x_1, -y_1, -z_1)$, pris relativement à l'ellipsoïde réel qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Si l'on exprime que le rapport des distances des points B_1 et G au plan polaire de B_1 est égal à $\frac{D}{m_1}$, on trouve

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}+1=\frac{D}{m_1}.$$

2° Le choix de la droite sur laquelle se trouvent les points B_1 B_2 détermine la droite B_3B_4 et les centres de gravité g, g' des couples m_1 et m_2, m_3 et m_4.

En effet, B_3B_4 est la droite polaire de B_1B_2 et G partage la droite gg' dans le rapport $m_3+m_4 : m_1+m_2$; donc g et g' se trouvent sur la droite qui passe par G et s'appuie sur B_1B_2, B_3B_4, et l'on connaît même les sommes m_1+m_2, m_3+m_4.

3. Prenons la masse totale du système (A) pour unité de masse et introduisons les coordonnées cartésiennes homogènes x, y, z, t ($t=1$). L'identité (4) devient

$$a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2+p^2\equiv \mathbb{S}m\,(ux+vy+wz+pt)^2$$

et conduit aux égalités :

$$\mathbb{S}mx^2=a^2,\quad \mathbb{S}my^2=b^2,\quad \mathbb{S}mz^2=c^2,\quad \mathbb{S}mt^2=1,$$
$$\mathbb{S}myz=0,\quad \mathbb{S}mzx=0,\quad \mathbb{S}mxy=0,\quad \mathbb{S}mxt=0,\quad \text{etc.}$$

Posons

$$\frac{x\sqrt{m}}{a}=\alpha,\quad \frac{y\sqrt{m}}{b}=\beta,\quad \frac{z\sqrt{m}}{c}=\gamma,\quad t\sqrt{m}=\delta;$$

il vient :

$$\begin{aligned}
&\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2=1,\\
&\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2+\beta_4^2=1,\\
&\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2+\gamma_4^2=1,\\
&\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2+\delta_4^2=1,\\
&\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3+\beta_4\gamma_4=0,\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Or, ce sont là les conditions exprimant que la substitution

$$\mu_r=\alpha_r\nu_1+\beta_r\nu_2+\gamma_r\nu_3+\delta_r\nu_4,\quad (r=1,\,2,\,3,\,4)$$

est orthogonale. On sait qu'elles entraînent les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
&\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2+\delta_1^2=1,\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2+\delta_1\delta_2=0,\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Donc en revenant aux notations primitives, on peut écrire

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}+1=\frac{1}{m_1},$$

. . . . . .

$$\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}+\frac{z_1z_2}{c^2}+1=0,$$

. . . . . .

Ces relations se prêtent à une nouvelle démonstration du théorème de M. Reye.

4. On peut se donner arbitrairement, sous la condition

$$m_1+m_2+m_3+m_4=1,$$

les masses à attribuer aux points du système matériel $B_1B_2B_3B_4$, équivalent à un système proposé (A). Les points B se trouvent, respectivement, sur quatre ellipsoïdes déterminés E_1, E_2, E_3, E_4, représentés par les équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=\frac{1}{m_n}, \quad (n=1, 2, 3, 4).$$

Prenons arbitrairement B_1 sur E_1, B_2 sur l'intersection de E_2 avec le plan polaire de B_1 par rapport à l'image d'inertie E; B_3 sera l'un des points d'intersection de E_3 avec la polaire de la droite B_1B_2, prise relativement à E; enfin B_4 est le pôle du plan $B_1B_2B_3$.

En particulier, soit $m_1=m_2=m_3=m_4=\frac{1}{4}$; le tétraèdre $B_1B_2B_3B_4$ est inscrit à l'ellipsoïde représenté par

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=3,$$

et peut avoir une infinité de positions(*).

5. Le moment d'inertie d'un système matériel (A) par rapport à un point N ou par rapport à une droite d est la somme des produits des masses du système par le carré de leur distance à ce point ou à cette droite. Inversement, cette somme est appelée le *paramètre* du point ou de la droite par rapport au système (A). Le paramètre d'une droite ou d'un point peut s'obtenir en faisant la somme des paramètres de deux

(*) La question 310 est ainsi rectifiée, et résolue complètement.

plans rectangulaires menés par la droite ou de trois plans rectangulaires passant par le point. Il résulte de là que deux systèmes matériels (A) et (B), qui ont même moment d'inertie par rapport à un plan quelconque, ont aussi même moment d'inertie par rapport à un point quelconque ou à un axe quelconque. On a déjà vu que de tels systèmes ont même centre de gravité G, même masse totale que nous supposons égale à l'unité, et même image d'inertie E.

Conservons les notations employées précédemment. Le paramètre de G étant égal à la somme de ceux des plans principaux de E, on a

$$a^2 + b^2 + c^2 = \Sigma m \cdot \overline{BG}^2.$$

Celui du point $N(\alpha, \beta, \gamma)$ a pour expression

$$\Sigma m \left\{ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 \right\} (*) = \Sigma m \cdot \overline{GR}^2 + \overline{NG}^2.$$

Donc

$$\Sigma m \cdot \overline{NB}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \overline{NG}^2.$$

Si tous les points B sont sur une même sphère, décrite du centre N avec le rayon R, l'égalité précédente prend la forme

$$-(a^2 + b^2 + c^2) = \overline{NG}^2 - R^2.$$

De là le théorème suivant : *Lorsque des points matériels se trouvent sur une même sphère, la somme des carrés des demi-axes de l'image d'inertie égale la puissance du centre de gravité par rapport à cette sphère.*

En particulier, *tous les systèmes équivalents, composés de quatre points matériels, jouissent de la propriété que les sphères passant par les points d'un système ont pour centre radical commun le centre de gravité.*

Si l'on introduit des masses négatives, l'image d'inertie peut être l'une quelconque des quadriques à centre, pourvu que la somme des masses soit différente de zéro; par conséquent, *la puissance du centre d'une quadrique par rapport à la sphère circonscrite à un tétraèdre conjugué quelconque est constante et égale à la somme des carrés des demi-axes* (**).

(*) On développe cette expression, en ayant égard aux égalités

$$\Sigma mx = \Sigma my = \Sigma mz = 0, \quad \Sigma m = 1.$$

(**) Théorème de Faure et Painvin Voir N. A. M., 1880 (2), t. XIX, p. 290.

Appliquons la règle de la multiplication des déterminants aux deux systèmes d'éléments

$$\left\| \begin{matrix} m_1x_1 & m_2x_2 & \cdots & m_nx_n \\ m_1y_1 & m_2y_2 & \cdots & m_ny_n \\ m_1z_1 & m_2z_2 & \cdots & m_nz_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_n \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{matrix} \right\|. \qquad (5)$$

En tenant compte des relations (3°), on trouve le déterminant

$$\begin{vmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2b^2c^2.$$

Mais le résultat est aussi la somme des produits d'un déterminant formé avec quatre colonnes quelconques du premier système par le déterminant homologue déduit du second système. Donc

$$a^2b^2c^2 = 36 \, \mathfrak{S} \, m_1m_2m_3m_4 \, (\text{vol. } B_1B_2B_3B_4)^2.$$

Soit $n = 4$, et désignons par V_1, V_2, V_3, V_4, V les volumes $GB_2B_3B_4$, $GB_3B_4B_1$, $GB_4B_1B_2$, $GB_1B_2B_3$, $B_1B_2B_3B_4$; par F_1, F_2, F_3, F_4 les aires $B_2B_3B_4$, · ·; par $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ les distances de G aux faces du tétraèdre $B_1B_2B_3B_4$. Comme $m_1 = \frac{V_1}{V}$, ···, nous aurons

$$a^2b^2c^2 = 36 \frac{V_1V_2V_3V_4}{V^2} (*).$$

En supprimant les premières lignes des systèmes (5) et en effectuant le produit des nouveaux systèmes, on trouve

$$a^2b^2 = \mathfrak{S} \, m_1m_2m_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2.$$

La somme de cette égalité et des deux égalités analogues donne

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 4 \, \mathfrak{S} \, m_1m_2m_3 \cdot (\text{aire } B_1B_2B_3)^2.$$

Dans l'hypothèse de $n = 4$, cette relation devient

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{4}{27} F_1F_2F_3F_4 \, \mathfrak{S} \, \delta_1\delta_2\delta_3F_4 = Kv,$$

(*) Théorème énoncé par Painvin, loc. cit.

K étant un facteur qui ne dépend que du tétraèdre $B_1B_2B_3B_4$, et v désignant le volume du tétraèdre qui a pour sommets les projections de G sur les faces. De là on déduit le théorème suivant : *Lorsque la somme* (algébrique) *des inverses des carrés des axes est nulle, les projections du centre d'une quadrique sur les faces d'un tétraèdre conjugué sont situées dans un même plan*(*).

Les formules suivantes se démontrent de la même manière :

$$a^2 + b^2 + c^2 = \mathfrak{S} m_1 m_2 \cdot \overline{B_1B_2}^2,$$
$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 4\mathfrak{S} m_1 m_2 \cdot (\text{aire } GB_1B_2)^2,$$
$$a^2b^2c^2 = 36\mathfrak{S} m_1 m_2 m_3 (\text{vol. } GB_1B_2B_3)^2.$$

Nous arrêtons ici ces développements, en renvoyant le lecteur qui voudrait approfondir ces questions, aux auteurs déjà cités, et à P. SERRET, *Géométrie de Direction*.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES (**).

Question 707.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 80.)

Deux cercles de rayons R, *r ont leurs centres* O, *o sur une droite donnée; ils sont tels qu'il y a une infinité de triangles inscrits dans le cercle* O *et ayant leurs côtés tangents au cercle o. Cela posé* : 1° *Trouver l'enveloppe du cercle de rayon* R *si le cercle de rayon r est fixe.* 2° *Trouver l'enveloppe du cercle de rayon r si le cercle de rayon* R *est fixe.* 3° *Trouver le lieu du point de Lemoine des triangles inscrits au cercle de rayon* R *et dont les côtés touchent le cercle de rayon r, lorsque les deux cercles sont fixes.*

(E. LEMOINE.)

Solution par M. DÉPREZ. 1° Soit $Oo = d$; on sait que $d^2 = R(R - 2r)$. Décrivons une circonférence ω touchant la droite Oo en o et ayant pour rayon r; menons le diamètre Oω, qui rencontre cette circonférence en A.

(*) Nous avons signalé ce théorème dans notre *Théorie des indices*, N. A. M., 1870 (2), t. IX, p. 410.

(**) Nous avons reçu trop tard pour la mentionner antérieurement une bonne solution de la question 721, par M. Joachimesca.

On a : $\overline{Oo}^2 = OA(OA - 2r)$, d'où l'on conclut $R = OA$. Donc l'enveloppe du cercle O est le cercle ω (et son symétrique par rapport à Oo).

2° Menons sur Oo la perpendiculaire $o\omega = r$; soit Δ la tangente au cercle fixe O, parallèle à Oo. En écrivant la relation $d^2 = R(R - 2r)$ sous la forme $d^2 + r^2 = (R - r)^2$, on voit que la distance ωO est égale à la distance de ω à Δ; donc le point ω parcourt une parabole ayant pour foyer O, pour directrice Δ.

Si l'on prend pour axes Oo et une perpendiculaire en O, le cercle o a pour équation

$$(x - d)^2 + y^2 = r^2, \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 - \frac{R^2}{4} = 2dx - \frac{3d^2}{2} + \frac{d^4}{4R^2},$$

d jouant le rôle de paramètre variable. Il est facile d'appliquer la théorie générale des courbes enveloppes.

3° Soit ABC l'un des triangles inscrits au cercle O et circonscrits au cercle o; soient a, b, c les longueurs de ses côtés et S sa surface.

Cherchons d'abord l'enveloppe de la droite de Lemoine du triangle ABC. Pour cela, il suffit de trouver la relation constante entre les distances λ, μ de cette droite aux points fixes O, o.

La distance d'un point à une droite est, en coordonnées trilinéaires normales,

$$\delta = \frac{Mx + Ny + Pz}{\sqrt{M^2 + N^2 + P^2 - 2MN\cos C - 2NP\cos A - 2PM\cos B}}.$$

Or, si ABC est le triangle de référence, la droite de Lemoine a pour équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$, et les coordonnées normales absolues des points O, o sont $(R\cos A, \ldots)$, (r, r, r); on en conclut

$$\lambda = \frac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{2\sqrt{\Sigma a^4 - \Sigma b^2c^2}}, \quad \mu = \frac{r(ab + bc + ca)}{\sqrt{\Sigma a^4 - \Sigma b^2c^2}}.$$

D'après des formules connues :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2\left[\frac{S^2}{r^2} - 4(4R + r)\right], \quad ab + bc + ca = \frac{S^2}{r^2} + r(4R + r),$$

$$\Sigma a^4 - \Sigma b^2c^2 = \left[\frac{S^2}{r^2} - r(4R + r)\right]^2 - 12S^2.$$

Substituant ces valeurs dans les expressions de λ et μ, et éliminant S entre les nouvelles égalités, on trouve

$$4\lambda^2 r(R+r) - 3\mu^2 R^2 = R^2 r(4R+r).$$

Donc la droite de Lemoine enveloppe une conique Γ.

Le point K de Lemoine décrit la polaire réciproque de Γ par rapport au cercle O; le lieu de ce point est donc une conique.

Remarques. 1° Le centre O_9 du cercle des neuf points de ABC décrit une circonférence; car ce cercle touche le cercle o et a un rayon constant.

Le centre de gravité G et l'orthocentre H du triangle ABC décrivent également des circonférences; en effet, ils divisent la distance OO_9 dans des rapports constants.

Les lieux du point de Nagel et du centre de gravité du périmètre du triangle ABC sont également des circonférences. Cela résulte de ce que ces points partagent la distance oG dans des rapports constants (*).

2° Appelons M et N les inverses du point de Gergonne et du point de Nagel du triangle ABC. Leurs coordonnées normales par rapport à ce triangle sont

$$\cos^2\frac{A}{2},\quad \cos^2\frac{B}{2},\quad \cos^2\frac{C}{2};\quad \sin^2\frac{A}{2},\quad \sin^2\frac{B}{2},\quad \sin^2\frac{C}{2},$$

ou

$$1+\cos A,\quad 1+\cos B,\quad 1+\cos C;\quad 1-\cos A,\quad 1-\cos B,\quad 1-\cos C.$$

Si l'on observe que les coordonnées absolues des points O, o sont $(R\cos A, \ldots), (r, r, r)$, on déduit, des expressions de ces coordonnées, que M et N partagent Oo harmoniquement dans le rapport $r : R$; donc ces points sont fixes. Il en est de même de leurs polaires par rapport au cercle O. Le polaire de M est l'axe antiorthique de ABC (droite passant par les pieds des bissectrices extérieures de ABC).

3° L'axe orthique du triangle ABC enveloppe une conique. Car ses distances aux points O, o sont

$$\lambda = \frac{R\Sigma\cos^2 A}{\sqrt{4\Sigma\cos^2 A - 3}},\quad \mu = \frac{r(R+r)}{R\sqrt{4\Sigma\cos^2 A - 3}},$$

et si l'on élimine $\Sigma\cos^2 A$, il vient

$$4r(R+r)\lambda\mu - 3R^2\mu^2 = r^2(R+r)^2.$$

(*) Comparer N. A. M., 1880, p. 253 (article de M. Weill).

Le pôle de l'axe orthique est l'inverse P du réciproque de l'orthocentre de ABC; donc P décrit une conique.

4° Le cercle de Brocard enveloppe la podaire du point O par rapport à l'ellipse décrite par le point de Lemoine du triangle ABC.

×Question 710.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 104.)

Soit n_r le coefficient de x^r dans le développement de $(1+x)^n$. Démontrer les formules

$$n_1 - \frac{1}{2}n_2 + \frac{1}{3}n_3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}n_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

$$n_1 - 2n_2 + 3n_3 - \cdots + (-1)^n(n-1)n_{n-1} + (-1)^{n-1}nn_n = 0 (*).$$

(*Ed. Times.*)

Solution : 1° Posons

$$u_n = n_1 - \frac{1}{2}n_2 + \frac{1}{3}n_3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}n_n,$$

$$u_{n+1} = (n+1)_1 - \frac{1}{2}(n+1)_2 + \frac{1}{3}(n+1)_3 - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n+1}(n+1)_{n+1};$$

nous aurons

$$u_{n+1} - u_n = \sum (-1)^{r-1}\frac{1}{r}[(n+1)_r - n_r] + (-1)^n\frac{1}{n+1}, \qquad (1)$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n).$$

Or,

$$(n+1)_r - n_r = n_{r-1}, \quad \frac{1}{r}n_{r-1} = \frac{1}{n+1}(n+1)_r; \qquad (A)$$

donc l'égalité (1) peut s'écrire

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}[\sum (-1)^{r-1}(n+1)_r + (-1)^n], \quad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

$$= \frac{1}{n+1}[1 - (1-1)^{n+1}] = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi $$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}.$$

Donc si l'égalité subsiste pour une valeur de n, elle est vraie pour la

---

(*) Le dernier terme de cette égalité manquait dans l'énoncé.

valeur immédiatement supérieure. Or, on la vérifie aisément pour $n = 1, 2$, etc. (GREENSTREET, EMMERICH).

Autrement. On a

$$(1-x)^n = 1 - n_1 x + n_2 x^2 - \cdots + (-1)^n n_n x^n;$$

$$\frac{(1-x)^n - 1}{x} = -n_1 + n_2 x - \cdots + (-1)^n n_n x^{n-1}.$$

Intégrons les deux membres entre les limites 0 et 1; il vient

$$\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}\,dx = n_1 - \frac{1}{2}n_2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}n_n.$$

Si l'on fait $1-x=y$, le premier membre de cette égalité devient

$$-\int_1^0 \frac{1-y^n}{1-y}\,dy = \int_0^1 (1+y+y^2+\cdots+y^{n-1})\,dy = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

Ce qui démontre la première formule de la question.

(MANDART, CRISTESCO.)

2° Le premier membre de l'égalité peut s'écrire

$$n - 2\frac{n(n-1)}{1.2} + 3\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots n}.$$

ou

$$n\left[1 - \frac{n-1}{1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(n-1)(n-2\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots(n-1)}\right]$$

ou $$n(1-1)^{n-1};$$

donc il est égal à zéro. (GREENSTREET, CRISTESCO, EMMERICH.)

Autrement. Différentions l'égalité (A) et dans le résultat faisons $n=1$, etc. (MANDART.)

Pour démontrer la seconde relation de la question, c'est-à-dire la formule

$$C_{n,1} - 2C_{n,2} + 3C_{n,3} \cdots + (-1)^{n+1} nC_{n,n} = 0. \qquad (B)$$

M. SOONS part de la question proposée 505, première partie. Combinant l'égalité (B) avec celle-ci :

$$C_{n,0} - C_{n,1} + C_{n,2} - \cdots + (-1)^n C_{n,n} = 0,$$

il trouve

$$kC_{n,0} - (k-1)C_{n,1} + (k-2)C_{n,2} \cdots + (-1^n)(k-n)C_{n,n} = 0.$$

M. CRISTESCO démontre, en intégrant $(1-x)^n dx$, de 0 à 1, la formule

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}n_1 - \frac{1}{3}n_2 + \frac{1}{4}n_3 - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{n+1}{1}n_n$$

×Question 717.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 104.)

Soient (C_1), (C_2), (C_3) *trois cercles ayant pour centres les points* C_1, C_2, C_3. *Les cercles décrits des milieux des droites* C_1C_2, C_2C_3 *comme centres et passant respectivement par les points d'intersection de* (C_1) *et* (C_2), (C_2) *et* (C_3) *se coupent sur l'axe radical de* (C_1) *et* (C_3). (CL. SERVAIS.)

Solution par MM. EMMERICH, DE BÖZÓKY, FRANÇOIS (La Haye), DÉPREZ, SOLLERTINSKY, CRISTESCO, VLADIMIRESCU, SOONS, DENYS *et* M^lle^ DE HAAS. Soient p_1, p_2, p_3 les axes radicaux des trois cercles (C_1), (C_2), (C_3) considérés deux à deux, et soit P le centre radical. Une parallèle quelconque à la droite C_1C_3 rencontre les droites C_1C_2, C_2C_3 aux points D_2, D_3. Prenons ces points pour centres de deux cercles (D_2), (D_3) faisant partie des deux faisceaux de cercles déterminés par (C_1) et (C_2), (C_2) et (C_3); p_2 étant l'axe radical de (C_2) et (D_2), p_1 celui de (C_2) et (D_1), leur intersection P est le centre radical des cercles (D_2) et (D_1); l'axe radical des derniers cercles est donc la perpendiculaire abaissée de P sur la droite D_1D_2, c'est-à-dire l'axe radical p_2 des cercles (C_1) et (C_3).

Solution par MM. MANDART *et* DECAMPS. Soient

$$C_n = x^2 + y^2 - 2\alpha_n x - 2\beta_n y + \gamma_n = 0, \quad (n = 1, 2, 3)$$

les équations des cercles donnés. L'équation

$$\frac{pC_1 + qC_2}{p+q} \equiv x^2 + y^2 - 2\frac{p\alpha_1 + q\alpha_2}{p+q} - 2\frac{p\beta_1 + q\beta_2}{p+q} + \frac{p\gamma_1 + q\gamma_2}{p+q} = 0$$

représente un cercle (D_3), qui passe par les points d'intersection des cercles (C_1) et (C_2) et divise la distance des centres C_1C_2 dans le rapport $q : p$.

D'après cela, les équations

$$pC_1 + qC_2 = 0, \quad pC_3 + qC_2 = 0 \tag{1}$$

représentent deux cercles (D_3) et (D_1) dont les centres sont sur une parallèle à la droite C_1C_3 et qui passent par les points de rencontre des cercles (C_1) et (C_2), (C_3) et (C_2). Si l'on fait la différence des équations (1) on obtient l'équation de l'axe radical des cercles (D_3) et (D_1); donc, etc.

REMARQUE. Soient (C_1), (C_2), (C_3) trois petits cercles tracés sur une même sphère. D'un point quelconque de l'axe radical sphérique de (C_1) et (C_3) comme pôle décrivons un grand cercle, qui coupe les arcs de grand

cercle C_1C_2, C_3C_4, aux points D_3, D_4. Les cercles qui ont pour pôles D_3, D_4 et passent respectivement par les points de rencontre des petits cercles (C_1) et (C_2), (C_3) et (C_4) se coupent sur l'axe radical des cercles (C_1) et (C_3).

Ce théorème se démontre de la même manière que celui de la question 717. (DÉPREZ.)

Question 722.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 128.)

Soit O ***le milieu de la distance des points doubles de deux séries projectives superposées, déterminées par les trois couples de points correspondants*** m_1m_2, m_2m_3, m_3m_1. ***Si*** μ_2, μ_3 ***sont les milieux des segments*** m_3m_1, m_1m_2, ***démontrer que***

$$(Om_1m_2m_3) = -\frac{\mu_2m_2}{\mu_3m_3}. \qquad \text{(CL. SERVAIS.)}$$

Solution par M. VERBESSEM. Soit I le point de la première série qui correspond à l'infini dans la seconde. On a

$$\begin{aligned} Om_1 \cdot Om_2 - OI \cdot m_1m_2 + \nu &= 0, \\ Om_2 \cdot Om_3 - OI \cdot m_2m_3 + \nu &= 0, \\ Om_3 \cdot Om_1 - OI \cdot m_3m_1 + \nu &= 0, \end{aligned}$$

ν étant une constante. En soustrayant la seconde équation de la première et la troisième de la seconde, on trouve

$$Om_2 \cdot m_2m_1 + OI\,(m_1m_1 + m_3m_3) = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{Om_2}{2OI} = -\frac{\mu_2m_2}{m_2m_1},$$

$$\frac{Om_3}{2OI} = \frac{\mu_3m_3}{m_1m_2}.$$

Par division, on obtient

$$\frac{Om_2}{Om_3} : \frac{m_1m_2}{m_1m_3} = -\frac{\mu_2m_2}{\mu_3m_3}. \qquad \text{C. q. f. d.}$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

504. Trouver le lieu du pôle d'une droite fixe par rapport à une parabole qui se transporte parallèlement à elle même de manière que son sommet parcoure une droite donnée.

Équation de la parabole mobile $(y - mx)^2 = 2p(x - \alpha)$, α étant variable. Le lieu cherché est une droite.

505. Résoudre l'équation $\sin x + \sin 2x = a(\cos x + \cos 2x)$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

739. On donne une circonférence Δ, un diamètre AB et une perpendiculaire Δ' à AB. Une droite quelconque menée par A coupe Δ en M, Δ' en N. On tire par M une perpendiculaire à AB, et par N une parallèle à AB. Ces droites se rencontrent en un point P. Trouver les points d'inflexion de la courbe décrite par P. — Même question, lorsque Δ' est parallèle à AB et que MP, NP sont respectivement parallèle et perpendiculaire à AB. (J. Neuberg.)

×**740.** Mettre la relation

$$\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c-\pi) + 8\cos\tfrac{1}{4}(3a-b-c+\pi) = 0$$

sous la forme

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(a+b-c)\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(a-b+c)\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(-a+b+c) = 1$$

(E. Gelin.)

741. En un point quelconque $M(x, y, z)$ de la surface ayant pour équation $F(x, y, z) = 0$ on mène le plan tangent, qui coupe les axes OX, OY, OZ aux points A, B, C. On construit le parallélipipède ayant pour arêtes OA, OB, OC; soit M' le sommet opposé à O. Trouver le plan tangent au point M' de la surface engendrée par ce point lorsque M se déplace sur la surface donnée. (J. Neuberg.)

742. Une tangente à une ellipse rencontre le cercle principal aux points M, M'; démontrer que les diamètres conjugués avec ceux qui passent par M et M' rencontrent la tangente sur les directrices.

(W. J. Greenstreet, M. A.)

La proposition est connue sous un énoncé un peu différent. Quelle est l'analogue dans l'ellipsoïde ? (J. N.)

SUR LES COURBES DU QUATRIÈME ORDRE

qui ont trois points doubles d'inflexion et en particulier sur la Kreuzcurve;

par M. BALITRAND, ancien élève de l'École polytechnique.

Laguerre s'est occupé de ces courbes dans un article inséré en 1878 dans les *Nouvelles Annales* (pp. 337 et suivantes). Il a démontré cette belle propriété : La cubique polaire d'un point M de la courbe se décompose en une conique (conique harmonique du point M) et une droite (droite harmonique du point M). D'où il résulte que : Les points de contact des tangentes issues du point M à la courbe sont en ligne droite. Si deux des points doubles deviennent les ombilics du plan, la courbe correspondante est une lemniscate, dont Laguerre a signalé de nombreuses propriétés dans son mémoire. On rencontre encore parmi ces courbes la Kreuzcurve, qui a été étudiée récemment par différents géomètres, et dont nous indiquerons quelques propriétés.

I. Si l'on prend le triangle des points doubles A, B, C pour triangle de référence, l'équation générale de ces courbes est

$$ly^2z^2 + mx^2z^2 + nx^2y^2 = 0. \tag{1}$$

Les coefficients l, m, n ne sauraient être tous positifs; sans quoi la courbe serait imaginaire. Nous pouvons supposer

$$l > 0, \quad m > 0, \quad n < 0.$$

Dès lors A et B sont des points doubles réels, C est un point double isolé.

Les équations des tangentes aux points doubles sont :

$$\frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = 0, \quad \frac{z^2}{n} + \frac{x^2}{l} = 0, \quad \frac{x^2}{l} + \frac{y^2}{m} = 0. \tag{2}$$

Elles rencontrent les côtés opposés en six points situés sur la conique

$$\frac{x^2}{l} + \frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = 0, \tag{3}$$

conjuguée par rapport au triangle ABC.

Si l'on retranche deux à deux les équations (2) on obtient

$$(4) \qquad \frac{y^2}{m} - \frac{x^2}{l} = 0, \quad \frac{z^2}{n} - \frac{y^2}{m} = 0, \quad \frac{x^2}{l} - \frac{z^2}{n} = 0.$$

L'équation

$$\frac{y^2}{m} - \frac{x^2}{l} = 0,$$

représente deux droites issues du sommet C et passant par les points d'intersection des tangentes en A et B. Ces deux droites sont réelles, et forment un faisceau harmonique avec les côtés CA, CB; et aussi avec les tangentes en C à la courbe du quatrième ordre. Les autres équations (2) donnent lieu aux mêmes remarques, mais les droites qu'elles représentent sont imaginaires.

II. La conique représentée par l'équation (3) est l'enveloppe des droites harmoniques des différents points de la courbe; c'est aussi le lieu des pôles des côtés du triangle ABC relativement aux coniques harmoniques des différents points de la courbe (LAGUERRE, *loc. cit.*).

La considération de cette conique conduit à une construction par points de la courbe représentée par l'équation (1). Je mène la tangente en un point P à cette conique, et je joins les sommets A, B, C aux points où cette tangente coupe les côtés opposés. Ces droites forment un triangle dont les sommets décrivent la courbe (1), lorsque le point P se meut sur la conique (3). Les droites AP, BP, CP coupent les côtés opposés en trois points qui déterminent un triangle : les côtés de ce triangle ont pour enveloppe la polaire réciproque de la courbe (1) par rapport à la conique (3). Cette courbe est du sixième ordre. Les côtés du triangle ABC sont des tangentes doubles de rebroussement et les points de rebroussement sont les points d'intersection des côtés du triangle ABC avec la conique (3).

On peut encore rattacher la génération par points de la courbe (1) à une autre méthode de transformation quadratique : la transformation par points inverses. Elle est, en effet, la transformée par points inverses de la conique

$$(5) \qquad lx^2 + my^2 + nz^2 = 0,$$

c'est-à-dire que si une conique inscrite au triangle de référence varie de façon que l'un de ses foyers reste sur la conique (5), l'autre foyer décrit la courbe (1).

III. Étant donnés une ellipse C de centre O, et le triangle (conjugué à cette conique) formé par la droite de l'infini et les axes de l'ellipse, on arrive à la *Kreuzcurve* par la construction suivante qui ne diffère pas de la construction indiquée au paragraphe II. La tangente en un point M à l'ellipse coupe les axes aux points A et B; les parallèles aux axes menées par ces points se rencontrent en M_1 : le lieu du point M_1 est la Kreuzcurve.

L'équation de l'ellipse étant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \tag{6}$$

celle de la Kreuzcurve est

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}-1=0, \tag{7}$$

et si φ désigne l'anomalie excentrique du point M, les coordonnées du point M_1 sont :

$$x=\frac{a}{\cos\varphi},\quad y=\frac{b}{\sin\varphi}.$$

La droite qui joint les projections A_1, B_1 du point M sur les axes, a pour équation

$$\frac{x}{a\cos\varphi}+\frac{y}{b\sin\varphi}-1=0. \tag{8}$$

Elle reste constamment normale à l'ellipse

$$b^2y^2+a^2x^2=\frac{a^4b^4}{c^4}, \tag{9}$$

et a pour enveloppe la courbe

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}-1=0,$$

qui est la développée de l'ellipse précédente et qui présente quatre points de rebroussement aux sommets de l'ellipse C. La Kreuzcurve est la polaire réciproque de cette courbe par rapport à l'ellipse C.

La tangente à la Kreuzcurve au point M_1 a pour équation

$$\frac{x}{a}\cos^3\varphi+\frac{y}{b}\sin^3\varphi-1=0. \tag{10}$$

Elle passe par le point d'intersection des droites représentées par les équations :

$$\frac{x}{a}\cos\varphi+\frac{y}{b}\sin\varphi-1=0, \tag{11}$$

$$\frac{x}{a\cos\varphi}+\frac{y}{b\sin\varphi}=0. \tag{12}$$

Ce sont : la tangente en M à l'ellipse C et le diamètre conjugué à OM_1.

En effet, il suffit de retrancher les équations (11) et (12) après avoir multiplié la seconde par $\sin^2\varphi\cos^2\varphi$ pour retrouver l'équation (10).

Les coordonnées du point P, intersection des droites (11) et (12), sont données par les formules

$$\frac{x}{a}=\frac{\cos\varphi}{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi},\quad \frac{y}{b}=\frac{-\sin\varphi}{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}.$$

On en déduit

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi},\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{1}{\cos\varphi-\sin\varphi},$$

puis

$$\cos\varphi=ab\frac{bx}{(bx+ay)(bx-ay)},\quad \sin\varphi=-ab\frac{ay}{(bx+ay)(bx-ay)},$$

et, par suite, le lieu du point P est représenté par l'équation

$$(bx+ay)^2(bx-ay)^2=\frac{a^2b^2}{2}[(bx+ay)^2+(bx-ay)^2]. \tag{13}$$

Mais si l'on prend pour nouveaux axes de coordonnées les droites

$$bx+ay=0,\quad bx-ay=0,$$

c'est-à-dire les diamètres conjugués égaux de l'ellipse, l'équation (13) prend la forme

$$X^2Y^2=K^2(X^2+Y^2)$$

et l'on voit qu'elle représente une Kreuzcurve.

IV. Pour terminer, nous donnerons, au moyen de la représentation paramétrique de la Kreuzcurve, une solution très simple de la question 1569 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Nous avons vu que la droite A_1B_1, qui joint les projections du point M sur les axes, était la polaire du point M_1 par rapport à l'ellipse C. Il s'agit donc de trouver le lieu

du point de rencontre Q des normales à l'ellipse C aux points où elle est coupée par A_1B_1.

Du point Q menons les deux autres normales à l'ellipse, puis les tangentes aux points d'incidence. Elles se coupent au point M′ (α, β); et d'après les formules de Joachimsthal, il existe entre les coordonnées des points M_1 et M′ les relations

$$\frac{a\alpha}{\cos\varphi} = -a^2, \quad \frac{\beta b}{\sin\varphi} = -b^2,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Le point M′ est donc sur l'ellipse C, et par suite le point Q appartient à la développée de cette ellipse.

SUR UN THÉORÈME DE M. SHARP(*);

par M. E. Catalan.

Ce théorème consiste en ce que l'on a

$$\frac{x^{4n} - x^{3n} + x^{2n} - x^n + 1}{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1} = \textit{entier}(**),$$

si n est *impair* et premier avec 5.

Si, au lieu de la fraction précédente, on considère celle-ci :

$$\frac{x^{4n} + x^{3n} + x^{2n} + x^n + 1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} = y,$$

y est un polynôme *entier*; en sorte que la restriction n *impair* devient inutile. En effet,

$$y = \frac{x^{5n} - 1}{x^n - 1} \times \frac{x - 1}{x^5 - 1} = \frac{(x-1)(x^{5n} - 1)}{(x^n - 1)(x^5 - 1)}.$$

(*) *Mathesis*, septembre 1891, p. 208.

(**) Dans *Mathesis*, l'exposant n a été omis dans x^n.

Or, en général, les nombres entiers p, q étant premiers, entre eux :

$$\frac{(x-1)(x^{pq}-1)}{(x^p-1)(x^q-1)} = \textit{entier}\,(*).$$

Dans le cas de la *question proposée*, si l'on prend $n=3$, le quotient Q équivaut à

$$\frac{x^{12}-x^9+x^6-x^3+1}{x^4-x^3+x^2-x+1} = \frac{x^{15}+1}{x^3+1}\cdot\frac{x+1}{x^5+1}.$$

Le degré de ce quotient est

$$15+1-3-5=8.$$

On peut le former aisément, de la manière suivante, déjà indiquée.

Développant en série, on a

$$Q=(1+x)(1+x^{15})(1-x^5+x^6-\cdots)(1-x^5+x^{10}-\cdots);$$

ou, en négligeant les termes dont le degré surpasse 8,

$$\begin{aligned} Q&=(1+x)(1-x^3+x^6)(1-x^5)=(1+x)(1-x^5+x^6-x^5+x^8)\\ &=1-x^5-x^3+x^6+x^8+x-x^4-x^6+x^7\\ &=1+x-x^3-x^4-x^5+x^7+x^8. \end{aligned}$$

En effet, le produit de ce polynôme, par

$$1-x-x^2-x^3+x^4 \quad \text{est} \quad 1-x^5+x^6-x^9+x^{12}.$$

Liège, 1er octobre 1891.

×QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT.

Limite d'un quotient.

1. Théorème. *La limite du quotient de deux variables commensurables, dont chacune a une limite commensurable, est égale au quotient de ces limites.*

Soient u, v deux variables commensurables, positives ou négatives, ayant respectivement pour limites les constantes a, b. Cela signifie que les différences

$$\alpha = u-a, \quad \beta = v-b,$$

(*) *Mathesis*, tome X, p. 241.

peuvent devenir et rester aussi petites que l'on veut, en valeur absolue. Posons

$$\delta = \frac{u}{v} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b}.$$

On aura

$$\delta = \frac{\alpha b - a\beta}{b(b+\beta)}.$$

Je dis que δ peut devenir et rester aussi petit que l'on veut, en valeur absolue, quand α et β deviennent et restent suffisamment petits. En effet, rendons β inférieur à $\frac{1}{2}b$; alors δ sera, en valeur absolue, compris entre

$$\frac{\alpha b - a\beta}{b(b-\frac{1}{2}b)} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha b - a\beta}{b(b+\frac{1}{2}b)},$$

et, par suite, toujours inférieur, en valeur absolue, à

$$\frac{\alpha b - a\beta}{\frac{1}{2}b^2} = \alpha\frac{2b}{b^2} - \beta\frac{2a}{b^2}.$$

On peut choisir α et β de manière que l'on ait toujours, en valeur absolue,

$$\alpha\frac{2b}{b^2} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha < \frac{\varepsilon b}{4}, \quad \beta\frac{2a}{b^2} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ou} \quad \beta < \frac{\varepsilon b^2}{4a},$$

et, par suite, en valeur absolue aussi, $\delta < \varepsilon$, ε étant une quantité positive aussi petite qu'on le veut, choisie d'avance. On a donc, d'après la définition de la limite,

$$\lim\frac{u}{v} = \frac{a}{b}, \quad \text{ou} \quad \lim\frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}. \tag{1}$$

2. Remarques. I. La démonstration précédente subsiste, si l'une des quantités u, v est constante, ou si l'une des différences α, β est nulle.

II. Il en est de même si le quotient $(u : v)$ est constant, bien que le dividende et le diviseur soient variables. Alors δ est une constante; mais cette constante ne peut être différente de zéro, sans quoi on ne pourrait avoir $\delta < \varepsilon$, ε étant aussi petit qu'on le veut. On a donc

$$\delta = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{u}{v} = \frac{a}{b},$$

égalité qui prend la forme (1), si l'on se souvient que, par définition, la limite de la quantité constante $(u : v)$ est cette constante même.

III. La démonstration précédente suppose que les limites a, b, sont finies, puisque, dans le cas contraire, les égalités $\alpha = u - a$, $\beta = v - b$, n'auraient plus aucun sens.

La démonstration suppose aussi que b est différent de zéro. Si l'on avait $b = 0$, a différent de zéro, on aurait

$$\lim \frac{v}{u} = \frac{0}{a} = 0;$$

autrement dit, d'après la définition d'une limite infinie,

$$\lim \frac{u}{v} = \infty .$$

Pour a fini, $b = \infty$, l'expression

$$\frac{u}{v} = \frac{a + \alpha}{v}$$

a un numérateur qui reste inférieur à une quantité M que l'on peut assigner; le dénominateur croît indéfiniment. Par suite, en valeur absolue, $(u : v)$ est moindre que $(M : v)$, quantité qui peut devenir et rester aussi petite qu'on le veut. Donc $\lim (u : v) = 0$.

On peut regarder ce résultat et le précédent comme contenus dans la formule (1), si l'on considère les symboles

$$\frac{a}{0}, \quad \frac{a}{\infty}$$

comme équivalents à ∞ et à 0.

Enfin, si l'on a simultanément $a = 0$, $b = 0$, ou $a = \infty$, $b = \infty$, le second membre de (1) prend l'une ou l'autre des formes indéterminées

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty} .$$

Bien loin que, dans ce cas, le second membre de (1) fasse connaître la valeur du premier, c'est le plus souvent le premier qui, par convention, est regardé comme donnant la valeur du second.

3. *Définition du quotient* $(\lambda : \mu)$ *de deux nombres incommensurables* λ, μ. Pour fixer les idées, nous supposerons λ, μ positifs. 1° Soient l, m deux nombres commensurables variables croissants, et L, M, deux nombres commensurables décroissants, ayant respectivement les nombres λ, μ pour limites. On a donc

$$\lim (L - l) = 0, \quad \lim (M - m) = 0.$$

2° Puisque l'on a

$$l < \mathrm{L}, \quad m < \mathrm{M},$$

on a aussi

$$\frac{l}{\mathrm{M}} < \frac{\mathrm{L}}{m}.$$

Le quotient $(l : \mathrm{M})$, évidemment croissant et inférieur à l'une quelconque des valeurs de $(\mathrm{L} : m)$ a une limite finie x, d'après le principe fondamental de la théorie des limites(*).

3° Le quotient $(\mathrm{L} : m)$, évidemment décroissant et supérieur à l'une quelconque des valeurs de $(l : \mathrm{M})$, a aussi une limite finie K.

4° $\mathrm{K} = x$. Car, soit s'il est possible, c un nombre commensurable compris entre x et K et tel, par conséquent, que l'on ait

$$\frac{l}{\mathrm{M}} < c < \frac{\mathrm{L}}{m}.$$

On déduit de là

$$c - \frac{l}{\mathrm{M}} < \frac{\mathrm{L}}{m} - \frac{l}{\mathrm{M}}, \quad \frac{\mathrm{L}}{m} - c < \frac{\mathrm{L}}{m} - \frac{l}{\mathrm{M}}.$$

Or

$$\frac{\mathrm{L}}{m} - \frac{l}{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{LM} - lm}{m\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{L}(\mathrm{M} - m) + (\mathrm{L} - l)m}{\mathrm{M}m}.$$

Si l'on suppose l, m, L, M compris entre P et $\mathrm{Q} > \mathrm{P}$, on a

$$\frac{\mathrm{L}}{m} - \frac{l}{\mathrm{M}} < \frac{\mathrm{Q}(\mathrm{M} - m) + \mathrm{Q}(\mathrm{L} - l)}{\mathrm{P}^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}^2}[(\mathrm{M} - m) + (\mathrm{L} - l)]$$

inégalité d'où il résulte que la différence

$$\frac{\mathrm{L}}{m} - \frac{l}{\mathrm{M}}$$

peut, comme $\mathrm{M} - m$ et $\mathrm{L} - l$, devenir et rester aussi petits qu'on le veut. Il en est donc de même des quantités plus petites

$$c - \frac{l}{\mathrm{M}}, \quad \frac{\mathrm{L}}{m} - c,$$

c'est-à-dire que

$$\lim \frac{l}{\mathrm{M}} = c, \quad \lim \frac{\mathrm{L}}{m} = c,$$

(*) *Un nombre toujours croissant (ou toujours décroissant) a une limite finie ou infinie* (Voir *Mathesis*, t. V, pp. 193-196).

ou $x = c$, $K = c$, ce qui est contraire à l'hypothèse que x, K sont inégaux. On a donc $K = x$.

5° Les quotients

$$\frac{l}{m}, \quad \frac{L}{M}$$

intermédiaires entre $(l : M)$, $(L : m)$, ont aussi x pour limite (*).

6° En résumé, les quatre quotients

$$\frac{l \text{ ou } L}{m \text{ ou } M}$$

ont une limite commune x. Par conséquent, on peut donner la définition suivante :

Le quotient (λ, μ) ***des nombres incommensurables*** λ, μ ***est la limite*** x ***du rapport des nombres commensurables*** l ***ou*** L, m ***ou*** M, ***qui ont respectivement*** λ, μ ***pour limite.***

4. *Le quotient* $(\lambda : \mu)$ ***est unique.*** Soient l', m' deux nombres commensurables croissants, L', M' deux nombres commensurables décroissants ayant aussi respectivement λ, μ pour limites. On prouve, comme plus haut, que les quatre quotients

$$\frac{l' \text{ ou } L'}{m' \text{ ou } M'}$$

ont une limite commune x'. Je dis que $x' = x$. En effet, d'après la définition des nombres l, m, l', m', L, M, L', M', on a

$$l' < L, \quad m' < M, \quad l < L', \quad m < M'.$$

Par suite,

$$\frac{l'}{M'} < \frac{L}{m}, \quad \frac{l}{M} < \frac{L'}{m'}$$

et, d'après un principe de la méthode des limites (**)

$$x' \leqq x, \quad x \leqq x',$$

relations d'où il résulte que $x' = x$.

(*) *Si deux quantités variables ont une limite commune, toute quantité intermédiaire a cette même limite* (Voir *Mathesis*, t. VI, pp. 268-269).

(**) *La limite d'une variable toujours supérieure à une autre variable est égale ou supérieure à la limite de celle-ci* (Voir *Mathesis*, t. VI, pp. 269-271).

5. ***Limite du quotient de deux variables commensurables ou incommensurables.*** La démonstration de la relation

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v} \qquad (C)$$

donnée plus haut (n° 1), avec les restrictions indiquées au n° 2, s'applique seulement au cas où tous les nombres considérés sont commensurables.

Maintenant que nous avons établi le sens exact que l'on peut attribuer au quotient de deux nombres incommensurables, la démonstration peut être étendue, avec des modifications faciles à imaginer, au cas où l'une ou plusieurs des quantités u, v, $(u : v)$, lim u, lim v, lim $(u : v)$ sont incommensurables. La relation (C) peut donc être regardée comme établie d'une manière générale. (P. M.)

BIBLIOGRAPHIE.

Cours de Mathématiques supérieures à l'usage des candidats à la licence ès-sciences physiques, par M. l'abbé STOFFAES, professeur à la Faculté catholique des Sciences de Lille. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1891 (VII-431 pp. in-8). Prix : fr. 8,50.

Belanger a publié, en 1842, la première édition, en 1859, la seconde édition de l'ouvrage intitulé : ***Résumé de leçons de Géométrie analytique et de Calcul infinitésimal***, contenant les connaissances strictement nécessaires aux ingénieurs pour l'intelligence de la Mécanique rationnelle et de la Mécanique appliquée. M. l'abbé STOFFAES vient de faire paraitre un livre semblable destiné aux candidats à la licence ès-sciences physiques et qui pourra rendre aux aspirants ingénieurs civils les mêmes services que l'ouvrage de Belanger. Voici un extrait de la table des matières qui donnera une idée des sujets abordés dans le *Cours de Mathématiques supérieures*.

Ire PARTIE. **Analyse algébrique et infinitésimale.** LIVRE I. *Compléments d'Algèbre élémentaire.* 1. Calcul des radicaux. 2. Arrangements, permutations, combinaisons. 3. Expressions imaginaires. 4. Séries. 5 Logarithmes. — LIVRE II. ***Dérivées et Différentielles.*** 1. Notions préliminaires sur les fonctions, les infiniment petits et leurs divers ordres. 2. Dérivées. 3. Calcul des dérivées. 4. Différentielles. 5. Différentielles de quelques fonctions définies géométriquement. 6 Changement de variables. 7. Développement des fonctions en séries. 8. Théorie des maxima et des minima. 9. Expressions qui se présentent sous forme indéterminée. — LIVRE III. ***Fonctions primitives ou intégrales.*** 1. Règles pour l'intégration des fonctions. 2. Intégration des fonctions rationnelles. 3. Intégration des radicaux carrés du second degré. 4. Intégration de quelques fonctions transcendantes.

5. Intégrales définies. 6. Applications géométriques du Calcul intégral. 7. Intégration et différentiation sous le signe $\int$. 8. Intégration des différentielles qui dépendent de plusieurs variables. — LIVRE IV. *Équations différentielles.* 1. Définition et formation des équations différentielles. 2. Equations différentielles du premier ordre et du premier degré. 3. Équations différentielles du premier ordre et d'un degré supérieur au premier. 4. Équations différentielles du second degré. 5. Equations différentielles simultanées. 6. Équations aux dérivées partielles.

II^e^ PARTIE. **Géométrie analytique plane.** — 1. Des coordonnées. 2. Transformation des coordonnées. 3. Ligne droite. 4. Courbes du second degré. 5. Centres, diamètres et axes. 6. Foyers et directrices. 7. Tangentes. 8. Courbes enveloppes. 9. Courbure des lignes planes. 10. Développées 11. Asymptotes. 12. Points singuliers. 13. Construction des courbes. 14. Détermination des courbes du second degré.

III^e^ PARTIE. **Géométrie analytique dans l'espace.** 1. Projections et coordonnées. 2. Transformation des coordonnées. 3. Du plan. 4. Ligne droite. 5. Plan tangent. 6. Surfaces enveloppes. 7. Génération des surfaces.

Comme Belanger, M. l'abbé Stoffaes a tâché d'être à la fois clair et rigoureux, tout en étant aussi concis que possible. En général, il a réussi. Cependant dans une seconde édition, il y aurait lieu d'introduire des corrections, des simplifications ou des modifications, dans un certain nombre de passages, dont voici une liste assez complète :

N^os^ 41 (Démonstration non générale); 55 (D. insuffisante); 57 (D. trop compliquée); 77 (définition inexacte des fonctions algébriques); 79 (à supprimer les mots: *et quel'on considère dans un état très voisin de sa limite*, auxquels on ne peut donner aucun sens précis); 79 (D. insuffisante relative à $x - \sin x$); 88 (Enoncé faux, D. insuffisante); 90 (D. géométrique de la réciproque insuffisante); 99 (D. fausse); 102 (Insuffisant); 114 (La relation entre arc cos x et arc sin x est plus compliquée); 118 (Dans $dy = y'\Delta x$, Δx est quelconque, même croissant indéfiniment ou imaginaire); 122 (théorème faux, même pour une fonction entière du second degré); 127 (D. très insuffisante pour les courbes gauches); 135, 136 (La suite indéfinie porte seule le nom de *série*); 136, 3° (u_n doit être supposé différent de zéro); 141-145 (Théorie insuffisante — le cas où $f'x$ est discontinue est oublié, — et trop compliqué : on n'a pas besoin du théorème de Taylor); 146 (La règle relative aux expressions $\infty : \infty$, qui pratiquement, est inutile, est mal démontrée); 149 (Le mot *limite* manque devant l'avant-dernière expression); 163 (D. fausse); 166 (Rien ne prouve que la valeur trouvée sera plus approchée); 167 (la démonstration géométrique permet d'assigner la limite de l'erreur); 177-180 (Ici et ailleurs, emploi abusif des infiniment petits, qui n'abrége en rien les démonstrations, mais habitue le lecteur à une fausse conception des méthodes de l'analyse infinitésimale); 182-186 (Démonstrations fausses); 187 (Méthode trop difficile à exposer rigoureusement, l'autre est simple et courte); 190, 191 (Il faudrait avertir le lecteur que les assertions qui terminent ces n^os^ sont très difficiles à établir); 196 (Le cas où $\varphi u + u\psi u = 0$ est oublié); 199 (assertion finale difficile à prouver); 201 (Confusion des *courbes enveloppes*, qui peuvent n'être pas tangentes, avec les *courbes tangentes*, qui représentent les solutions singulières et

peuvent n'être pas enveloppes) ; 210, 219 (la méthode de Brisson est plus simple et plus facile à exposer rigoureusement) ; 218 (insuffisant) ; 312, 315, 319 (la question du signe de la sous-tangente et de la sous-normale n'est pas précisée) ; 325, 447 (D. insuffisante), 330, 335 (insuffisant) ; 361, fin (ajouter : quand cette tangente existe. Il y a des courbes qui ont une asymptote, sans avoir de tangente à l'infini).

En résumé, le livre de M. l'abbé Stoffaes est conçu sur un plan excellent, mais dans la partie relative à l'analyse infinitésimale, il doit être retouché au point de vue de la rigueur et de la simplicité. (P. M.)

Tres capitulos de Geometria superior por J. Durán Loriga, capitan de artilleria. La Coruña, Puga (48 p. in-8° et 1 pl.). Prix : 3 pesetas.

Notions de géométrie supérieure exigées à l'examen d'entrée à l'École générale préparatoire des Ingénieurs et Architectes.

Sommaire. 1. Principe des signes. 2. Rapport anharmonique de quatre points d'une droite, ou de quatre droites d'un faisceau. 3. Rapport harmonique. 4. Homographie et involution. 5. Équation qui exprime l'homographie des faisceaux. 6. Relation anharmonique de quatre plans.

B. V. Moreira de Sa, professor da escola normal do Porto. *Arithmetica* para uso dos lyceus e escolas normaes. Com um juizo critico do ex^mo^ Sn. Dr. F. Gomes Teixeira. Lisboa, A. Ferreira Machado et C^a^, 1891 (xiii-602-iv p. in 12) Prix 1200 reis (= 7 fr. environ).

Sommaire. Appréciation critique favorable de M. Teixeira. Notions préliminaires (55 pages). 1^ere^ *partie :* Nombres abstraits. I. *Nombres entiers.* 1. Numération. 2. Opérations. 3-7 Propriétés des nombres. II. *Fractions.* 1. Ordinaires. 2 Décimales. 3. Approximations. 4. Fractions décimales periodiques. III. *Nombres irrationnels.* 1. Incommensurables. 2. Limites. IV. *Comparaison des nombres.* 1. Proportions. 2. Nombres négatifs. 3. Progressions. 4. Logarithmes. 2^me^ *partie.* Nombres concrets. I. *Nombres complexes.* II. *Applications de l'arithmétique* (règle de trois, d'intérêt, etc).

Function und Begrif. Vortrag von Dr. G. Frege, Professor an der Universität Jena Jena, Pohle, 1891 (31 p. in 8°). Prix : Mark 1,20.

Dissertation peu claire sur la distintion à faire entre une fonction et la valeur d'une fonction, et sur l'emploi des signes + et — en logique générale.

×NOTES MATHÉMATIQUES.

12. *Sur les lignes de force*, par M. C. E. Wastrels, professeur agrégé. On sait que les lignes de force sont des lignes telles qu'en tous leurs points la force leur est tangente ; elles coupent orthogonalement les surfaces équipotentielles.

Dans quelques traités de physique, on attribue à ces lignes une propriété qu'elles n'ont pas; on dit, notamment, qu'une ligne de force est le chemin suivi par un point abandonné à lui-même et sollicité par la force considérée. Or, il est aisé de voir qu'une ligne de force ne peut jouir de cette propriété que si elle est droite.

En un point quelconque de la ligne de force, la force est tangente à cette ligne; il en est donc de même de l'accélération dans le cas où la force fait décrire la ligne de force; par suite, la composante normale de l'accélération est partout égale à zéro; on a donc, en un point quelconque de la courbe : $\frac{v^2}{\rho} = 0$, v étant la vitesse et ρ le rayon de courbure de la trajectoire. Donc, on a constamment $\rho = \infty$, ce qui montre que la ligne est une droite.

×13. *Construction d'une troisième proportionnelle.* Pour construire l'expression $x = \frac{a^2}{b}$, décrivons un cercle quelconque O; prenons une corde $AB = b$, et du point A comme centre, avec le rayon a, décrivons une seconde circonférence coupant la première en C et D. Soit X le point d'intersection des cordes AB, CD; AX sera la troisième proportionnelle cherchée.

En effet, les triangles ADX, ABD sont équiangles, etc. (Cl. Thiry.)

×14. *Sur une formule de Lagrange.* (Extrait d'une lettre de M. Cl. Thiry.)

« Dans le N° d'août-septembre de *Mathesis* (1891, p. 184), M. Poulain fait observer que *l'omniformule métrique du triangle* est un cas particulier d'une formule générale de Lagrange. J'avais rencontré antérieurement cette relation générale sans savoir qu'elle fût de Lagrange.

En effet, j'ai donné, sans trigonométrie, à la page 72 de mes *Applications du théorème de Stewart et Théorie du Barycentre*, la formule de Lagrange [formule (3) de la p. 72], et j'ai fait remarquer en note, que la formule (P) de la p. 35 de cet ouvrage peut se déduire de la formule générale. Ce n'est qu'après avoir trouvé l'omniformule métrique que j'ai vu qu'elle pouvait se déduire de celle de Lagrange, parce que le point K_n est le barycentre du triangle ABC dont les sommets sont chargés de masses a^n, b^n, c^n.

×15. *Sur les formules relatives aux polygones réguliers.* Au sujet des formules données par M. l'abbé Gelin (*Mathesis*, 1891, (2), I, pp. 160-164)

on peut remarquer que les formules V_4 et V_5 en fonction de a et de R ont été publiées, en 1843 et 1844, par M. Huet (N. A. M., II, 353-357, 474-480, III, 361-365, 393-400). Le développement des premières formules est exposé d'une manière très détaillée, puis l'auteur y parvient beaucoup plus rapidement par le théorème de Guldin. (H. Brocard.)

16. *Sur la question* 691. (Extrait d'une lettre de M. V. Jamet.) « A propos de la question 691, je prie le lecteur de vouloir bien considérer comme non avenus les résultats que j'avais cru établir en ce qui concerne les intégrales abéliennes de la courbe représentée par les équations de la page 200. La page 201 renferme une faute de calcul, dans l'expression de

$$d\left(\frac{u^7\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}{u^2-1}\right).$$

En calculant correctement cette différentielle, le lecteur verra que, parmi les intégrales que je voulais étudier, il y en a une de première espèce, et une seule : ceci devait être, puisqu'il s'agit, en définitive, d'une courbe du genre un. »

QUELQUES THÉORÈMES

sur le centre des moyennes distances d'un système de points;

par M. H. Van Aubel, professeur à Anvers.

Lemme. *Si* G, G′ *sont les centres des moyennes distances des sommets de deux polygones* $A_1A_2\ldots A_n$, $B_1A_2\ldots A_n$ *ayant* $n-1$ *sommets communs, la droite* GG′ *est parallèle à* A_1B_1 *et égale à* $\frac{1}{n}A_1B_1$.

Autrement dit, *étant donné un système de n points; si un point* A_1 *du système éprouve un déplacement* A_1B_1, *le centre de gravité* G *éprouve un déplacement* GG′ *parallèle à* A_1B_1 *et égale à* $\frac{1}{n}A_1B_1$.

En effet, soit O le *c.d.m.d.* des points $A_2, A_3, \ldots, A_n$. Les points G, G′ divisent les droites OA_1, OB_1 dans le rapport $1 : n-1$; donc les triangles OGG′, OA_1B_1 sont semblables, par suite GG′ est parallèle à A_1B_1 et égale à $\frac{1}{n}A_1B_1$.

I. *Soient* G, G′ *les c. d. m. d. des deux systèmes de n points*, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *et* $B_1, B_2, \ldots, B_n$: *le droite* GG′ *est parallèle à la résultante des n droites* $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ *et égale à la n^e partie de cette résultante.*

En effet, pour passer du premier système au second, imprimons successivement aux points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les déplacements $A_1B_1, A_2B_2, \ldots A_nB_n$, alors, si $G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}$ désignent les *c. d. m. d.* des systèmes $B_1A_2A_3 \ldots A_n$, $B_1B_2A_3 \ldots A_n$, $\ldots$, $B_1B_2 \ldots B_{n-1}A_n$, les côtés de la ligne polygonale $GG_1G_2 \ldots G_{n-1}G'$ sont parallèles aux droites $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ et égales aux n^{es} parties de ces droites.

II. *Si deux systèmes de n points*, $A_1A_2 \ldots A_n$ *et* $B_1B_2 \ldots B_n$, *ont même c. d. m. d., les droites* $A_1B_1, A_2B_2, \ldots A_nB_n$ *sont égales et parallèles aux côtés d'un polygone fermé de n côtés.*

Ce théorème est une conséquence immédiate du précédent.

III. *Étant donnés deux polygones de n côtés*, $A_1A_2 \ldots A_n$ *et* $C_1C_2 \ldots C_n$, *si l'on mène les droites* $A_1B_1, A_2B_2, \ldots A_nB_n$ *égales et parallèles aux côtés* $C_1C_2, C_2C_3, \ldots, C_nC_1$ *du second polygone, les deux systèmes de points* $A_1, A_2 \ldots A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ *ont même c. d. m. d.*

Ce théorème est le réciproque du précédent. En voici des cas particuliers remarquables.

Si l'on divise les côtés $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ *d'un polygone fermé, aux points* $B_1, B_2, \ldots, B_n$, *dans un même rapport* $\frac{p}{q}$, *le polygone* $B_1B_2, \ldots, B_n$, *a même centre de gravité que le premier.*

Si sur les côtés d'un polygone fermé $A_1A_2 \ldots A_n$, *on construit des triangles directement semblables* $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3, \ldots, A_nB_nA_1$, *les polygones* $A_1A_2 \ldots A_n$, $B_1B_2 \ldots B_n$ *ont même c. d. m. d.* (Théorème de M. Laisant.)

Si par un point O *on mène des droites* $OB_1, OB_2, \ldots, OB_n$ *égales et parallèles aux côtés* $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ *d'un polygone fermé de n côtés, ce point sera le c. d. m. d. du système des points* $B_1B_2 \ldots B_n$. En effet, les extrémités $B_1, B_2, \ldots, B_n$ de ces droites ont le même *c. d. m. d.* que leurs autres extrémités, qui se confondent en O.

Étant donnés un polygone $A_1A_2 \ldots A_n$ *et un point quelconque* O, *si l'on mène les droites* $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ *égales et parallèles respectivement à* $A_2O, A_3O, \ldots, A_1O$, *le point* O *sera le c. d. m. d. du système des points* $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Car les droites $B_1O, B_2O, \ldots$ sont égales et parallèles aux côtés du polygone $A_1A_2 \ldots A_n$.

IV. *Étant donnés un système de n points* $A_1A_2 \dots A_n$ *et un autre système de* $n-1$ *points* $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$, *si l'on construit le polygone* $A_nC_1C_2 \dots C_{n-2}B_n$ *dont les côtés successifs* $A_nC_1, C_1C_2, \dots, C_{n-2}B_n$ *sont parallèles aux droites* $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_{n-1}B_{n-1}$, *les systèmes* $A_1A_2 \dots A_n$, $B_1B_2, \dots, B_{n-1}B_n$ *ont même c. d. m. d.*

V. *Étant donnés un triangle* $A_1A_2A_3$ *et un parallélogramme* MP_1P_2N, *si l'on prolonge le côté* P_1P_2 *d'une longueur* $P_2P_3 = P_1P_2$, *et que l'on construise les triangles* $A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2$, $A_3A_1B_3$ *directement semblables aux triangles* MNP_1, MNP_2, MNP_3, *le sommet* A_1 *sera le centre de gravité du triangle* $B_1B_2B_3$.

Construisons sur les côtés de $A_1A_2A_3$ trois parallélogrammes directement semblables $A_2A_1B_1C_1$, $A_3A_2B'_2B_2$, $A_1A_3B'_3C_3$, et prolongeons $B'C_3$ de $C_3B_3 = B'C_3$; nous obtenons évidemment les points B_1, B_2, B_3 dont il est question dans l'énoncé. Or, les triangles $A_1A_2A_3$, $B_1B'_2B'_3$ ont même centre de gravité G, et si l'on imprime à B'_2 le déplacement $B'_2B_2 = A_2A_3$, à B'_3 le déplacement $B'_3B_3 = 2A_3A_1$, le triangle $B_1B'_2B'_3$ est remplacé par le triangle $B_1B_2B_3$, et le centre de gravité G est transporté en A_1; car, si la parallèle menée par G à A_2A_3 coupe A_1A_3 en D, on a $GD = \frac{1}{3}A_2A_3$, $DA_1 = \frac{2}{3}A_3A_1 = \frac{1}{3}B'_3B_3$. Le théorème est donc démontré.

Scolie. 1° Dans la figure précédente, si D_1, E désignent les milieux de B_1C_1, A_1A_2, le point E est le centre de gravité du triangle $D_1B'_2C_3$. En effet, on passe du triangle $B_1B'_2B'_3$ au triangle $D_1B'_2C_3$ en imprimant aux sommets B_1, B'_3 les déplacements $B_1D_1 = \frac{1}{3}A_1A_2$, $B'_3C_3 = A_3A_1$.

2° Prolongeons $C_3B'_3$ de $B'_3F = C_3B'_3$; le centre de gravité du triangle $C_1B'_2F$ est symétrique de A_1 par rapport au centre de gravité de $A_1A_2A_3$. Le lecteur trouvera facilement la démonstration de cette propriété.

VI. *Étant donnés un polygone* $A_1A_2, \dots A_n$ *et un parallélogramme* MP_1P_2N, *si l'on porte sur le prolongement de* P_1P_2 *les longueurs* P_2P_3, $P_3P_4, \dots P_{n-1}P_n$ *égales à* P_1P_2, *et que l'on construise les triangles* $A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2, \dots, A_nA_1B_n$ *directement semblables aux triangles* MNP_1, $MNP_2, \dots, MNP_n$, A_1 *est le centre des moyennes distances des points* $B_1, B_2, \dots, B_n$.

Construisons sur les côtés du polygone donné les parallélogrammes $A_2A_1B_1C_1$, $A_3A_2B'_2B_2, \dots, A_nA_1B'_nC_n$, directement semblables à MNP_1P_2, et prolongeons B'_2C_2 de $C_2B_2 = B'_2C_2$, B'_3C_3 de $C_3B_3 = 2B'_3C_3, \dots, B'_nC_n$ de $C_nB_n = (n-2)B'_nC_n$: nous obtenons ainsi les points $B_1, B_2, \dots B_n$

dont il est question dans l'énoncé. Supposons le théorème vérifié pour le polygone $A_1A_2A_4\ldots A_n$; alors, si l'on construit le parallélogramme A_1A_2CB directement semblable à $A_2A_4B_2C_2$, A_1 est le *c.d.m.d.* des points $B, B_2, B_4, \ldots, B_n$; d'après le théorème V, si l'on construit le parallélogramme $A_2A_1C'B'$ directement semblable à $A_1A_2C_1B_1$ et que l'on prolonge $B'C'$ de $C'B''=B'C'$, A_1 est le *c.d.m.d.* des points B_1, B_2, B''. Par conséquent, les droites A_1B', $A_1B_2, A_1B_4, \ldots, A_1B_n$ sont égales et parallèles aux côtés d'un polygone fermé; de même, A_1B_1, A_1B_2, A_1B''. Mais il est facile de voir que les droites A_1B', A_1B'' sont égales, parallèles et de sens opposés. Par suite, les droites A_1B_1, A_1B_2, ..., A_1B_n étant égales et parallèles aux côtés d'un polygone fermé, A_1 est le *c.d.m.d.* des points B_1, B_2, ..., B_n.

Scolie. D'après le théorème de Laisant, le polygone $B_1B_2'\ldots B_n$ a même *c.d.m.d.* G que $A_1A_2\ldots A_n$. Mais pour passer au polygone $B_1B_2\ldots B_n$, on fait subir aux sommets B_2, B_3, ..., B_n des déplacements $B_2'B_2=A_2A_3$, $B_3'B_3=2A_3A_4$, ... Donc GA_1 est la résultante d'une ligne dont les côtés sont parallèles aux droites A_2A_3, A_3A_4, ..., A_nA_1 et ont pour longueurs $\frac{1}{n}A_2A_3$, $\frac{2}{n}A_3A_4$, ..., $\frac{n-1}{n}A_nA_1$.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 497.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 280.)

Soient

$$A=\frac{a}{(b-c)(b-d)(c-d)},\quad B=\frac{b}{(a-c)(a-d)(c-d)},$$

$$C=\frac{c}{(a-b)(a-d)(b-d)},\quad C=\frac{d}{(a-b)(a-c)(b-c)};$$

on a

$$(A-B+C-D)\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}+\frac{1}{C}-\frac{1}{D}\right)=4^2.$$

(P.-A. Mac-Mahon.)

Cette identité est fausse. Ayant oublié la source d'où nous l'avons tirée, il nous est impossible d'en rectifier l'énoncé.

Pour constater l'inexactitude, il suffit de substituer les valeurs $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 1$. (H. Brocard, Laisant.)

Le premier membre de l'égalité proposée se ramène au quotient de

$$(a-b)^2[(a+b)(c+d)-a^2-b^2-ab-cd]$$
$$+(c-d)^2[(a+b)(c+d)-c^2-d^2-cd-ab]$$

par $abcd$; on voit immédiatement qu'il ne peut se réduire à 16, car le terme en a^4 du numérateur ne disparaît pas. (Mosnat.)

L'égalité proposée se vérifie, si l'on suppose

$$a+b+c+d=0, \quad a^2+b^2+c^2+d^2=0(*). \quad \text{(Déprez.)}$$

On peut rapprocher de la question 497 l'égalité de M. Prior (Voir *Mathesis*, t. I, p. 42) : Si $a+b+c=0$,

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9.$$

×Question 726.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 152.)

Vérifier l'identité

$$3^n-\left(\frac{n}{1}\right)^2 3^{n-1}+\left(\frac{n(n-1)}{1.2}\right)^2 3^{n-2}-\cdots \mp 1$$
$$=4^n-\frac{n}{1}C_{n+1,n}4^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}C_{n+2,n}4^{n-2}-\cdots \mp C_{2n,n}.$$

(E. Catalan.)

Solution et généralisation par M. Laisant. L'identité proposée se vérifie en y remplaçant 3 et 4 par deux nombres quelconques $a-1$ et a, ayant pour différence l'unité.

Le premier membre (A) peut alors s'écrire

$$(a-1)^n-C^2_{n,1}(a-1)^{n-1}+C^2_{n,2}(a-1)^{n-2}-\cdots \mp C^2_{n,n}$$

et le second (B) :

$$a^n-C_{n,1}C_{n+1,n}a^{n-1}+C_{n,2}C_{n+2,n}a^{n-2}-\cdots \mp C_{2n,n}.$$

Or

$$(a-1)^n=a^n-C_{n,1}a^{n-1}+C_{n,2}a^{n-2}-\cdots \pm C_{n,n}$$
$$-C^2_{n,1}(a-1)^{n-1}=-C^2_{n,1}a^{n-1}+C^2_{n,1}C_{n-1,1}a^{n-2}-\cdots \pm C^2_{n,1}C_{n-1,n-1}$$
$$+C^2_{n,2}(a-1)^{n-2}=+C^2_{n,2}a^{n-2}-\cdots \pm C^2_{n,2}C_{n-2,n-2}$$
. . . . . .

(*) Ce sont probablement des relations de ce genre qui sont oubliées dans l'énoncé.

Si nous faisons la somme, nous obtenons pour le coefficient du terme en a^{n-p} :

$$\pm (C_{n,p} + C^2_{n,1} C_{n-1,p-1} + C^2_{n,2} C_{n-2,p-2} + \cdots + C^2_{n,p-1} C_{n-p+1,1} + C^2_{n,p}) = k.$$

Tout se réduit donc à établir l'identité entre l'expression k et $\pm C_{n,p} C_{n+p,p}$ coefficient du terme général en a^{n-p} du polynôme (B).

Or, on sait, et il est d'ailleurs très facile de démontrer cette propriété par les récurrences classiques des nombres $C_{n,p}$, qu'on a :

$$C_{n+p,p} = C_{n,p} + C_{p,1} C_{n,p-1} + C_{p,2} C_{n,p-2} + \cdots + C_{p,p-1} C_{n,1} + C_{p,p}.$$

Multipliant par $C_{n,p}$ nous avons pour terme général du produit

$$C_{n,p} C_{p,q} C_{n,p-q},$$

q étant inférieur à p, ou au plus égal à p.

Dans le développement k, nous avons le terme général de même rang, mais à partir de la droite

$$C^2_{n,p-q} C_{n-p+q,q}.$$

En divisant par $C_{n,p-q}$ l'identité des quotients $C_{n,p} C_{p,q}$ et $C_{n,p-q} C_{n-p+q,q}$ se vérifie immédiatement, car elle revient à

$$\frac{n!}{p!\,(n-p)!} \frac{p!}{q!\,(p-q)!} = \frac{n!}{(p-q)!\,(n-p+q)!} \frac{(n-p+q)!}{q!\,(n-p)!}.$$

Donc les termes des développements considérés sont identiques chacun à chacun, et par conséquent l'identité est établie dans les conditions plus générales que nous avons indiquées.

Cette question, en reprenant les nombres 3 et 4 de l'énoncé de M. Catalan, se prête à une autre remarque intéressante. Si nous écrivons

$$(x-1)^n = x^n - C_{n,1} x^{n-1} + C_{n,2} x^{n-2} - \cdots \pm C_{n,n},$$
$$(3+x)^n = 3^n + C_{n,1} 3^{n-1} x + C_{n,2} 3^{n-2} x^2 + \cdots + C_{n,n},$$

il devient évident qu'en effectuant le produit, le coefficient de x^n sera représenté par le premier membre (A) de l'identité de M. Catalan. Or, ce produit est

$$(x^2 + 2x - 3)^n = ((x+1)^2 - 4)^n.$$

Si nous prenons la seconde de ces deux formes, et si nous effectuons le développement, il est facile de voir que le coefficient de x^n est

$$C_{2n,n} - 4C_{n,1} C_{2n-2,n} + 4^2 C_{n,2} C_{2n-4,n} - 4^3 C_{n,3} C_{2n-6,n} + \cdots$$

le développement devant s'arrêter dès que $2(n-k)$ devient inférieur à n.

Nous avons donc, en résumé, la double identité :

$$3^n - C^2_{n,1}3^{n-1} + C^2_{n,2}3^{n-2} - C^2_{n,3}3^{n-3} + \cdots \pm C^2_{n,n}$$
$$= 4^n - C_{n,1}C_{n+1,n}4^{n-1} + C_{n,2}C_{n+2,n}4^{n-2} - C_{n,3}C_{n+3,n}4^{n-3} + \cdots \pm C_{2n,n}$$
$$= C_{2n,n} - 4C_{n,1}C_{2n-2,n} + 4^2C_{n,2}C_{2n-4,n} - 4^3C_{n,3}C_{2n-6,n} + \cdots$$

M. Joachimescu nous a aussi envoyé une bonne solution de la question 726, contenant une généralisation de la formule de M. Catalan.

Question 736.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 216.)

Intégrer l'équation

$$y' = \frac{xy - y^2}{1 - x^2}. \qquad \text{(E. Catalan.)}$$

Solution par MM. Pierre Decamps (Gand), Péters (Liége) et M^lle^ Pompilianu (Bucharest). L'équation peut s'écrire

$$y' - \frac{x}{1-x^2}y = -\frac{y^2}{1-x^2}.$$

Sous cette forme, on voit qu'elle rentre dans la catégorie des équations de J. Bernoulli : $y' + Py = Qy^m$, P et Q étant des fonctions de x. Pour l'intégrer, mettons y^2 en facteur, ce qui supprime la solution évidente $y = 0$; il vient

$$y^{-2}y' - \frac{x}{1-x^2}y^{-1} = -\frac{1}{1-x^2}$$

ou en posant

$$y^{-1} = t, \quad -y^{-2}y' = t', \quad t' + \frac{x}{1-x^2}t = \frac{1}{1-x^2},$$

équation linéaire avec second membre, qui a pour intégrale, si x^2 est inférieur à 1

$$t = C\sqrt{1-x^2} + x,$$

et si x^2 surpasse l'unité

$$t = C\sqrt{-1+x^2} + x.$$

On déduit de là, pour y, la valeur

$$y = \frac{1}{\sqrt{H(1-x^2)} + x},$$

H étant une nouvelle constante arbitraire.

MM. KEELHOFF et TEIXEIRA ont intégré l'équation donnée par variation des constantes arbitraires, en laissant d'abord de côté le terme en y^2 de l'équation donnée; M. DE STRÉKALOFF, en posant $y = 1 : uv$, et annulant le coefficient de u; M. BROCARD, en faisant $x = \sin t$.

×Question 738.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 215.)

Soient a, b, c les trois côtés d'un triangle et x, y, z trois nombres, tels que leur somme $x+y+z$ soit positive. Démontrer que le produit xyz est négatif si

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}=0.$$ (W. J. GREENSTREET, M. A.)

Solution par C. J. FRANÇOIS (la Haye). Comme on a

$$x+y+z>0,$$

il est impossible que ces trois nombres soient négatifs, et à cause de (1) ils ne peuvent être non plus tous positifs. Ainsi un ou deux de ces nombres doivent être négatifs. Supposons y et z négatifs, par exemple, respectivement égaux à $-y'$ et $-z'$. Puisque a, b, c sont les côtés d'un triangle, on a

$$a<b+c, \quad a^2<b^2+c^2+2bc,$$

mais on a aussi

$$x-y'-z'>0, \quad x>y'+z'.$$

Donc, à plus forte raison,

$$\frac{a^2}{x}<\frac{b^2+c^2+2bc}{y'+z'}.$$

Or,

$$\frac{a^2}{x}=\frac{b^2}{y'}+\frac{c^2}{z'};$$

donc on aurait

$$\frac{b^2}{y'}+\frac{c^2}{z'}<\frac{b^2+c^2+2bc}{y'+z'},$$

ou, en chassant les dénominateurs et réduction faite $(bz'-cy')^2<0$, ce qui est absurde. Ainsi, un des trois nombres seulement sera négatif.

Si l'on considère (x, y, z) comme étant les coordonnées barycentriques d'un point par rapport au triangle ABC, la proposition s'exprime que tous les points de

la circonférence circonscrite au triangle se trouvent dans l'un des espaces infinis compris entre un côté du triangle de référence et les prolongements des côtés adjacents. (J.N.).

QUESTIONS D'EXAMEN.

506. On donne deux points A, B sur OX, un point C sur OY. Soient D, E deux points de OY symétriques par rapport à C. Les droites AD, BE se coupent en M, les droites AE, BD en N. Trouver le lieu géométrique des points M et N lorsque la distance CD varie. — Ce lieu est une hyperbole (H). Trouver le lieu de l'intersection des tangentes menées par A et B à cette courbe, lorsque le point C est supposé placé successivement en chaque point de OY. — Où faut-il placer le point C pour que l'hyperbole (H) soit équilatère? — Lorsque C se déplace sur OY, l'une des asymptotes de (H) reste fixe.

Équation de (H) :

$$y(ax + bx - 2ab) + 2c(x - a)(x - b) = 0.$$

Les tangentes en A et B se coupent sur OX. Une asymptote a pour équation $x = \frac{2ab}{a+b}$: elle est parallèle à OY et coupe OX au point F conjugué harmonique de O par rapport à AB, etc.

507. L'*écart normal* en un point d'une ellipse est l'angle compris entre la normale en ce point et le diamètre. Trouver l'écart normal maximum.

Les coefficients angulaires du diamètre et de la normale sont m, $\frac{a^2}{b^2}m$, etc. Les points cherchés sont les extrémités des diamètres conjugués égaux.

508. Résoudre l'équation

$$\begin{vmatrix} p^5 & q^5 & r^5 \\ (p+x)^5 & (q+x)^5 & (r+x)^5 \\ (2p+x)^5 & (2q+x)^5 & (2r+x)^5 \end{vmatrix} = 0.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

743. 1° Étant donnée une conique et deux points A, B, dans son plan, les points de contact des tangentes à cette conique, menées par les deux points A, B, sont sur une deuxième conique S, passant aussi par

les deux points A, B. A quelle condition la conique S est-elle une hyperbole équilatère ?

2° Démontrer qu'après avoir choisi le point A, on peut trouver comme il suit un point B remplissant la condition indiquée ci-dessus. Du point A on trace deux droites quelconques et par le pôle de chacune d'elles on mène une perpendiculaire à l'autre. Ces deux droites se coupent au point cherché, B.

3° Le point A étant fixe, et les deux droites dont il vient d'être question tournant autour du point A, quel est le lieu du point B ?

(V. JAMET.)

744. Trouver 1° trois coefficients binomiaux consécutifs qui forment une progression arithmétique ; 2° quatre coefficients binomiaux consécutifs qui forment une proportion géométrique.

Démontrer qu'il ne peut exister trois coefficients binomiaux consécutifs qui soient en progression géométrique ou en progression harmonique, ni quatre coefficients consécutifs qui soient en progression arithmétique.

(SCHOUTE.)

***745.** Soient A, B deux points diamétralement opposés d'une circonférence, C un troisième point quelconque de cette ligne, BD et DE deux arcs égaux. Les droites AD et BC se coupent en F, les droites AE et CD en G. Démontrer que les droites FG, AE sont perpendiculaires. (A. C.)

746. Une conique est inscrite dans une parallélogramme ABCD. La tangente menée en un point M de la courbe rencontre les côtés BC, CD respectivement en R, Q ; la parallèle à BC par M coupe AB en L, et la parallèle à CD par M coupe AD en N. Démontrer que les triangles LMQ, NMR sont équivalents. (GENESE.)

Rectifications. Page 159, ligne 5 en remontant, lire BAJ (AJ est la tangente au cercle BAS), au lieu de BAS ; dernière ligne, lire *cercle* au lieu de triangle.

Page 206, Remarque III, lire $8 \operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg} r_2 \operatorname{tg} r_3$ au lieu de $2 \operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg} r_2 \operatorname{tg} r_3$.

Page 216, question 725, lire : le centre du cercle qui oscule V en son point de contact avec l'axe de V décrit une parabole semi-cubique.

Page 216, question 737, lire $\frac{4}{\overline{AB'}^2 + \overline{AC'}^2}$, au lieu de $\frac{2}{\overline{AB'}^2 + \overline{AC'}^2}$.

Page 217, ligne 13, lire Charlemagne au lieu de St-Louis.

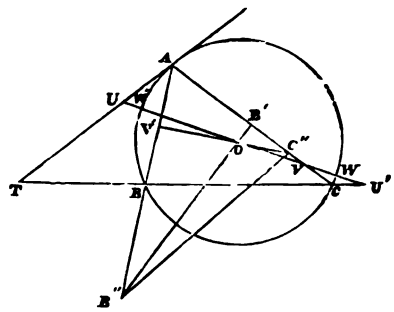
Page 221, ligne 10, lire $r_b \operatorname{cosec}^2 \frac{A}{2}$, $r_c \operatorname{cosec}^2 \frac{A}{2}$ au lieu de $r_b \operatorname{cosec}^2 \frac{B}{2}$, $r_c \operatorname{cosec}^2 \frac{C}{2}$.

QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

(Voir *Mathesis*, (2), I, pp. 90-92 et 116-117.)

●. Problème. Connaissant trois points A, B, C d'une conique et le centre O, trouver la tangente au sommet A.

D'après le théorème de Desargues, la tangente AT et le côté BC, les deux côtés AB et AC, et la courbe marquent sur une transversale quelconque u trois couples de points UU', VV', WW' d'une même involution. Prenons pour u la droite menée par O et telle que ce point soit le milieu du segment compris dans l'angle BAC. Alors O est le milieu commun des couples VV', WW' de l'involution; par suite, c'est aussi le milieu du segment UU'. On a ainsi un procédé pour déterminer le point U de la tangente cherchée.



Soit T le point de rencontre de la tangente avec BC. Projetons les divisions harmoniques (V, V', O, ∞), U, U', O, ∞) respectivement à partir des points A et T; nous aurons deux faisceaux harmoniques. Donc la conjuguée harmonique de AO par rapport à l'angle BAC est parallèle à la conjuguée harmonique de TO par rapport à l'angle ATC.

En particulier, si O est le centre du cercle ABC, on peut écrire

$$\cot ATB = \tfrac{1}{2}(\cot ATO + \cot AUO), \text{ ou } \cot OAH = \tfrac{1}{2}\cot OAK + \tfrac{1}{2}\cot AUO,$$

H étant l'orthocentre et K, le point de Lemoine. (Sollertinsky.)

Soient A', B', C' (non marqué sur la figure) les milieux de BC, CA, AB. Si par un même point on mène des parallèles à OB' et CA, OC' et AB, OA et à la tangente AT, on obtient un faisceau en involution. Or, si l'on coupe les trois couples de côtés opposés d'un quadrangle complet par une transversale, on obtient trois couples de points en involution. Si la transversale est la droite de l'infini, les parallèles aux trois couples de côtés opposés d'un quadrangle complet donnent trois couples de rayons conjugués d'un faisceau involutif; réciproquement, on peut toujours

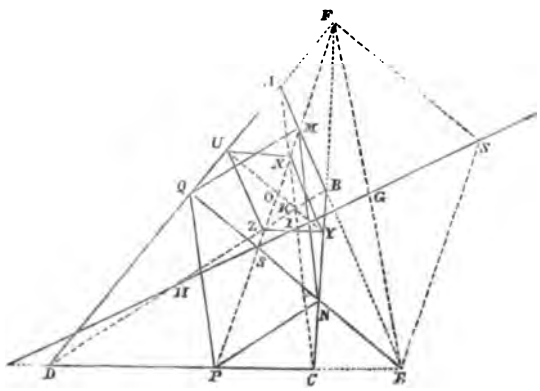
construire un quadrangle complet dont les six côtés soient parallèles aux rayons de trois couples d'un faisceau en involution.

D'après cela, si OB′ rencontre AB en B″ et que OC′ coupe AC en C″, la tangente AT est parallèle à la droite B″C″. (J. N.).

10. Soient ABCD un quadrilatère convexe; E, F les points de concours des côtés opposés AB et CD, AD et BC; H, I, G les milieux des trois diagonales BD, AC, EF. Soient S, S′ les points doubles de l'involution marquée sur la droite HIG par les trois couples de côtés opposés du quadrangle complet ABCD.

1° Le quadrilatère ESFS′ est un parallélogramme dont les côtés sont parallèles aux axes des deux paraboles circonscrites au quadrilatère ABCD. 2° Les droites ES, FS rencontrent respectivement les couples de côtés opposés BC et AD, AB et CD en des points N et Q, M et P qui sont les sommets d'un parallélogramme MNPQ dont les côtés sont parallèles aux diagonales AC, BD du quadrilatère ABCD. (Sollertinsky.)

Les coniques passant par les quatre points A, B, C, D marquent sur une droite quelconque i des couples de points en involution; les points doubles de l'involution sont les points de contact de deux coniques circonscrites au quadrilatère ABCD et touchant i. Prenons pour i la droite de l'infini; alors les points doubles de l'involution sont situés à l'infini sur les axes des deux paraboles circonscrites au quadrilatère ABCD. Projetons l'involution à partir des points F, E et soient FS et FS′, ES et ES′ les rayons aboutissant aux points doubles, ou parallèles aux axes des deux paraboles. Les droites FS, FS′ divisent harmoniquement l'angle CFD; donc FS et les côtés de l'angle CFD déterminent sur la transversale ES parallèle à FS′ des segments égaux NS = SQ. De même MS = SP; donc la figure MNPQ est un parallélogramme.



D'après un cas particulier du théorème de Brianchon (Cremona, *Géométrie projective*, § 67), les ternes de rayons (F, AMB), (E, CNB) se coupent en six points situés sur trois droites concourantes AC, PQ, MN; donc MN et PQ sont parallèles à AC; pour la même raison, MQ et PN sont parallèles à DB. Mais le centre S de tout parallélogramme MNPQ inscrit à un quadrilatère ABCD et dont les côtés sont parallèles aux diagonales de ce quadrilatère est situé sur la droite joignant les milieux des diagonales. Donc la droite SS' coïncide avec HI.

La droite SS' est divisée harmoniquement par les côtés des angles BEC, BFA; donc S et S' sont les points doubles de l'involution marquée sur la droite HI par les couples de côtés opposés du quadrangle ABCD; G est le point central de l'involution. Les points S, S' sont donc les points de contact de deux coniques circonscrites au quadrangle et touchant la droite HI. Pour les construire, il suffit d'observer que les distances GS, GS' sont égales à la tangente menée de G à la circonférence qui a pour diamètre HI.

Les droites FS', ES' rencontrent aussi les droites AB et CD, AD et BC aux sommets d'un parallélogramme.

On peut se proposer de construire un parallélogramme XYZO inscrit au quadrilatère simple ACBD et dont les diagonales passent par les points de concours F, F' des côtés opposés AD et BC, AC et BD: ces diagonales sont parallèles à celles du parallélogramme MNPQ, et les côtés sont parallèles à AB et CD.

Lorsque le quadrilatère ABCD est inscriptible, les bissectrices des angles AFB, BFC marquent sur AB et CD, BC et DA les sommets d'un losange. Ce cas particulier s'établit facilement par la géométrie élémentaire et donne, au moyen d'une projection orthogonale, le cas général.

(J. N.)

11. On donne un triangle ABC et un point P dans son plan. Trouver le lieu des centres des coniques S inscrites dans le triangle ABC et vues du point P sous un angle droit.

Démontrer que les coniques S sont vues sous un angle droit d'un autre point P'; montrer que, si P se déplace, la droite PP' passe par un point fixe I et que le produit IP. IP' est constant (*Concours d'Agrégation des sciences math.*, 1890).

Construisons les angles droits APA', BPB', CPC'; soient A', B', C' les points où leurs seconds côtés rencontrent respectivement BC, CA,

AB ; ces points sont en ligne droite. Toutes les coniques S sont inscrites dans le quadrilatère formé par AB, BC, CA, A'B' ; car les couples de tangentes menées de P aux coniques dans ce quadrilatère forment une involution, dont font partie les couples de droites rectangulaires PA et PA', PB et PB', PC et PC'. Donc deux rayons conjugués quelconques sont rectangulaires. Le lieu des centres des courbes S est donc la droite joignant les milieux des diagonales du quadrilatère (Théorème de Newton).

Les trois circonférences décrites sur AA', BB', CC' comme diamètres passent par les pieds H_1, H_2, H_3 des hauteurs du triangle ABC ; l'orthocentre H de ce triangle est évidemment d'égale puissance par rapport aux trois cercles. Donc ceux-ci ont un même axe radical PH, coupant ces cercles en un second point P' et l'on a $HP \cdot HP' = HA \cdot HH_1$. (J. N.)

NOTE SUR LE RAYON DE COURBURE ;

par M. C. WASTRELS, professeur agrégé.

1. THÉORÈME I. Si l'on mène la tangente en un point M d'une courbe et que, d'un point M' de celle-ci voisin du premier, on abaisse sur la tangente la perpendiculaire $M'T = \delta$, on aura, en désignant par t la distance MT et par ρ le rayon de courbure en M :

$$2\rho = \lim \frac{t^2}{\delta}.$$

Ce théorème, bien connu, se démontre sans peine en observant que le cercle de courbure en un point d'une courbe est la limite des cercles tangents à la courbe en ce point et passant par un second point de la courbe, qui se rapproche indéfiniment du premier.

2. On en déduit facilement que si la droite M'T rencontre MT sous un angle ω, on a

$$2\rho = \frac{1}{\sin\omega} \lim \frac{t^2}{\delta}.$$

3. *Application aux coniques.* 1° *Conique à centre.* En rapportant la courbe à deux diamètres conjugués, son équation prend la forme :

$$\frac{x^2}{a'^2} \pm \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

La droite OM étant prise pour axe des x, on aura, en prenant pour l'angle ω celui des diamètres conjugués :

$$2\rho_M = \frac{1}{\sin\omega}\lim\frac{y^2}{\pm(a'-x)} = \frac{b'^2}{a'^2\sin\omega}\lim\frac{a'^2-x'^2}{a'-x},$$

pour x tendant vers a' ; d'où

$$\rho_M = \frac{b'^2}{a'\sin\omega} = \frac{b'^2}{d},$$

d étant la distance du point M au diamètre parallèle à la tangente en ce point (Théorème de Ch. Dupin).

2° *Paraboles.* La courbe étant rapportée au diamètre passant par M et à la tangente en ce point a une équation de la forme :

$$y^2 = 2p'x.$$

Si ω est l'angle des axes de coordonnées, on a :

$$2\rho_M = \frac{1}{\sin\omega}\lim\frac{y^2}{x} = \frac{2p'}{\sin\omega}\ ;\quad \text{d'où}\quad \rho_M = \frac{p'}{\sin\omega}.$$

Or, on sait que p' exprime le double de la distance du point M à la directrice ; on conclut aisément de là que le rayon de courbure est double de la portion de la normale comprise entre la courbe et la directrice.

4. On démontre encore sans peine, au moyen de la formule du n° 2, que les rayons de courbure en deux points d'une conique sont proportionnels aux cubes des tangentes menées en ces points, ces tangentes étant comptées depuis leur point d'intersection jusqu'à la courbe (*).

5. Théorème II. Si, dans une conique, on mène la corde MN = n, faisant avec la tangente en M l'angle ω, et qu'on désigne par k le rapport constant des produits des segments déterminés par la conique sur

---

(*) La propriété en question peut encore être considérée comme un cas particulier du théorème suivant : Si l'on considère deux points correspondants M et M' de deux figures homologiques, et qu'on mène en ces points les tangentes, se coupant en S sur l'axe d'homologie, on a :

$$\frac{\rho_M}{\rho_{M'}} = \pm\lambda\left(\frac{MS}{M'S}\right)^3,$$

λ étant le coefficient d'homologie.

des parallèles à la tangente et à la corde en M menées par un point quelconque (les segments étant comptés à partir de ce point), on a :

$$2\rho_M = \frac{n}{\sin\omega} k.$$

En effet, menons la droite M'T (définie comme au n° 2), parallèlement à MN, et soit N' le second point de rencontre de la droite TM' avec la conique; on aura

$$2\rho = \frac{1}{\sin\omega} \lim \frac{\overline{MT}^2}{M'T} = \frac{1}{\sin\omega} \lim \frac{\overline{MT}^2}{TM'.TN'} \cdot \lim TN' = \frac{k.n}{\sin\omega};$$

car la quantité $\frac{\overline{MT}^2}{TM'.TN'}$ est constante et est égale à k.

6. *Cas particulier*. Si MN est la normale, on a

$$2\rho = k.n.$$

Conséquences. 1° Si M_1 est un point de la conique où la tangente est perpendiculaire à la tangente en M, et qu'on désigne par S le point de rencontre de ces deux droites, on a

$$2\rho = n\left(\frac{MS}{M_1S}\right)^2.$$

2° Si la courbe a un centre et qu'on désigne par a' et b' les demi-diamètres parallèles à la tangente et à la normale en M, on peut écrire

$$2\rho = n\left(\frac{a'}{b'}\right)^2.$$

3° S'il s'agit d'une hyperbole et qu'on désigne par α et α' les angles que les asymptotes font avec la normale en M, on a

$$k = \pm \operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tang}\alpha';$$

par suite

$$2\rho = \pm n \operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tang}\alpha'.$$

7. *Application*. Dans l'hyperbole équilatère, les asymptotes sont à angle droit, et par suite

$$\pm \operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tang}\alpha' = 1; \quad \text{d'où} \quad 2\rho = n.$$

La formule

$$2\rho = n\left(\frac{a'}{b'}\right)^2$$

conduit au même résultat; en effet, $2b'$ est le symétrique, par rapport à l'axe transverse, du diamètre conjugué de $2a'$; par suite $a' = b'$.

Ainsi, ***dans l'hyperbole équilatère, le rayon de courbure est la moitié du segment de la normale compris entre ses deux points d'intersection avec la courbe.***

Cette nouvelle analogie de l'hyperbole équilatère avec le cercle est à remarquer(*).

BIBLIOGRAPHIE ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

Nomographie. *Les calculs usuels effectués au moyen des abaques.* Essai d'une théorie générale. Règles pratiques. Exemples d'application, par M. D'OCAGNE, ingénieur des ponts et chaussées. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1891. Un volume gr. in-8° de 96 pages avec 38 figures dans le texte et huit planches. Prix : fr. 3,50.

Tout le monde sait comment on peut remplacer une table à simple entrée, telle que des logarithmes ou des carrés des nombres par la représentation graphique de la courbe ayant pour équation $y = \text{Log}\, x$, ou $y = x^2$. Mais on connaît moins les procédés imaginés pour remplacer, par des tableaux graphiques ou *abaques*, les tables à double entrée, telles que les tables de multiplication ou de fonctions elliptiques.

Les principes généraux relatifs à la représentation graphique des relations entre trois variables semblent dus à Terquem, à Lalanne, Massau, Lallemand et à M. d'Ocagne lui même. Ce dernier a fait, dans le livre que nous annonçons ici, un exposé systématique de la théorie des abaques, à la fois clair et substantiel, où les divers procédés employés avant lui sont rapprochés et fondus en un corps de doctrine auquel il a donné le nom de *Nomographie*. La théorie est éclaircie au moyen d'exemples empruntés à la pratique courante, notamment à celle de l'ingénieur.

Nous avons donné une analyse étendue de la *Nomographie* dans la livraison d'octobre 1891, de la *Revue des questions scientifiques*. La place nous manque pour la reproduire ici et nous y renvoyons le lecteur. Contentons-nous de quelques indications sommaires sur le principe le plus général de la représentation géométrique de relations de la forme $c = \text{F}(a, b)$, soit en coordonnées cartésiennes (Massau), soit en coordonnées tangentielles (d'Ocagne).

Si l'on pose $a = f(x, y)$, $b = \varphi(x, y)$, on trouvera $c = \psi(x, y)$. Donnons à a, b, c, les valeurs successives 1, 2, 3, etc. et dessinons les trois séries de courbes

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 1, \quad f(x, y) = 2, \quad f(x, y) = 3, \text{ etc}; \\ \varphi(x, y) &= 1, \quad \varphi(x, y) = 2, \quad \varphi(x, y) = 3, \text{ etc}; \\ \psi(x, y) &= 1, \quad \psi(x, y) = 2, \quad \psi(x, y) = 3, \text{ etc}, \end{aligned}$$

(*) Comparer, au sujet des n^os^ 4 et 7, *Mathesis*, (1), II, 25-29, VI, 12-13.

dont chacune est dite une courbe *isoplèthe* (c'est-à-dire une courbe où le paramètre a, b, ou c a une seule et même valeur). L'abaque est le tableau graphique de ces trois séries d'isoplèthes. Le point d'intersection de deux des premières isoplèthes

$$f(x, y) = 2 \quad \text{et} \quad \varphi(x, y) = 3,$$

par exemple, tombera, ou bien sur une troisième isoplèthe, par exemple, sur

$$\psi(x, y) = 1,$$

ou entre deux de celles-ci, soit, pour fixer les idées, entre

$$\psi(x, y) = 7 \quad \text{et} \quad \psi(x, y) = 8.$$

D'après la théorie de l'élimination, dans le premier cas, $c = F(2, 3)$ est égal à 1; dans l'autre $c = F(2, 3)$ est compris entre 7 et 8, et en se laissant guider par le sentiment de la continuité, on pourra estimer à vue la valeur approximative (7 + une fraction) qui est égale à F (2, 3).

Si l'on suppose que x, y sont des coordonnées parallèles d'une droite, c'est-à-dire les distances (prises avec les signes + ou —) à deux origines fixes de ses points d'intersection avec deux axes parallèles, tout ce qui précède peut s'interpréter d'après le principe de dualité, comme on l'imagine aisément.

M. d'Ocagne expose le principe des abaques cartésiens, avec des exemples, des modifications et des simplifications, dans ses chapitres I, II, III ; celui des abaques tangentiels, dans le chapitre IV ; les deux chapitres suivants contiennent des notions sur des procédés de représentation des relations contenant plus de trois variables.

Le livre de M. d'Ocagne est surtout destiné aux ingénieurs ; « mais nous le recommandons aussi aux professeurs de mathématiques qui ne peuvent oublier que pendant deux mille ans, d'Euclide à Sluse, on a résolu, graphiquement surtout, les équations du deuxième, du troisième, et du quatrième degré. »

P. M.

Estudios críticos sobre la generación de los conceptos matemáticos, par D. Zoel García de Galdeano, cathedrático de la Universidad de Zaragoza. Madrid, Fontanet, 1890 (39 + 99 p. in-12). Prix : 1 fr. + 2 fr. 50.

La première de ces études est un résumé historique de l'évolution des concepts mathématiques, la seconde traite du développement de la géométrie euclidienne jusque dans les temps modernes. L'une et l'autre semblent écrites avec une compétence parfaite et renferment de précieuses indications historiques et critiques(*). Voici quelques-uns des noms cités dans le premier de ces opuscules : Descartes, Roberval, Fermat, Pascal ; Newton, Leibniz ; Euler, d'Alembert, Lagrange ; Cauchy.

(*) Dans la première, nous devons signaler une petite erreur : Lagrange est donné comme étant un mathématicien français. En réalité, il était italien et avant son départ de Turin pour Berlin, il avait déjà fait la plupart de ses grandes découvertes en analyse et en mécanique analytique. Nous croyons aussi que les célèbres *Réflexions* de Poinsot, qui, au fond, ne contiennent aucun résultat nouveau, ont été sans influence sur le développement de l'arithmétique supérieure.

Legendre, Abel, Jacobi; Puiseux, Liouville, Hermite, Briot et Bouquet, Riemann; Gauss, Dirichlet, Kummer, Kronecker, Dedekind; Cramer, Waring, Vandermonde. Bézout, Binet; Galois, Bertrand, Serret, Jordan; Boole, Cayley, Sylvester, Aronhold, Clebsch, Brioschi; Euclide, Archimède, Apollonius, Desargues, Grégoire de S. Vincent, La Hire, Monge, Poncelet, Moebius, Chasles, von Staudt; Hamilton, Grassmann; Lobatschewsky, Bolyai, Beltrami, Helmholtz; Weierstrass, Lipschitz, etc., etc.

Tratado de Algebra, par D. Z G. DE GALDEANO. Parte primera. Tratado elemental Madrid, Juste, 1883 (335 p. in-8°). Prix : 10 francs.

Ce volume contient les notions et les principes fondamentaux du calcul algébrique, la théorie des combinaisons, les principes de la théorie des déterminants, quelques notions sur la théorie des séries et des fractions continues, la théorie des fonctions exponentielles, logarithmiques et circulaires, la théorie générale des opérations d'après Hankel et son application à la théorie des quaternions, la résolution des équations du premier et du second degré, celle des équations binômes, des congruences du premier degré et des congruences binômes, la théorie des inégalités.

Dans cet ouvrage, comme dans ses autres manuels, le savant professeur de Saragosse expose les matières dont il traite avec beaucoup de clarté et en tenant compte des recherches les plus récentes (D'après G. TEIXEIRA, *J. de sciencias mathematicas e astronomicas*, 1891, t. X, p. 48).

Geometria elemental, conforme con el desarollo actual de las theorias modernas, par D. Z. G DE GALDEANO. Segunda edición, considerablemente corregida y aumentata. Toledo, Menor Hermanos, 1888 (2 v. in-8° de 128 et 378 p. avec fig. dans le texte). Prix : 10 francs.

L'ouvrage consacré par M. de Galdeano à la Géométrie élémentaire contient non-seulement les matières traitées habituellement dans les manuels analogues, mais encore beaucoup de questions d'une nature plus relevée. Ces matières sont arrangées dans un ordre original et étudiées d'une manière approfondie en deux vol umes contenant l'un la théorie de l'égalité géométrique, l'autre celle de la proportionnalité.

Dans le premier volume, on trouve les définitions et les principes généraux, la théorie des figures rectilignes dans le plan et dans l'espace, celle des figures circulaires planes et enfin les propriétés des corps ronds.

Le second volume contient d'abord une théorie générale de la proportionnalité et son application à la mesure des grandeurs (arcs, angles, aires, volumes, etc.). Suit l'étude de la proportionnalité entre les éléments des figures planes, puis des figures dans l'espace.

Dans tout l'ouvrage, l'auteur ne sépare pas la géométrie plane de la géométrie solide, mais fait suivre chaque section de la première, de la section correspondante de la seconde, de manière à rapprocher les théorèmes analogues Notons encore que dans chaque chapitre du livre, les propriétés métriques des figures sont nettement séparées de leurs propriétés de position.

Pour donner une idée du point de vue moderne dans lequel est conçu le livre de M. de Galdeano, il suffit d'observer que l'on y fait la distinction du système euclidien et des systèmes non euclidiens, et qu'on y trouve les théories de l'homographie, de l'homologie, de l'involution, des polaires réciproques, et d'autres importantes aussi dans la science de notre époque. (D'après G. Teixeira, *J. de Sc. math. e astr.*, 1891, t. X, p. 49).

G. Lazzeri et A. Bassani, professori nella R. Accademia Navale. ***Elementi di Geometria. Libro di testo par la R. Accademia Navale.*** Livorno, R. Giusti, 1891 (un vol. in 8° de XIX-455 p. avec figures dans le texte). Prix : 6 francs.

Dans les Éléments de MM. Lazzeri et Bassani les diverses théories géométriques sont traitées avec ordre, rigueur et clarté. En rapprochant dans leur livre les parties correspondantes de la planimétrie et de la stéréométrie, les auteurs du nouveau manuel ont amélioré ou simplifié les démonstrations et en ont mieux fait saisir les idées fondamentales. L'ouvrage est divisé en cinq livres, suivis respectivement de 71, 237, 311, 235, 227 (en tout 1081) exercices.

Le premier livre contient cinq chapitres, dont le premier traite des définitions et des postulats relatifs à la droite et au plan; le second, des définitions et des postulats relatifs aux segments, aux angles, aux dièdres, à l'addition et à la soustraction de ces grandeurs; le troisième, des premières notions sur le cercle et la sphère; le quatrième, des droites et des plans parallèles; le cinquième, des droites et des plans perpendiculaires et des figures symétriques.

Le second livre est divisé en quatre chapitres. 1 Polygones. 2. Angles polyèdres 3. Polyèdres. 4. Distances.

Le troisième livre contient six chapitres. 1. Relation d'une droite, d'un angle ou d'un cercle avec un cercle; d'un plan ou d'une sphère avec une sphère. 2. Circonférence (ou sphère) passant par des points ou tangente à des droites (ou plans). Polygones et polyèdres réguliers. 3. Systèmes de cercles et de sphères. 4. Homothétie directe, affine, inverse. 5. Géométrie de la sphère. 6. Cône et cylindre.

Le quatrième livre traite d'abord de l'équivalence en général; de celle des polygones et des surfaces polyédriques; des polygones sphériques et des pyramides sphériques: des prismes. Les chapitres suivants sont consacrés à la théorie des limites, à celle de l'équivalence des polyèdres, du cercle, du cylindre, du cône, de la sphère et du tore (surface et volume).

Le dernier livre est divisé en quatre chapitres. 1. Théorie des proportions. 2. Figures semblables 3 Mesure des figures. 4. Quelques applications de l'algèbre à la géométrie plane et solide.

Quelques définitions et considérations relatives aux postulats peuvent donner lieu à des critiques.

L'exécution typographique du livre est soignée et les figures sont très nettes. (D'après F. Giudice, dans la *Rivista di Matematica* de Peano, 1891, t. I, pp 160-162.)

Leçons d'Algèbre à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques Spéciales et des candidats aux écoles du gouvernement par A. Amigues, ancien élève de l'École normale supérieure, Professeur de Mathématiques Spéciales et chargé d'un cours complémentaire à la Faculté des Sciences de Marseille. Paris, F. Alcan, 1890. (in-8° de VIII-698 p.). — Prix : 10 fr.

Ouvrage analogue aux manuels de MM. de Longchamps et Niewenglowski, écrits dans le même esprit de rigueur et enrichi aussi d'exercices à la fin de chaque chapitre. Voici un extrait de la table des matières.

I. *Compléments d'algèbre élémentaire.* 1. Inégalité et identités. 2-4. Puissances, division, racines des polynômes. 5. Des équations en général. 7. Equations linéaires. 6-8 Déterminants.

II. *Éléments d'analyse infinitésimale.* 1. Limites et nombres incommensurables. 2. Calcul des valeurs arithmétiques des radicaux. 3. Des fonctions en général et de l'exponentielle. 4. Séries. 5. Le nombre *e*. 6. Logarithmes. 7. Infiniment petits. 8-12. Recherche des dérivées. 13. Série de Taylor. 14. Vraies valeurs. 15. Variation d'une fonction. 16. Extension de la formule de Taylor aux fonctions de plusieurs variables; conséquences. 17-18. Formes algébriques; formes quadratiques. 19. Intégrale définie. 20. Intégrales indéfinies. 21. Calcul des intégrales définies et applications à la recherche des aires.

III. *Théorie des équations.* 1. Calcul des imaginaires. 2. Plus grand commun diviseur. Éliminant d'Euler. 3-5 Toute équation a une racine (dém. de Walecki); conséquences immédiates. 6. Fonctions symétriques. 7. Élimination (par les fonctions symétriques; méthode de Bézout). 8. Racines égales. 9-10. Abaissement et transformation des équations. 11-14. Théorèmes de Descartes, de Rolle et de Sturm. 15. Limites des racines. 16. Racines commensurables. 17. Séparation des racines. 18. Des différences. 19. Méthodes d'approximation. 20. Fractions continues. 21-22. Résolution des équations par radicaux (3e et 4e degré). 23. Fractions rationnelles. 24. Questions diverses.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Questions 317 et 318.

(Voir *Mathesis*, (1), IV, p. 71.)

317. *Les droites qui joignent les sommets d'un triangle fixe* ABC *à un point quelconque* O *rencontrent les côtés opposés en trois points* A′, B′, C′. *Par ceux-ci et par deux points fixes* D, E *on fait passer une conique qui rencontre les côtés de* ABC *en trois nouveaux points* A″, B″, C″; *les droites* AA″, BB″, CC″ *se coupent en un même point* O′. *Les points* O, O′ *satisfont à une transformation birationnelle réversible, qu'on demande de décomposer en trois transformations quadratiques.* (J. Neuberg.)

×**318**. *La conique* A'B'C' DE *étant remplacée par le cercle* **A'B'C'** *et le point* O *parcourant la circonférence* ABC, *trouver le lieu décrit par* O'.

(J. GILLET.)

Solution analytique. Nous reproduisons ici la solution que nous avons publiée dans les *Wiskundige Opgaven*.

Soient $(\alpha, \beta, \gamma), (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\lambda, \mu, \nu), (\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ les coordonnées des points O, O', D, E par rapport au triangle de référence ABC. Représentons la conique A'B'C'. A''B''C'' par l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0.$$

Si l'on fait $z = 0$, on trouve l'équation des droites CC', CC'' sous la forme

$$Ax^2 + 2B''xy + A'y^2 = 0;$$

en l'identifiant avec l'équation

$$\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\alpha_1} - \frac{y}{\beta_1}\right) = 0,$$

on obtient

$$A : A' : 2B'' = \frac{1}{\alpha\alpha_1} : \frac{1}{\beta\beta_1} : -\left(\frac{1}{\alpha\beta_1} + \frac{1}{\alpha_1\beta}\right).$$

En continuant ainsi, on voit que l'équation de la courbe est

$$\mathbf{S}\frac{x^2}{\alpha\alpha_1} - \mathbf{S}xy\left(\frac{1}{\alpha\beta_1} + \frac{1}{\alpha_1\beta}\right) = 0, \qquad (A)$$

avec les conditions

$$\mathbf{S}\frac{\lambda^2}{\alpha\alpha_1} - \mathbf{S}\lambda\mu\left(\frac{1}{\alpha\beta_1} + \frac{1}{\alpha_1\beta}\right) = 0, \qquad (1)$$

$$\mathbf{S}\frac{\lambda_1^2}{\alpha\alpha_1} - \mathbf{S}\lambda_1\mu_1\left(\frac{1}{\alpha\beta_1} + \frac{1}{\alpha_1\beta}\right) = 0. \qquad (2)$$

Soient ω, ω' les points qui ont pour coordonnées

$$\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right), \left(\frac{1}{\alpha'}, \frac{1}{\beta'}, \frac{1}{\gamma'}\right);$$

on les déduit des points O, O' par une transformation quadratique, par exemple par inversion triangulaire si l'on adopte des coordonnées normales. Les égalités (1) et (2) expriment que ω' est à l'intersection des polaires de ω par rapport à deux coniques ayant pour équation

$$\mathbf{S}\lambda^2x^2 - 2\mathbf{S}\lambda\mu xy = 0, \quad \mathbf{S}\lambda_1^2x^2 - 2\mathbf{S}\lambda_1\mu_1xy = 0; \qquad (3)$$

ces courbes touchent les côtés du triangle ABC en des points qui se déduisent facilement des points D, E.

Si nous rapportons les coniques (3) à leur triangle autopolaire commun, elles ont pour équations

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = 0, \quad L'x^2 + M'y^2 + N'z^2 = 0,$$

et les conditions (1) et (2) sont de la forme

$$L\alpha\alpha_1 + M\beta\beta_1 + N\gamma\gamma_1 = 0, \quad L'\alpha\alpha_1 + M'\beta\beta_1 + N'\gamma\gamma_1 = 0. \qquad (4)$$

On déduit de (4)

$$\frac{\alpha\alpha_1}{MN' - M'N} = \frac{\beta\beta_1}{NL' - N'L} = \frac{\gamma\gamma_1}{LM' - L'M},$$

formules qui définissent une transformation quadratique.

Voici une autre démonstration. Soient

$$Fyz + Gzx + Hxy = 0, \quad fx + gy + hz = 0,$$

les équations de la conique ABCDE et de la droite DE. L'équation (A) doit être identique avec la suivante :

$$Fyz + Gzx + Hxy + (fx + gy + hz)(f'x + g'y + h'z) = 0;$$

d'où les égalités

$$ff' = \frac{\rho}{\alpha\alpha_1}, \quad gg' = \frac{\rho}{\beta\beta_1}, \quad hh' = \frac{\rho}{\gamma\gamma_1},$$

$$F + gh' + g'h = -\rho\left(\frac{1}{\beta\gamma_1} + \frac{1}{\beta_1\gamma}\right), \ldots,$$

ρ étant un facteur de proportionalité. Si l'on élimine entre ces égalités les quantités auxiliaires f', g', h', on obtient

$$\frac{H}{fg} = -\rho\left(\frac{1}{g\beta} + \frac{1}{f\alpha}\right)\left(\frac{1}{g\beta_1} + \frac{1}{f\alpha_1}\right), \ldots \qquad (5)$$

Ces formules montrent que les points ω, ω' satisfont à une transformation quadratique dont le triangle principal a pour côtés les droites ayant respectivement pour équation

$$\frac{x}{f} + \frac{y}{g} = 0, \quad \frac{y}{g} + \frac{z}{h} = 0, \quad \frac{z}{h} + \frac{x}{f} = 0.$$

Si le point O décrit une conique circonscrite au triangle ABC, les coordonnées de O vérifient une équation de la forme

$$\frac{L}{\alpha} + \frac{M}{\beta} + \frac{N}{\gamma} = 0, \qquad (6)$$

En éliminant α, β, γ entre les équations (5) et (6), on trouve pour le lieu du point O' :

$$\begin{vmatrix} 0 & L & M & N \\ \dfrac{F}{\alpha_1(g\beta_1 + h\gamma_1)} & 0 & \dfrac{1}{g} & \dfrac{1}{h} \\ \dfrac{G}{\beta_1(h\gamma_1 + f\alpha_1)} & \dfrac{1}{f} & 0 & \dfrac{1}{h} \\ \dfrac{H}{\gamma_1(f\alpha_1 + g\beta_1)} & \dfrac{1}{f} & \dfrac{1}{g} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce lieu est donc une courbe du quatrième ordre.

NOTE. Des solutions analogues nous ont été adressées par MM. LEMOINE, GOB et DÉPREZ.

Une solution fort instructive, purement synthétique, a été publiée par M. SCHOUTE dans les *Wiskundige opgaven* (*tweede deel*, question 148). Nous regrettons que son étendue ne nous permette pas de la reproduire en entier. L'auteur substitue aux points D, E les points cycliques, de sorte que les coniques ABC A'B'C' deviennent des cercles. Alors la transformation est du huitième degré ; elle a pour points fondamentaux quadruples les sommets du triangle ABC, et pour points fondamentaux doubles les sommets du triangle $A_1B_1C_1$ ayant pour côtés les parallèles menées par A, B, C aux droites BC, CA, AB. (J. N.)

Question 723.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 128.)

Soient CA, CB *deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse, et* F *l'un des foyers ; on construit le parallélogramme* FAVB. *Démontrer* 1° *que la droite* CV *est dirigée suivant la bissectrice de l'angle* AVB ; 2° *que* $CV^2 = 2VA.VB$; 3° *que le lieu du point* V *est une ellipse quand on fait varier le système des diamètres conjugués. — Étendre ces propriétés à l'hyperbole.* (LAISANT.)

Solution par M. GENESE (Aberystwyth). On a l'identité

$$(C + \alpha + \beta)^2 = C^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 2C(\alpha + \beta) + 2\alpha\beta.$$

Si l'on y fait $\alpha^2 + \beta^2 = C^2$, on obtient

$$(C + \alpha + \beta)^2 = 2(C + \alpha)(C + \beta).$$

Soient, maintenant, C. α, β les *lignes dirigées* FC, CA, CB.

Alors on a les équipollences

$$C + \alpha = FA, C + \beta = FB, C + \alpha + \beta =$$
$$(C + \alpha) + (C + \beta) - C = FA + FB - FC = FV - FC = CV.$$

Donc

$$CV^2 = 2FA.FB = 2BV.AV,$$

ce qui démontre deux parties de la question. On voit, en passant, que l'analyse démontre également que $FT^2 = 2FA.FB$, T étant le pôle de AB.

Les diagonales FV, AB ont même milieu, et l'on sait que le milieu de AB décrit une ellipse. Donc le point F décrit une courbe homothétique, c'est-à-dire une ellipse.

Dans une hyperbole,

$$\alpha^2 - \beta^2 = C^2;$$

donc

$$(C + \alpha + \beta)^2 = 2(\alpha + \beta)(\alpha + C).$$

Les tangentes en A, B (bien-entendu, la seconde, à l'hyperbole conjuguée) vont se rencontrer en L sur une asymptote, et l'on a l'équipollence

$$FL^2 = 2CL.FA.$$

De là, on conclut que, si $LL' = 2CL$, les triangles FLL', AFL sont semblables.

Solution d'après MM. Déprez et Decamps. Construisons le parallélogramme ACBM. Les deux triangles CAV, MBF ayant les côtés VA et BF, AC et MB égaux et parallèles sont égaux; donc l'angle AVC $= BFM = \frac{1}{2} BFA = \frac{1}{2} AVB$, et par suite, VC est la bissectrice de l'angle AVB.

Les droites VC, MF étant égales et parallèles, les lignes VM, CV sont égales et parallèles. Or, d'après un théorème connu, le point M décrit une ellipse semblable à l'ellipse proposée; donc V décrit une ellipse, égale à celle que décrit M.

Les coordonnées des points A et B sont $(a \cos \varphi, b \sin \varphi)$, $(-a \sin \varphi, b \cos \varphi)$, et celles du point M sont $[a(\cos \varphi - \sin \varphi), b(\sin \varphi + \cos \varphi)]$.

On en conclut

$$\overline{VC}^2 = \overline{MF}^2 = [c - a(\cos \varphi - \sin \varphi)]^2 + b^2(\sin \varphi + \cos \varphi)^2$$
$$= 2(a - c \cos \varphi)(a + c \sin \varphi) = 2FA.FB = 2VB.VA.$$

Soient maintenant CA, CB deux diamètres d'une hyperbole, le premier rencontrant la courbe. Construisons les parallélogrammes FAVB, CAMB; on sait que le point M appartient à une asymptote. Les droites AF, AC étant respectivement parallèles à BV, MB, MV est égale et parallèle à FC; donc V décrit une ligne parallèle à l'asymptote CM et passant par le second foyer F'.

La droite FM est la bissectrice de l'angle formé par les rayons joignant F aux points de contact des tangentes issues de M; donc elle fait des angles égaux avec FA et une parallèle à CM par F.

Il suit de là que sa parallèle CV est la bissectrice de l'angle F'VB.

Les coordonnées de A sont de la forme a séc φ, b tg φ; on en conclut que celles de B sont a tg φ, b séc φ; par suite, celles de M sont a (séc φ + tg φ), b (séc φ + tg φ). On en conclut

$$CV^2 = \overline{FM}^2 = [a\ (\text{séc}\ \varphi + \text{tg}\ \varphi) - c]^2 + b^2\ [\text{séc}\ \varphi + \text{tg}\ \varphi]^2$$
$$= 2c\ (\text{séc}\ \varphi + \text{tg}\ \varphi)\ (c\ \text{séc}\ \varphi - a) = 2AV.\ F'V.$$

M. Déprez étend aussi le théorème de M. Laisant à l'ellipse sphérique.

QUESTIONS D'EXAMEN.

509. On appelle *déviation* en un point d'une ellipse l'angle compris entre la tangente en ce point et la tangente au point correspondant du cercle principal. Trouver la déviation maxima.

Les coefficients angulaires des deux tangentes sont m et $\frac{b}{a}m$; d'où la tangente de la déviation

$$= \frac{m\left(1 - \frac{b}{a}\right)}{1 + \frac{b}{a}m^2} = \frac{1 - \frac{b}{a}}{\frac{1}{m} + \frac{b}{a}m}.$$

Le maximum correspond à $\frac{1}{m} = \frac{b}{a}m$.

510. Si $(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)$ est une solution de l'équation

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots + p_n = 0,$$

on a

$$p_1 \sin\alpha + p_2 \sin 2\alpha + \cdots + p_n \sin n\alpha = 0.$$

(W. J. Greenstreet.)

511. Quelle est la courbe représentée par l'équation

$$\arccos x + \arccos y = \alpha ?$$

512. Trouver un nombre entier N, sachant que la somme des N premiers nombres entiers est un nombre composé de trois chiffres égaux. — *Rép.* N = 36 (*J. de Vuibert*).

513. Si a et b sont deux nombres premiers entre eux, les deux expressions $11a + 2b$ et $18a + 5b$ sont à la fois divisibles ou non divisibles par 19; elles ne peuvent avoir d'autre facteur commun que 19.

(*J. de Vuibert.*)

QUESTIONS PROPOSÉES.

747. Soient λ, λ' les angles sous lesquels on voit d'un même point d'une ellipse, deux diamètres conjugués quelconques. Démontrer que la somme $\cot^2\lambda + \cot^2\lambda'$ est constante.

×748. Démontrer que l'égalité de deux des rapports

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin 2\alpha - \sin\frac{1}{2}(2\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\frac{1}{2}(2\alpha-\beta-\gamma)},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\sin 2\beta - \sin\frac{1}{2}(2\beta+\gamma+\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(2\beta-\gamma-\alpha)},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin 2\gamma - \sin\frac{1}{2}(2\gamma+\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(2\gamma-\alpha-\beta)},$$

entraîne celle des trois rapports. (Richardson.)

749. On donne deux cercles de même centre O. Par un point fixe A du cercle extérieur, on mène une sécante quelconque, rencontrant le cercle intérieur en N, N' et le cercle extérieur en P. Trouver le lieu du point M où la droite ON coupe la tangente menée en P au cercle extérieur. (Mandart.)

750. Une parabole cubique représentée par l'équation

$$x = a + by + cy^2 + dy^3$$

passe par les points A, B qui ont pour ordonnées β, β'. Les tangentes en ces points, la corde AB et la courbe coupent l'axe des x aux points T, S, U, V. Démontrer que le point V est le centre de gravité des points T, S, U pour des masses proportionnelles à β'^2, β^2, $-2\beta\beta'$. (Laisant.)

TABLE DES MATIÈRES(*).

ARITHMÉTIQUE ; ANALYSE INDÉTERMINÉE.

Pages.

Sur les théorèmes énoncés par Fermat, Euler, Wilson, v. Staudt et Clausen ; par M. Ed. Lucas 9

×Soustraction des nombres fractionnaires ; par M. E Gelin 92, 110

×Question 532 ; solution par M. Emmerich 95

×Question 703 ; solutions par MM. E. Gelin et Emmerich 124, 138

Question 412 ; solution par M. G. Teixeira 143

×Question 720 ; solutions par MM. E. Lemoine, Denys, etc. 175

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

×Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient (P. M.) . 35, 63, 113, 139, 246

×Problème du puits ; par M. E. Gelin 111

×Problème de l'héritage ; par MM. E. Gelin, Catalan, Mister, Finck. 111, 136, 187

Théorème de Choquet (P. M.) 218

×Sur un théorème de M. Sharp ; par M. E. Catalan 245

×Question 605 ; solution d'après MM. Ch. de La Vallée-Poussin et Vladimirescu. 23

Question 680 ; solution d'après MM. Baudran et Lalisse 24

×Question 688 ; solution par MM. Joachimescu, Lalisse, etc. 25

×Question 700 ; solutions par MM. Kluyver, Lalisse, etc. 49

Question 676 ; solution par M. Laisant 98

Question 655 ; solution par M. Kluyver 117

×Question 709 ; solution par M^lle de Haas, MM. Emmerich, Déprez, etc. . . 150

×Question 715 ; solutions par MM. Soons, Emmerich, etc. ; note de M. Catalan. 208. 245

×Question 718 ; solutions par MM. Déprez, Emmerich, etc. 210

×Question 721 ; solutions par MM. Déprez, Emmerich, etc. 213

×Question 716 ; solutions par MM. Mandart, Emmerich, etc. 236

×Question 497 ; solutions par MM. H. Brocard, Laisant, etc. 258

×Question 726 ; solution et généralisation par M. Laisant 259

×Question 738 ; solution par M. C. J. François 262

(*) Les articles marqués d'une croix n'exigent pour être compris que la connaissance des mathématiques élémentaires. Pour les rectifications, voir pp. 32, 50, 80, 152, 216, 264.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Pages.

Sur les quadrangles complets ; par M. J. Neuberg 33, 67, 81, 189
Surface et volume du tore ; par M. E. Gelin 66
Sur un problème de géométrie élémentaire ; par M. Sollertinsky 158
Formules relatives aux polygones réguliers ; par M. E. Gelin. Note de H. Brocard 160
Sur la distance de deux points ; par M. A. Poulain 184, 254
Sur les formules de la trigonométrie sphérique ; d'après M. Ed. Lucas . . 187
Théorèmes de géométrie ; par M Sollertinsky 221
Construction d'une troisième proportionnelle ; par M. Cl. Thiry 254
Quelques théorèmes sur le centre des moyennes distances d'un système de points ; par M. H. Van Aubel 255
Question 694 ; solution par MM. Decamps, Brocard, etc. 26
Question 696 ; solutions par MM^lles Pompilianu, de Haas, etc. 47
Question 697 ; solutions par MM^lles Pompilianu, de Haas, etc. 76
Question 698 ; solutions par MM. Laurens, Decamps, etc. 77
Question 706 ; solution par M. Déprez 126
Question 704, 708 ; solutions par MM. Delahaye, Emmerich, etc. 146
Question 705 ; solution par M. Sollertinsky 149
Questions d'examens de St. Cyr (1891) 164
Question 701 ; solution par MM. Cristesco, Mandart, etc. 203
Question 710 ; solution par MM. Déprez, Mandart, etc. 205
Question 713 ; solution par M^lle de Haas et M. Sollertinsky ; note de M. Catalan 208
Question 719 ; solutions par MM. E. Lemoine et Déprez. 211
Question 717 ; solutions par MM. Mandart, Déprez, etc. 238

COURBES ET SURFACES DU SECOND ORDRE ; GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

Questions de géométrie ; par M^me Prim 14
Sur les quadrangles complets ; par M. J. Neuberg 33, 67, 81, 189
Aire de l'ellipse microsphérique ; par M. C. E. Wasteels 83
Sur une correspondance de droites et de points ; par M. A. Poulain. . . . 88
Questions de géométrie projective ; par MM. d'Ocagne, Meurice, etc 90, 116, 265
Sur le théorème de Joachimsthal, par M. V. Jamet 105
Sur les foyers des coniques ; par M. Schoute 129
Sur la résolution des problèmes déterminés par la méthode des lieux géométriques ; par M. G. de Longchamps. 132
Propriétés de quadriques homothétiques de même centre ; par A. Mineur . . 138
Propriétés des coniques ; par M. Sollertinsky 177
Sur les moments d'inertie ; par M. J. Neuberg 226
Note sur le rayon de courbure ; par M. C. E. Wasteels 268
Question 414 ; solution par M. Anderson 41

Pages.
Question 667 ; solutions par MM. Déprez, Denys, etc. 42
Question 695 ; solutions par MM. Milne, Sohie, etc. 45
Question 689 ; solutions par MM. Laisant, Sohie, etc. 74
Question 590 ; solutions par MM. Servais et Demoulin 96
Quesion 675 ; solution par M. Liénard 98
Question 692 ; solution par M. Kluyver 100
Question 705 ; solution par M. Sollertinsky 149
Question d'examen de l'École navale de France 166
Question 685 ; solution par M. Kluyver 171
Question 714 ; solution par M. Déprez 173
Qnestion 711 ; solution par M. Liénard 206
Question 310 ; solution par M. J. Neuberg 226
Question 707 ; solution par M. Déprez 233
Question 722 ; solution par M. Verbessem 239
Questions 317 et 318 ; solution par M. Neuberg. 275
Question 723 ; solutions par MM. Genese, Déprez, etc. 278

COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Sur une classe particulière de triangles ; par M. H. Brocard 153
Sur certaines courbes du quatrième ordre, par M. Balitrand 241
Question 575 ; solutions par MM. Meurice, Mandart, etc. 21
Question 439 ; solutions par MM. Jeřábek et Neuberg 70
Question 418 ; solution par M. Servais 93
Question 678 ; solution par MM. Denys et Lalisse 99
Question 684 : solutions par MM. Déprez, Decamps, etc... 120
Question 702 ; solution par MM. Déprez et Hacken 123
Question 416 ; solution par M. Déprez 144
Question d'examen de l'École Polytechnique de Paris 196
Question 691 ; solution par M. V. Jamet 198, 255
Question 707 ; solution par M. Déprez 233

CALCUL DIFFÉRENTIEL ; CALCUL INTÉGRAL ; THÉORIE DES SÉRIES.

Sur le terme complémentaire de la série de Taylor ; par M. d'Ocagne . . . 19
Étude intrinsèque des coniques et des cassinoïdes : par M. E. Césaro . . . 51
Sur la courbure de la podaire et de la polaire réciproque d'une courbe donnée ;
par M. Cl. Servais ; note de M. d'Ocagne 84, 110
Courbes enveloppes et courbes tangentes (P. M). 92
Points caractéristiques (P. M.) 93
Sur le mouvement conchoïdal ; par M. E. Habich 110
Sur les lignes de force ; par M. C E. Wasteels 253
Note sur le rayon de courbure ; par M. C. E. Wasteels 268

Pages.
Question 670; solution par M. V. Jamet 169
Question 736; solution par MM. Decamps, Peters, etc. 261

BIBLIOGRAPHIE, BIOGRAPHIE, ETC.

Préface (Programme, nom et devise de Mathesis) 7
J. Casey (P. M. et J. N.) 13
Ed. Lucas (P. M. et J. N.) 217
C. Bergmans. Arithmétique (M. Stuyvaert) 17
Apollonii Pergei quae graece extant edidit Heiberg (P. M.) 39
M. de Lépinay. Compléments d'algèbre et notions de géométrie analytique (P. M.) 40, 141
Cl. Thiry. Théorème de Stewart et théorie du barycentre (J. N.) 109
H. Lacouture. Géométrie élémentaire (P. M.) 143
F. Verhelst. Cours d'Algèbre élémentaire (H. Gelin) 182
B. Niewenglowski. Cours d'Algèbre (P. M.) 182
E. Carvallo. Résolution numérique des équations (P. M.) 183
L. Thélie Géométrie élémentaire. Théorèmes et problèmes (M. Stuyvaert) . 222
E. Picard. Traité d'Analyse 224
Stoffaes. Cours de mathématiques supérieures (P. M.) 251
D. Loriga. Tres capitulos de Geometria superior 253
B. V. Moreira de Sa. Arithmetica 253
G. Frege. Function und Begriff 253
M. d'Ocagne. Nomographie (P. M.) 271
Z. de Galdeano. Generación de los conceptos matematicos 272
Z. de Galdeano. Algebra (d'après G. Teixeira) 273
Z. de Galdeano. Geometria elemental (d'aprés G. Teixeira) 273
G. Lazzeri e A. Bassani. Elementi di Geometria (d'après F. Giudice) . . 274
Amigues. Leçons d'Algèbre 275

QUESTIONS D'EXAMEN.

Questions 466-468, 469-470, 471-474, 475-489, 490-493, 494-497, 498-503 504-505, 506-508, 509-513 . . . . pp. 27, 50, 78, 101, 127, 214, 240, 263, 280,
Concours de Saint-Cyr (1891) (J. N.) 164
Concours de l'École Navale de France (1891) (J. N.) 166
Concours de l'École Polytechnique de Paris (1891) (J. N.) 197

SUPPLÉMENTS.

P. Mansion. Notes sur la géométrie euclidienne et sur la géométrie non euclidienne . . . . . pp. 1-32
C. Le Paige. Un astronome belge du XVII^e^ siècle. Godefroid Wendelin pp. 1-19
Cl. Thiry. Distances des points remarquables du triangle. . . . . pp. 1-8

QUESTIONS(*).

	POSÉE (1) I ou (2) I	RÉSOL. (2) I
17	30 (28)	
95	206 (28)	
	(1) III ou (2) I	
252	143 (28)	
267	175 (28)	
	(1) IV ou (2) I	
310	48	230
317	71	275
×318	71	276
×333	119 (29)	
×346	143	R
353	159	R
×356	159	R
×357	159	R
383	231 (29)	
387, 2e p.	231 (29)	
	(1) V ou (2) I	
411	23 (29)	
412	23 (29)	143
414	46	41
416	46	144
418	47	93
439	119	70
×497	280 (30)	258
	(1) VI ou (2) I	
505, 2e p.	(30)	
×513	71 (30)	
519	119 30)	
532	192 (30)	95
	(1) VII ou (2) I	
×571	126 (30)	R
575	148	21
590	240	96
594	264 (31)	
597	280	
598	280 (31)	

	POSÉE (1) VIII ou (2) I	RÉSOL. (2) I
×605	56	23
×634	279	R
×635	279 (31)	
	(1) IX ou (2) I	
643	88	R
655	172	117
667	264	42
670	280 (31)	168
	(1) X ou (2) I	
675	48, 278	98
676	48 (32)	80,98
×677	72	R
678	72	99
680	72	24
×681	95	R
684	128	120
685	128	171
×688	152	25
689	176	74
691	216	198,255
692	216	100
×694	216	26
695	240	45, 70
×696	240	47, 70
×697	264	76
698	264	77
699	279	R
×700	279	49
	(2) I	
×701	32, 79	203
702	32	123
×703	32	124
×704	50	146
705	50	149
706	50	126
707	80	233
×708	80	146
×709	80	150

	POSÉE (2) I	RÉSOL. (2) I
×710	80	205
711	80	206
×712	103	R
×713	104	208
714	104	173
×715	104	208
×716	104	226
×717	104	235
×718	104	210
×719	104	211
×720	104	175
×721	128	213
722	128	229
723	128	278
×724	128	R
×725	152	
×726	152	259
×727	152	R
728	152	
729	176	R
730	176	R
×731	176	
×732	176	R
733	215	R
734	216	R
735	216	R
736	216	261
×737	216	R
×738	216	262
739	240	R
×740	240	R
741	240	R
742	240	R
743	263	R
744	264	
×745	264	R
746	264	R
747	281	
×748	281	
749	281	
750	281	

(*) La rédaction de *Mathesis* a en portefeuille de bonnes solutions des questions marquées de la lettre R ; elle engage ses collaborateurs à porter de préférence leurs efforts sur les autres questions.

TABLE DES NOMS

Abel, 273.
Agnesi, 92.
Alembert (d') 272
Amigues, 218, 275.
Anderson, 41.
Anonyme, 76.
Anthony, 104, 175.
Apollonius, 39 273.
Archimède, 40, 273.
Aronhold, 273.
Balitrand, 241.
Bassani, 274.
Baudran, 24, 26, 70.
Belanger, 251.
Bellens, 76, 77, 126.
Beltrami, 273.
Bergmans, 17, 110
Bernoulli, 12.
Bertrand (J) 111, 218, 225, 273
Besso, 215.
Beyens, 45, 47, 76.
Bézout, 273, 275.
Binet, 273.
Bolyai, 273.
Bonnet (O.) 20.
Boole, 273.
Booth, 153, 157.
Bouquet, 273.
Bourrienne, 128
Bōzóky (de), 26, 49, 75, 76, 120, 238.
Brandza, 26, 48, 70, 75, 76.
Brasseur, 110.
Brioschi, 273.
Briot, 220, 273.
Brocard, 26, 32, 73, 99, 120, 123, 153, 198, 210, 213, 236, 255, 259, 262.
Budan, 183
Cambier, 32, 79, 201, 264.
Cantor, 225.
Carvallo, 183.
Catalan, 28, 30, 49, 66, 76, 136, 151, 176, 187, 216, 245, 259, 261.
Casey, 12, 42, 191.
Cauchy, 20, 219, 272.
Cayley, 225, 273.
Cesáro (E), 25, 29, 30, 31, 49, 51, 95, 119, 168
Chasles, 75, 178, 273.
Choquet, 218.
Clausen, 9.
Clebsch, 273.
Comberousse (de), 143, 218.
Cramer, 273.
Crelle, 132, 184, 189, 226.
Cremona, 266.
Cristesco, 25, 26, 47, 48, 75, 76, 123, 204, 205, 210, 211, 237, 238.
Darboux, 226.
Decamps, 25, 26, 47, 48, 76, 77, 120, 124, 126, 151, 173, 175, 205, 208, 213, 261, 278.
Dedekind, 273.
Delahaye, 146, 175, 205, 213.
Delambre 187.
Demoulin, 97.
Denys, 25, 26, 42, 99, 123, 151, 173, 175, 205, 213, 238.
Déprez, 26, 42, 50, 70, 73, 74, 77, 78, 120, 121, 123, 124, 126, 144, 149, 151, 173, 204, 205, 206, 208, 212, 213, 216, 233, 238, 259, 278, 279.
Desargues, 265, 273.
Descartes, 39, 183 273, 275.
Despeyrous, 226.
Dewulf, 21, 41, 93, 96, 144.
Dirichlet, 225, 273.
Dupin (Ch.). 225, 269
Duran Loriga, 253
Edwards, 104, 211.
Emmerich, 95, 126, 146, 151, 175, 205, 208, 210, 213, 236, 238.
Encke, 184.
Euclide, 40, 273
Euler, 9, 187, 225, 272, 275.
F. (F.), 77.
Faure, 231.
Fermat, 9, 40, 175, 272
Finck, 187.
Fourier, 225.
François, 47, 49, 76, 78, 146, 175, 205, 238, 242.
Frege, 253.
Galois, 273
Galdeano (Garcia de), 272, 273.
Gauss, 225, 273.
Gelin (E.), 66, 80, 92, 111, 124, 136, 160, 182, 240.
Genese 264, 278.
Gergonne, 148, 221, 222.
Gillet (J.), 275.
Giudice, 274.
Gob, 45, 68, 159, 278.
Gräfe, 184.
Grassmann, 273.
Greenstreet, 175, 208, 216, 236, 240, 262, 280.
Grégoire de St.-Vincent, 273.
Günther, 153.
Haas Mlle de), 46 47, 76, 78, 151, 205, 208, 213, 238.
Habich, 110
Hacken, 123.
Halley, 39.
Hamilton 273.
Hankel, 273.
Heiberg 39.
Helmholtz, 273.
Hermès, 122.
Hermite, 273.
Hesse, 226.
Huet, 255
Jacobi, 273.
Jamet, 104, 168, 198, 255, 264.
Jeřábek, 70, 76, 122
Joachimescu, 25, 75, 175, 209, 233, 261
Joachimsthal, 105, 225, 245.

Jordan, 273.
Keelhoff, 74, 77, 176, 262.
Kluyver, 49, 100, 117, 171.
Knops, 126.
Kronecker, 273.
Kummer, 273.
Lacouture, 142.
Lachlan, 152.
Lagrange, 184, 254, 272
Laguerre, 242.
Lahire, 273.
Laisant, 26, 45, 49, 74, 98, 128, 256, 258, 278, 281.
Lalanne, 119, 271.
Lalisse, 24, 25, 26, 43, 49, 70, 76, 77, 99
Lallemand, 271.
Laplace, 224
Laurens, 70, 77.
Lazzeri, 274.
Lebon, 103
Legendre, 273.
Leibniz, 272.
Lemoine, 31, 80, 119, 175, 205, 206, 211, 233, 235, 278.
Leudesdorff, 80, 150, 205.
Liénard, 21, 76, 78, 98, 173, 204, 206
Liouville, 87, 273.
Lipschitz, 273.
Lobatschewsky, 273.
Longchamps (de), 74, 80, 104, 132, 206, 216, 221, 275.
L'Hospital, 182, 218.
Lucas (Ed.), 9, 28, 100, 164, 187, 217.
M'Cay, 193.
Macé de Lépinay, 40, 141.
Maclaurin, 20, 53, 182.
Mac-Mahon, 30, 258.
Mandart, 21, 49, 50, 76, 126, 146, 148, 151, 175, 204, 205, 210, 237, 281
Mannheim, 77, 87.
Mansion, 35, 46, 63, 92, 93, 113, 139 158, 183, 184, 217, 246, 251, 271.
Massau, 271.
Matrot, 218.
Merino, 184.
Meunier, 225.
Meurice, 21, 91, 103, 128, 208.
Milne, 45.
Mineur, 138.
Mister, 136.
Möbius, 273.
Monge, 273.
Morel, 124.
Moréra, 253.
Mosnat, 259.
Moutard, 30.
Nagel, 221, 222.
Neper, 19, 235
Neuberg, 25, 29, 31, 33, 50, 67, 73 84, 103, 109, 110, 117, 126, 132, 159, 189, 217, 226, 240, 266, 267, 275.
Newton, 208, 218, 268, 272
Nicolaïdès, 88.
Niewenglowski, 176, 182, 218, 275.
Novarese, 24
Ocagne (d'), 19, 87, 88, 90, 110, 116, 271
Painvin, 231, 232.
Pascal, 272.
Pelz, 122
Perrin, 32, 124.
Peters, 261
Picard, 224.
Poinsot, 272.
Poisson, 225.
Pompilianu (Mlle), 26, 47, 76, 261
Poncelet, 273.
Poulain, 88, 184, 254
Prim (Mad.), 14, 76.
Prior, 259.
Puiseux, 273
Reye, 225.
Richardson, 281.
Riemann, 273.
Roberval, 273.
Robin, 225.
Rogier, 31.
Rolle, 20, 183, 275
Rosanes, 31.
Rouché, 143.
Rowe, 29.
Russo, 26, 49 126, 151, 175, 205
Saint-Germain, 185.
Salmon, 88.
Schlömilch, 226.
Schoute, 129, 264, 278.
Schröter, 31, 122.
Serenus, 40.
Serret (A.), 20, 273
Serret (P.), 273
Servais (Cl.), 22, 42, 45, 93, 96, 128, 238, 239.
Sharp, 104, 208, 245.
Simson, 195, 222.
Sluse, 273.
Sohie, 25, 47, 48, 75, 76, 77.
Sollertinsky, 33, 77, 78, 116, 148, 149, 158, 176, 177, 194, 195, 208, 210, 216, 238, 265.
Soons, 175, 208, 237, 238.
Staudt (von), 9, 273.
Steiner, 132, 184, 189.
Stewart, 109, 184, 254.
Stoffaes, 251.
Stokes, 225.
Strekalof (de), 25, 49, 213, 262.
Sturm, 183, 273.
Stuyvaert, 19, 224.
Sylvester, 32, 98, 273.
Tarry, 98, 171.
Taylor, 19, 182, 183, 275.
Taylor (H. M.), 29.
Teixeira, 143, 253, 262, 273, 274.
Terquem, 271.
Terrier, 33, 194.
Thélie, 222.
Thiry (Cl.), 26, 47, 76, 109, 151, 184, 254.
Tortolini, 153.
Tucker, 104, 128, 173, 213.
Vallée-Poussin (de la), 23, 25, 26.
Van Aubel (H), 255.
Vandermonde, 273.
Valyi, 31.
Verbessem, 239
Verhelst (F.), 48, 182.
Vigarié, 221.
Vladimirescu, 23, 26, 47, 76, 78, 173, 238.
Vuibert, 101, 102, 103, 117, 281.
Walecki, 183, 275.
Waring, 273.
Wasteels, 83, 253, 268.
Weierstrass, 273.
Weill, 29, 163, 235.
Wilson, 9, 11.

NOTES

SUR

LA GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

ET

SUR LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE

PAR

P. MANSION

Professeur ordinaire à l'Université de Gand,
Membre de l'Académie royale de Belgique.

SUR LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE.

1. Parmi les géomètres qui au commencement de ce siècle ont bien reconnu les difficultés que présente un exposé scientifique de la géométrie élémentaire, on peut citer le grand AMPÈRE. On trouve, en effet, dans sa *Philosophie des sciences*, le curieux passage suivant :

« Reid a montré que si l'homme était réduit au simple sens de la vue, ne pouvant dès lors connaître que l'étendue superficielle à deux dimensions, et prenant pour des lignes droites ce qui serait réellement des arcs de grands cercles tracés sur une surface sphérique dont le centre serait dans son œil, les triangles qu'il considérerait comme rectilignes pourraient avoir deux angles ou même leurs trois angles droits ou obtus, et que la géométrie d'un tel homme serait toute différente de la nôtre, deux de ces lignes qu'il prendrait pour droites se rencontrant, par exemple, toujours en deux points, en sorte que la notion de deux droites parallèles serait contradictoire pour lui ».

« Enfin, on sait que le théorème fondamental de la théorie

des parallèles, lorsqu'on les considère comme existant réellement, dans l'espace à trois dimensions, ne peut être rigoureusement démontré. C'est que ce théorème est fondé sur des propriétés de l'espace qui supposent les trois dimensions et l'infinité de l'étendue (*) ».

2. Fourier, dès 1795, avait aussi signalé quelques-unes des difficultés de la géométrie ordinaire (**) et avait proposé de définir nettement la sphère, le plan et la droite, au moyen de l'idée de distance seule, considérée comme notion première irréductible : la sphère est le lieu des points équidistants d'un seul point, le plan est le lieu des points dont les distances à deux points fixes sont égales, la droite celui des points dont les distances à trois points fixes sont égales. Monge fit diverses objections aux vues de Fourier, mais sans se douter que ces définitions peuvent conduire indifféremment à la *géométrie euclidienne* ou aux deux sortes de *géométrie non euclidienne*.

M. De Tilly, dans son *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique* (1879), a montré, en effet, que l'on peut établir les principes de la *géométrie générale*, en partant de définitions analogues à celles de Fourier; il avait prouvé antérieurement (1873) l'impossibilité de démontrer le postulat de la parallèle unique, non seulement par une construction plane, mais aussi par une construction quelconque. Les trois espèces de géométrie sont caractérisées par les relations qui existent

---

(*) Ampère, *Essai sur la philosophie des sciences*. Première partie (Deuxième édition; Paris, Mallet-Bachelier, 1856), p. 64. Ampère ajoute : « Les vérités géométriques ont donc une réalité objective qui ne se trouve pas dans celles de l'arithmologie ». Deux pages plus haut, il dit encore : « Les vérités dont se composent l'arithmologie résultent de l'identité des nombres représentés sous différentes formes au moyen des signes convenus, tandis que les théorèmes de la géométrie ne sont vrais qu'en vertu des propriétés de l'espace ». Et plus loin : « Or, que ces distinctions successives (surface, ligne, point) s'arrêtent à la troisième, cela ne dépend pas de la nature de notre esprit, mais d'une propriété de l'espace, tel qu'il existe réellement, et qu'on exprime en disant qu'il a trois dimensions ».

(**) *Séances de l'École normale; Débats*, t. I^er^, pp. 28-33; séance du 26 pluviose an III (14 février 1795), sous le titre : *Géométrie descriptive*, Monge professeur. Le passage complet est reproduit dans *Mathesis*, 1889, t. IX, pp. 139-141.

entre les trois côtés d'un triangle et l'un de ses angles, savoir :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\cos\left(\frac{a}{k}\right) = \cos\left(\frac{b}{k}\right)\cos\left(\frac{c}{k}\right) + \sin\left(\frac{b}{k}\right)\sin\left(\frac{c}{k}\right)\cos A, \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\mathrm{Ch}\left(\frac{a}{l}\right) = \mathrm{Ch}\left(\frac{b}{l}\right)\mathrm{Ch}\left(\frac{c}{l}\right) - \mathrm{Sh}\left(\frac{b}{l}\right)\mathrm{Sh}\left(\frac{c}{l}\right)\cos A, \quad . \quad . \quad (3)$$

où k est la constante du système spécial de géométrie (2), l celle du système (3) (*).

3. On peut caractériser autrement les trois systèmes de géométrie, en ne faisant intervenir que les distances, et en excluant les angles, comme nous l'a fait observer M. De Tilly dans des communications encore inédites (**). La géométrie euclidienne (à trois dimensions), dans cette manière de voir, est contenue tout entière dans la relation de Lagrange entre les dix distances de cinq points. Cette relation a été mise par Cayley sous la forme :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & d_{15}^2 \\ 1 & d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & d_{25}^2 \\ 1 & d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 & d_{35}^2 \\ 1 & d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 & d_{45}^2 \\ 1 & d_{15}^2 & d_{25}^2 & d_{35}^2 & d_{45}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

symétrique par rapport aux carrés d_{μ}^2 des dix distances. Si l'on représente cette relation par $(12345) = 0$, et les relations analogues entre les points 1, 2, 3, 4, 6 et 1, 2, 3, 5, 6 par $(12346) = 0$

(*) Au point de vue analytique, on peut observer que (2) contient (3), si l'on fait $k = l\sqrt{-1}$, et (1) si l'on fait $k = \infty$. On peut faire la même observation au § III, sur les trois relations analogues à (4) : elles rentrent aussi l'une dans l'autre, moyennant des substitutions analogues. De plus, on pourrait y remplacer chaque distance Δ de deux points par une fonction quelconque $\varphi(\delta)$ d'une autre quantité, qui pourrait aussi être appelée distance de ces points, à un point de vue abstrait. Nous ne regardons pas comme distinctes la relation entre les dix distances Δ ou les dix distances δ de cinq points.

(**) Voir toutefois le *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 3e sér., t. XIV (1887), p. 1015, lignes 21 à 25.

et (12356) = 0, on sait que ces relations (12345) = 0, (12346) = 0 et (12356) = 0, ont pour conséquences (12456) = 0, (13456) = 0 et enfin (23456) = 0.

Des relations analogues à (4) et jouissant de la même propriété caractérisent les deux sortes de géométrie non euclidienne, mais elles n'ont pas été données explicitement jusqu'ici.

La vérité la plus importante de la géométrie générale est celle-ci : il n'existe que trois relations analogues à (4) jouissant de la propriété signalée plus haut, laquelle exprime l'homogénéité de l'espace (*). Si l'on parvenait à démontrer directement ce théorème d'analyse, il en résulterait probablement une grande simplification dans l'exposé de la géométrie générale.

4. La géométrie euclidienne est contenue implicitement tout entière dans la relation (4). La géométrie euclidienne plane est renfermée implicitement dans la relation analogue qui lie les distances x, y, z d'un point aux trois sommets d'un triangle ayant pour côtés a, b, c, savoir :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & z^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 & y^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 & x^2 \\ 1 & z^2 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou même dans la relation de Stevart, $b^2y + c^2z = ax^2 + ayz$. si $a = y + z$.

Rien n'empêche d'introduire les angles *d'une manière purement formelle,* dans cette géométrie où tous les théorèmes sont des relations entre les distances. Il suffit de définir les angles A, B, C d'un triangle par les formules

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2bc}.$$

A, B, C n'ont ici aucune signification géométrique. La rela-

(*) Pour que ceci soit vrai, pris à la lettre, il faut préciser la notion de distance par cette condition supplémentaire : la somme 12 + 23 des distances 12, 23 a pour minimum la distance 13, quand 2 varie, 1 et 3 étant fixes.

tion de Stevart exprime que les angles (xy), (xz) sont supplémentaires. On prouve aisément que $A + B + C = \pi$, angle (bx) + angle (cx) = angle (bc) ; angle (ab) = angle (zb), angle (ac) = angle (yc).

Grâce à cet emploi apparent des angles, on peut rapprocher l'exposé scientifique de la géométrie euclidienne de celui que l'on emploie ordinairement dans les manuels élémentaires (*). (Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1888-1889, t. XIII, 1re partie, pp. 57-61.)

SUR LES POSTULATS ET LES AXIOMES D'EUCLIDE.

1. *Énumération des postulats et des axiomes.* Après les définitions du livre I des *Éléments* d'Euclide, on trouve, dans la plupart des manuscrits et des éditions de ce livre célèbre, quinze propositions rangées sous deux titres distincts : *Postulats* et *Notions communes* ou *axiomes*. Voici ces propositions, dont nous empruntons la traduction à M. P. Tannery (**).

Postulats. 1. Qu'il soit demandé de mener de tout point à tout point une ligne droite (I, 1).

2. Et de prolonger, en ligne droite et en continuité, une droite limitée (I, 2).

3. Et de décrire un cercle de tout centre et de tout rayon (I, 1).

4 (Axiome 10, dans Grégory). Et que tous les angles droits soient égaux entre eux (I, 14).

5 (Axiome 11, dans Grégory). Et que, si une droite rencontrant deux droites fait du même côté des angles intérieurs dont la somme soit moindre que deux droits, les deux droites prolon-

---

(*) Ceci suppose la trigonométrie générale établie indépendamment de la géométrie euclidienne. C'est ce qu'a fait Seidel dans le *Journal de Crelle*, 1871, t. LXXIII, pp. 273-291, d'une manière assez élémentaire (Voir Lipschitz, *Lehrbuch der Analysis*, II, pp. 75-82).

(**) *Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide* (Bulletin de Darboux, 2e série, 1884, t. VIII, 1re partie, pp. 162-175), pp. 163-164. Nous indiquons, d'après M. P. Tannery, la première proposition des Éléments où Euclide fait usage de chaque postulat ou axiome.

gées indéfiniment se rencontrent du côté dont la somme est inférieure à deux droits (I, 29).

6 (Axiome 12, dans Grégory; axiome 9, dans Heiberg). Et que deux droites ne comprennent pas d'espace (I, 4).

Notions communes ou axiomes. 1. Les choses égales à une même sont aussi égales entre elles (I, 1).

2. Et si, à des choses égales, on ajoute des choses égales, les sommes sont égales (I, 13).

3. Et si, de choses égales, on retranche des choses égales, les restes sont égaux (I, 3).

4. Et si, à des choses inégales, on ajoute des choses égales, les sommes sont inégales (I, 17).

5 (Supprimé dans Heiberg). Et si, de choses inégales, on retranche des choses égales, les restes sont inégaux (III, 17).

6 (5 dans Heiberg). Et les doubles d'une même chose sont égaux entre eux (I, 42).

7 (6 dans Heiberg). Et les moitiés d'une même chose sont égales entre elles (I, 37).

8 (7 dans Heiberg). Et les choses qui coïncident l'une avec l'autre sont égales entre elles (I, 4).

9 (8 dans Heiberg). Et le tout est plus grand que la partie (I, 6).

2. *Les postulats et axiomes dans les manuscrits et les éditions savantes.* M. Heiberg, dans son édition, a tenu compte principalement de quatre manuscrits qu'il désigne par les lettres P, B, F et V : les trois derniers représentent la recension de Théon (vers 370 après J.-C.), et le premier, une recension antérieure. De plus, il a consulté, pour le premier livre spécialement, deux autres manuscrits qu'il dénote par les lettres *b* et *p* et qui appartiennent aussi au groupe théonien. Dans ce groupe, d'ailleurs, d'après M. Heiberg, F est de beaucoup le meilleur (*).

Les manuscrits P, F et des retouches faites au manuscrit V donnent le postulat 6 à la place indiquée au n° 1 ; les manuscrits V, *b*, *p* le placent au contraire après les axiomes ou notions

(*) T. V, p. XXXVII. M. Heiberg dit : F *Theoninorum longe optimus est.*

communes; B le place aussi après les axiomes, mais avec le verbe à l'infinitif, comme si toute la phrase dépendait de : *il est demandé*. Le manuscrit B ne contient pas non plus l'axiome 5, qu'on ne trouve qu'en marge dans F et *b*; dans *p*, il est ajouté après coup.

Quant aux principales éditions, voici comment elles disposent les quinze propositions :

1° L'édition de Campanus, qui a été faite d'après un Euclide arabe, et celle de Peyrard (1814-1818), qui suit surtout l'excellent manuscrit P du Vatican, ont les postulats et les axiomes dans l'ordre indiqué plus haut.

2° L'édition princeps de Bâle (1533), faite sur de mauvais manuscrits, et celle d'Oxford (1703), de D. Grégory, qui s'appuie sur celle de Bâle, reportent les trois postulats 4, 5, 6 après les axiomes (*).

3° L'édition latine de Commandin (1572) rejette le postulat 6 après les axiomes. D'après ce que nous apprend M. Heiberg, Commandin s'est servi, pour faire sa traduction, non seulement de l'édition de 1533, mais aussi d'un manuscrit grec.

4° M. Heiberg, dans sa belle édition des *Éléments* (1883-1888), met le postulat 6 à la même place que Commandin, parmi les axiomes, mais il le regarde comme interpolé, ainsi que les axiomes 4, 6, 7; quant à l'axiome 5, il l'exclut même du texte grec, bien qu'il dise en note qu'on le trouve ordinairement dans les manuscrits et les éditions; de plus, pour lui, 8 et 9 sont douteux.

3. *Opinion de MM. P. Tannery et Heiberg sur les postulats et les axiomes.* M. P. Tannery s'est occupé deux fois au moins des axiomes et des postulats d'Euclide. Dans un premier article intitulé : *Quelques fragments d'Apollonius de Perge* (Bulletin de Darboux, 2e série, t. V, 1re partie, pp. 124-136), Proclus, dit-il, « ne reconnaissait comme postulats que les trois relatifs à la construction de la droite et du cercle, dont le caractère particulier semble garantir l'adoption comme tels par Euclide

(*) C'est pourquoi souvent les postulats 4, 5, 6 sont désignés comme axiomes 10, 11, 12. Il en est de même dans l'édition de Dasypodius (1564).

et leur inscription par lui en tête des propositions. Il est bien douteux, au contraire, que l'auteur des *Éléments* se soit jamais proposé de réunir en tête de son livre les divers lemmes qu'il a admis comme accordés dans le cours de ses propositions. S'il avait fait ce travail, il eût certes évité d'en accroître autant le nombre, et surtout de prendre comme axiomes des théorèmes dont la démonstration est facile. » Suivant M. Tannery, on pouvait démontrer les axiomes 1 à 7 au moyen de 8 et 9. « Quant aux prétendus axiomes 10 (de l'édition de Grégory, c'est-à-dire le postulat 4), l'égalité de tous les angles droits, 12 (même édition, postulat 6), que deux droites ne peuvent limiter un espace, le premier est certainement un théorème oublié par Euclide; le second, lemme admis dans I, 4, pouvait être considéré par lui comme rentrant dans le premier postulat. »

Dans le second article, déjà cité plus haut à propos de la traduction des quinze postulats ou axiomes, la question est traitée plus longuement.

« Les trois premiers postulats, dit M. Tannery, ont un caractère tout particulier; ce ne peut être certainement qu'un profond penseur qui conçut le premier l'idée originale de réduire les constructions élémentaires au minimum de trois et de les *formuler en postulats* » (p. 164).

« Mais ces postulats mis à part, l'impression que donne le reste est que l'on a ultérieurement recherché dans le premier livre des *Éléments* tout ce qui y était admis sans démonstration et que les propositions formulées à la suite de cette recherche ont été classées tant bien que mal. Déjà Geminus, un siècle avant J.-C., voulait séparer les postulats 4 et 5, qu'il considérait comme des théorèmes à démontrer. Il avait incontestablement raison en ce qui concerne le postulat 4; mais il semble que, si Euclide avait le premier formulé cette proposition, il ne se serait pas mépris sur son caractère, pas plus qu'il n'aurait été arrêté par la difficulté d'une démonstration.... Quant au fameux énoncé relatif aux parallèles, il est au contraire certain qu'Euclide a dû essayer de le démontrer et renoncer à ses inutiles recherches; il le postule nettement, quoique sous une forme beaucoup plus brève, au cours de la proposition XXIX » (pp. 164-165).

« Si l'on veut ne conserver comme véritablement euclidiens que les axiomes réellement dignes de l'auteur des *Éléments*, on est conduit à ne lui attribuer, *au premier abord*, que les trois premiers postulats et peut-être aussi les trois premières notions communes, mais pour ces dernières le doute est très sérieux » (p. 167).

Mais peut-être peut-on aussi supposer qu'Euclide a trouvé, dans les Éléments antérieurs, les définitions, les trois premiers postulats; il a ajouté 4 pour ne pas remanier les définitions de l'angle aigu et de l'angle obtus, 5 parce qu'il le fallait bien; quant aux notions communes, elles auraient été extraites ultérieurement des Éléments. Cependant on peut aussi soutenir l'opinion contraire; car Autolycus, Aristarque de Samos, Archimède énoncent aussi, sous diverses dénominations, en tête de leurs écrits, des postulats du genre de ceux que l'on trouve dans les meilleurs manuscrits d'Euclide, avant les notions communes. Mais « il me semble plus glorieux pour Euclide d'avoir énoncé seulement les trois postulats de construction » (p. 173).

Comme on le voit, sans se prononcer nettement dans la question, M. P. Tannery n'admet au fond l'authenticité que des cinq premiers postulats, et encore fait-il des réserves relativement à 5 et surtout à 4; mais cette opinion est fondée principalement sur des raisons d'une nature plus ou moins subjective.

M. Heiberg (*) arrive à une conclusion différente en tenant compte davantage des données des manuscrits. Parmi les postulats, le 6e seul lui paraît interpolé, parce qu'il n'a pas une place fixe dans ces manuscrits. Quant aux notions communes, il est difficile de les rejeter en bloc. On sait par Proclus qu'elles existaient déjà du temps d'Apollonius. A qui les attribuer, avant celui-ci, si ce n'est à Euclide même? Elles sont distinguées par leur forme extérieure des postulats qui débutent par les mots : *qu'il soit demandé*. Les axiomes 1, 2, 3 au moins sont d'Euclide; 8 et 9 sont un peu douteux, parce que Héron ne les connaît pas, ni Capella; mais elles sont dans Proclus. Proclus, en revanche, n'a pas 4, 6 et 7, qui sont donc presque certaine-

(*) *Prolegomena*, pp. LXXIX et XC.

ment interpolés; quant à 5, il manque dans plusieurs bons manuscrits, comme on l'a dit plus haut. Euclide n'a sans doute admis en fait d'axiomes, en tête des Éléments, que ceux qui avaient une portée générale, savoir 1, 2, 3, 8, 9, bien qu'il en emploie beaucoup d'autres dans le courant de ses démonstrations.

4. *Raisons d'attribuer tous les axiomes à Euclide.* Au premier abord, il semble difficile d'échapper à la conclusion de Heiberg touchant les axiomes, et l'on est tout disposé à rejeter, avec lui, 4, 5, 6, 7, parce qu'ils ne sont admis ni par Héron, ni par Proclus, bien qu'ils se trouvent dans de bons manuscrits.

Mais la question change de face quand on l'examine de plus près. Dans Euclide, on ne peut donner au mot *égal* que le sens du mot français *équivalent*, c'est-à-dire *composé de parties superposables*. Or, quand on part de cette notion précise, on reconnaît aisément que les notions communes 1, 2, 3, 6, 8 sont de vrais axiomes, ou au moins des théorèmes faciles à démontrer; mais, comme on l'a remarqué à propos de l'une des autres notions communes (*), il semble très difficile d'établir 3, 4, 7, 9 d'une manière élémentaire, bien qu'on ne puisse guère douter de la vérité de ces propositions. Les neuf notions communes, d'ailleurs, se tiennent étroitement : ainsi 4 peut se déduire de 3, et réciproquement; 2, 3, 4, 5 forment un groupe naturel; il en est de même de 6 et 7 et de 8 et 9.

Euclide, *esprit systématique et rigoureux* (**), a pu voir, aussi bien que les modernes, les difficultés de la théorie de l'équivalence des figures et les relations logiques entre les neuf notions

---

(*) Faifofer, *Elementi di Geometria* (3e édition, 1882, Venise), p. 194, a le premier, croyons-nous, fait remarquer que l'on admet implicitement, dans maintes démonstrations relatives à l'équivalence, qu'*une figure ne peut être équivalente a l'une de ses parties*, bien que ce ne soit pas évident. Dans la 6e édition du même ouvrage (Venise, 1888), il prouve les axiomes 1, 2 d'Euclide et il postule 9, p. 198. Voir les articles de MM. Faifofer et De Paolis sur l'axiome 3, dans le *Periodico di Matematica* de Besso (Rome, 1886), t. I, pp. 13-15, 44-46.

(**) « Euclide, dit le résumé de l'histoire de la géométrie d'Eudème, rassembla les Éléments, *arrangea* beaucoup de ce qu'Eudoxe avait découvert et *completa* ce qui avait été commencé par Théétète; ensuite il substitua des *preuves irréfutables* aux démonstrations trop laxes de ses prédécesseurs. »

communes employées par ses prédécesseurs et par lui-même dans les Éléments. Dès lors, il est tout naturel de lui attribuer les neuf axiomes, parce qu'ils forment un ensemble de vérités indispensables pour l'établissement de la géométrie (*). Quant à Héron et à Proclus, ils ne sont pas, au point de vue scientifique, des autorités suffisantes pour nous faire rejeter le témoignage de bons manuscrits, quand il est d'accord avec les principes et avec l'idée que l'on se fait du génie d'Euclide.

5. *Les postulats 4, 5, 6, au point de vue de la géométrie non euclidienne.* Nous croyons que l'on doit attribuer les postulats 4, 5, 6 à Euclide, aussi bien que les axiomes 1 à 9; mais avant d'exposer les raisons qui militent en faveur de cette manière de voir, il est utile d'examiner ces postulats à la lumière des spéculations modernes sur la géométrie non euclidienne. Or, à ce point de vue, selon nous, on doit reconnaître qu'ils sont l'équivalent des postulats regardés aujourd'hui comme nécessaires et suffisants pour exposer scientifiquement la géométrie ordinaire ou géométrie euclidienne.

On peut caractériser les divers systèmes actuels de géométrie où l'on admet comme point de départ la continuité et l'homogénéité de l'espace, par la relation qui existe entre les trois côtés d'un triangle rectangle. Dans la géométrie riemannienne, cette relation est

$$\cos a\varepsilon = \cos b\varepsilon \cos c\varepsilon, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

a désignant l'hypoténuse, b et c les côtés, ε une constante qui caractérise l'*espèce* de géométrie considérée dans le *genre* riemannien (**). Dans la géométrie de Lobatschewsky, la relation est

$$\mathrm{Ch}\, a\eta = \mathrm{Ch}\, b\eta \,\mathrm{Ch}\, c\eta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

(*) Il forme la στοιχείωσις des axiomes, comme l'ensemble de ses définitions forme celle des vocables géométriques, suivant une remarque de Heiberg (*Prolegg.* p. LXXXIX).

(**) Lorsque l'on donne à ε diverses valeurs, on trouve diverses géométries riemanniennes. Ainsi, si $\varepsilon = 1$, et si $c = b$, l'hypoténuse a du triangle rectangle isocèle de côté b est donnée par la relation $\cos a = \cos^2 b$; si $\varepsilon = 2$, l'hypoténuse a' du triangle rectangle isocèle de côté b serait donnée par $\cos 2a' = \cos^2(2b)$. On ne peut avoir $a' = a$, comme il est aisé de le voir. L'espace correspondant à $\varepsilon = 1$ n'est pas homogène avec l'espace

où η est aussi une constante spécifique caractéristique. Au point de vue analytique, chacune des relations (1) ou (2) contient l'autre, si l'on y fait $\varepsilon = \eta\sqrt{(-1)}$, ou $\eta = \varepsilon\sqrt{(-1)}$. Pour ε ou η nul, les deux relations précédentes deviennent

$$a^2 = b^2 + c^2 ;$$

celle-ci caractérise la géométrie euclidienne.

Dans toute géométrie, on est forcé d'admettre comme postulat fondamental l'*invariabilité des figures* (*), c'est-à-dire, par exemple, qu'un triangle rectangle isoscèle de côté b, d'hypoténuse a, est toujours identique à lui-même, en quelque endroit qu'on le suppose placé; ou, si l'on veut, qu'il n'y a pas des lignes droites de deux sortes dans une même espèce de géométrie. Ce principe n'est-il pas l'équivalent du quatrième postulat d'Euclide : *Les angles droits sont égaux?* Les démonstrations de cette proposition ne supposent-elles pas l'invariabilité des figures, ou, au moins, qu'il n'y a qu'une espèce de ligne droite? On peut donc dire que le postulat 4 d'Euclide, ou un autre équivalent, est indispensable pour établir une géométrie quelconque.

Le postulat 5 n'est vrai que dans la géométrie euclidienne et dans celle de Riemann, autrement dit, il exclut la géométrie de Lobatschewsky; le postulat 6 est vrai dans la géométrie euclidienne et dans celle de Lobatchewsky, c'est-à-dire qu'il exclut la géométrie de Riemann.

Les postulats 4, 5, 6 sont donc indispensables pour établir la géométrie usuelle d'une manière scientifique. Ils sont d'ailleurs suffisants aussi, comme on peut le déduire, croyons-nous, des recherches contenues dans l'*Essai* de M. De Tilly (**).

---

correspondant à $\varepsilon = 2$. Les angles droits de l'une ne sont pas identiques à ceux de l'autre. On peut faire des remarques analogues sur les géométries caractérisées par les diverses valeurs de η.

(*) De Tilly, *Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique* (Bordeaux, 1879). n° 27, p. 18.

(**) M. De Tilly prend pour deuxième et troisième postulats fondamentaux les suivants: *La distance de deux points de l'espace n'a pas de limite supérieure et peut augmenter indéfiniment; par un point pris hors d'une droite, on ne peut mener qu'une parallèle à cette droite* (*Essai*, n° 39, p. 24, et n° 121, p. 71); ces postulats réunis équivalent aux postulats 6 et 5 d'Euclide, sans qu'ils leur soient équivalents séparément.

6. *Raisons d'attribuer les postulats 4, 5, 6 à Euclide.* Au point de vue de la rigueur absolue, on doit donc regarder les postulats 4, 5, 6 comme aussi dignes d'être attribués à Euclide que les postulats 1, 2, 3 de construction.

Mais, nous dira-t-on, Euclide n'avait évidemment aucune idée de ces géométries de Riemann et de Lobatschewsky, qui ont conduit les modernes à une étude critique des principes de la géométrie et à la réduction des postulats à un nombre minimum.

A cette objection, nous répondrons : Qu'en sait-on ? Le P. Saccheri, dans son *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Milan, 1733), n'a-t-il pas rencontré les trois systèmes de géométrie par une voie très simple, entièrement élémentaire (*) ?

Ce que Saccheri a fait, en ne recourant qu'aux premières propositions du livre I des *Éléments*, l'auteur des *Éléments* a pu sans doute le faire aussi. On ne peut donc pas affirmer avec certitude qu'Euclide n'ait pas connu les trois systèmes de géométrie, ou au moins qu'il n'ait été conduit, comme Saccheri, à examiner à fond la question des postulats nécessaires et suffisants pour établir la géométrie usuelle.

Mais on n'est pas forcé d'aller jusque-là pour lui attribuer les postulats 4, 5, 6. Pour le postulat 5, personne ne doute qu'il n'ait dû essayer de l'établir, comme tant de géomètres l'ont fait depuis deux mille ans, jusqu'à ce que MM. Beltrami et De Tilly aient prouvé l'inutilité de leurs efforts. Il est donc tout naturel qu'Euclide ait postulé cette proposition rebelle à toute démonstration. Pour les postulats 4 et 6, Euclide avait d'autres raisons de les énoncer en tête de ses *Éléments*. Depuis que Schiaparelli a restitué le système astronomique d'Eudoxe et que Hultsch a publié les écrits d'Autolycus, on ne doute plus que la géométrie de la sphère ne fût constituée avant Euclide. Si Euclide ne l'a

---

(*) Par la considération d'un quadrilatère plan ABCD, rectangle en B et C, et où BA = CD. Si les angles en A et D sont droits, on a la géométrie ordinaire; s'ils sont aigus, la géométrie de Lobatschewsky; s'il sont obtus, celle de Riemann. Saccheri prouve que l'on doit rejeter cette dernière, en s'appuyant sur des propositions d'Euclide, qui impliquent le postulat 6; en essayant d'exclure de même la géométrie de Lobatschewsky, il est amené à discuter les postulats 4 et 6 et d'autres propositions voisines déjà étudiées par Clavius dans sa célèbre édition d'Euclide (1589). Voir l'article suivant.

pas fait entrer dans ses *Éléments*, c'est qu'elle était en dehors du plan de son immortel ouvrage ; mais il la connaissait évidemment. Les principales propriétés des grands et des petits cercles lui étaient aussi familières qu'à nous-mêmes. Dès lors, il a dû reconnaître l'insuffisance de sa célèbre définition de la ligne droite : *ligne qui repose semblablement sur tous ses points* (ligne *homogène*, dirions-nous plus brièvement), pour caractériser cet être géométrique dans la géométrie usuelle. Cette définition, en effet, s'applique à un grand et même à un petit cercle de la sphère. Beaucoup de propriétés des grands et des petits cercles sur la sphère sont les mêmes que les propriétés de la droite dans le plan. Comment préciser la notion vague contenue dans la définition rappelée plus haut, autrement dit, comment éviter la géométrie sphérique? On ne le peut qu'au moyen des postulats 4 et 6 (ou de postulats équivalents), complémentaires de la définition de la ligne droite. Car, sur la sphère, on peut faire des angles droits inégaux (non superposables), savoir ceux dont les côtés ne sont pas des arcs de cercles égaux ; de plus, deux grands cercles se coupent toujours en deux points et comprennent un espace. En admettant les postulats 4 et 6, Euclide exclut toute confusion de la géométrie plane avec la géométrie sphérique, et en y réunissant le postulat 5, il a un système de postulats nécessaires et suffisants pour établir la géométrie usuelle (*).

7. *Conclusions.* 1° Les meilleurs manuscrits des *Éléments* d'Euclide contiennent les six postulats et huit des neuf axiomes; l'axiome 5, qui manque seul dans B et F, se trouve dans P et dans V.

2° Tout le monde admet que les trois postulats de construction sont dignes d'Euclide et peuvent lui être attribués.

3° Selon nous, il en est de même des trois autres dont la géométrie non euclidienne démontre la nécessité pour établir scientifiquement la géométrie usuelle. Cette nécessité, Euclide l'a

(*) Au point de vue de la discussion des principes, la connaissance de la géométrie sphérique équivaut à celle de la géométrie de Riemann; l'impossibilité pratique de démontrer le postulat 5, à celle de la géométrie de Lobatschewsky.

reconnue pratiquement pour le postulat 5, parce qu'il ne pouvait le démontrer; pour 4 et 6, par la nécessité d'éviter la géométrie sphérique.

4° Les axiomes 1 à 9 forment un ensemble logique de propositions, les unes évidentes ou démontrables, les autres indémontrables ou difficiles à démontrer, mais étroitement apparentées aux premières. Euclide, esprit systématique et rigoureux, n'a pu les séparer les unes des autres, précisément à cause de leur connexion logique.

En résumé, l'étude scientifique des principes de la géométrie conduit donc à la même conclusion que les bons manuscrits : *les six postulats et les neuf axiomes peuvent être attribués à Euclide* (*).

ANALYSE DES RECHERCHES DU P. SACCHERI, S. J., SUR LE POSTULATUM D'EUCLIDE.

M. Beltrami(**) a fait connaître récemment un précurseur italien de Lobatschewsky et de Riemann, qui, près de cent ans avant le premier, a été sur la voie de la découverte des géométries non euclidiennes, le P. Saccheri, S. J. On ignore, dit-il, la date de sa naissance ; on sait seulement qu'il était de San Remo, qu'il commença à enseigner à Pavie en 1697 et qu'il est mort, le 5 octobre 1733, à Milan, où il dirigeait le collège de Brera.

L'année même de sa mort, il a publié à Milan un ouvrage qui suffit pour tirer son nom de l'oubli. Il est intitulé : *Euclides — ab omni naevo vindicatus : — sive — conatus geometricus — quo*

(*) Cette note extraite des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1889-1890, t. XIV, 2e partie, pp. 35-43) nous a été inspirée par la lecture des ouvrages du P. Saccheri et de M. Faifofer, cités plus haut.

(**) Voir la note *Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewski*, par E. Beltrami, dans les comptes rendus de l'Académie (royale) des *Lincei* de Rome, t. V, 1er semestre, fascicule 6, séance du 17 mars 1889, pp. 441-448. Nous devons la connaissance de cette note de M. Beltrami au R. P. Thirion, S. J., qui nous a aussi communiqué l'ouvrage même du P. Saccheri.

stabiliuntur — Prima ipsa universae Geometriae Principia. — Auctore — Hieronymo Saccherio — Societatis Jesu — in Ticinensi Universitate Matheseos Professore. — Opusculum ex^mo. Senatui — Mediolanensi — Ab Auctore Dicatum — Mediolani, MDCCXXXIII. — Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permissu. L'ouvrage est un in-quarto de XVI-142 pages, avec 6 planches contenant 55 figures.

Dans la dédicace au Sénat de Milan (pp. III-V), l'auteur fait observer qu'il est extrêmement utile d'établir sur des bases absolument sûres les principes de toute science. On l'a tenté depuis longtemps pour la géométrie, mais il reste cependant quelque chose à faire. Dans son ouvrage, l'auteur a essayé de compléter les travaux de ses devanciers, et il l'offre au Sénat comme la Néostatique publiée par lui antérieurement. Viennent ensuite (p. VII) l'approbation du Provincial de la Compagnie de Jésus, datée du 16 août 1733, puis (p. VIII) celles de l'Inquisiteur général, de l'Archevêque et du Sénat de Milan, du 13 juillet 1733.

Dans sa préface (pp. IX-XI), le P. Saccheri, après avoir exprimé toute son admiration pour Euclide, observe que, cependant, il y a trois taches dans ses Éléments : la première est relative au célèbre postulatum de la théorie des parallèles, la deuxième à la définition 6 du livre V, la troisième à la définition 5 du livre VI. Le but de son travail est de faire disparaître ces trois défauts. Les pages XII-XV en contiennent ensuite une analyse détaillée, et la page XVI quelques errata.

L'ouvrage du P. Saccheri est divisé en deux livres et chacun en deux parties. Le premier livre (pp. 1-101, avec appendice, pp. 139-142; 3 pl. avec 48 fig.) est consacré tout entier au postulatum d'Euclide et contient trente-neuf propositions avec corollaires, lemmes et remarques. Le second livre traite, dans la première partie, de la définition 6 du livre V d'Euclide, et incidemment de la proposition 2 du livre XII; dans la seconde, de la définition 5 du livre VI.

L'auteur croit, *à priori*, à la vérité du postulatum d'Euclide, mais, selon lui, il n'aurait pas dû être appelé axiome (comme il

l'est dans l'édition d'Euclide, de Clavius, dont il se sert), et il aurait fallu le démontrer. C'est en cherchant à l'établir rigoureusement qu'il expose, sous une forme très nette, les premiers principes de la géométrie non euclidienne.

Nous allons faire connaître la suite des propositions de l'auteur, en supprimant, pour abréger, les démonstrations. L'auteur ne suppose connues du lecteur que les propositions 1-26 du livre I des Éléments d'Euclide, c'est-à-dire ce qui précède la théorie des parallèles. Son but est de démontrer le 5e postulat d'Euclide (13e axiome de l'édition de Clavius) : *Deux droites coupées par une troisième et faisant avec celle-ci des angles intérieurs d'un même côté, dont la somme est inférieure à deux droits, se rencontrent de ce côté.*

Première partie. I. Dans un quadrilatère ABDC, rectangle en A et B et à côtés opposés AC, BD égaux, les angles en C et D sont égaux.

II. La médiane MH, qui divise en deux parties égales les côtés AB, CD de ce quadrilatère birectangle isoscèle ABDC, est perpendiculaire à AB et à CD.

III-IV. Selon que les angles en C et en D, dans le quadrilatère isoscèle ABDC, sont droits, aigus ou obtus, on a CD = AB, CD > AB, ou CD < AB, et réciproquement.

Corollaires 1-2. Si le quatrième angle d'un quadrilatère trirectangle est obtus, les côtés adjacents à l'angle obtus sont plus petits que les côtés opposés; si le quatrième angle est aigu, les côtés adjacents à cet angle sont plus grands que les côtés opposés et, *à fortiori*, qu'une partie de ceux-ci.

3. Tout ce qui précède et tout ce qui suit est vrai si AC et BD sont infiniment petits.

Définitions. Il y a trois hypothèses à distinguer, suivant la nature des angles C et D, dans la proposition I : *l'hypothèse de l'angle droit,* celle *de l'angle obtus* et celle *de l'angle aigu.*

Notes. 1. Ces hypothèses correspondent respectivement à la géométrie euclidienne, à la géométrie de Riemann et à celle de Lobatschewsky.

2. Dès la proposition III, l'auteur se sert de la proposition (Euclide, I,

16) : *Le supplément d'un angle quelconque d'un triangle est plus grand que chacun des deux autres.* La démonstration de ce théorème s'appuie implicitement sur le postulat 6 d'Euclide : *Deux droites ne peuvent contenir un espace* (ou deux droites ne peuvent avoir deux points communs sans coïncider). Ce postulat et la proposition I, 16 ne sont pas toujours vrais dans la géométrie de Riemann ou dans l'hypothèse de l'angle obtus. Il est donc tout naturel que, dans la suite, Saccheri parvienne à prouver l'incompatibilité de cette hypothèse avec les propositions admises par lui.

3. Saccheri, comme on le verra plus bas, a une idée fausse des infiniment petits. Par ce terme, il entend les pseudo-infiniment petits de Jean Bernouilli, c'est-à-dire *de soi-disant quantités fixes différentes de zéro et qui sont néanmoins plus petites que toute quantité donnée.* C'est cette notion contradictoire qui l'a conduit aux erreurs qui déparent son beau livre et l'a empêché de faire la découverte de la géométrie de Lobatschewsky, dont il possédait les éléments.

V. Si l'hypothèse de l'angle droit est vraie dans un seul cas, elle l'est toujours.

VI. Si l'hypothèse de l'angle obtus est vraie dans un seul cas, elle l'est toujours.

VII. Si l'hypothèse de l'angle aigu est vraie dans un seul cas, elle l'est toujours.

4. La démonstration de la proposition VI n'est pas absolument rigoureuse dans Saccheri ; mais elle peut être rendue telle, en prouvant que, dans le quadrilatère de la proposition I, CD diffère aussi peu que l'on veut de AB, si AC, BD sont suffisamment petits et observant qu'une grandeur continue passe par toutes les valeurs intermédiaires entre deux de ses valeurs effectives. La proposition VII est une suite de V et VI.

VIII-IX. Dans un triangle rectangle, la somme des angles aigus est égale, supérieure ou inférieure à un droit, suivant qu'est vraie l'hypothèse de l'angle droit, celle de l'angle obtus, ou celle de l'angle aigu.

X. De deux obliques, celle-là s'éloigne le plus du pied de la perpendiculaire, qui est la plus longue, et réciproquement.

XI-XII. Dans l'hypothèse de l'angle droit et dans celle de l'angle obtus, une perpendiculaire et une oblique à une même droite se rencontrent.

XIII. Dans ces deux hypothèses, le postulatum d'Euclide est

vrai; autrement dit, deux droites qui font avec une troisième, d'un côté, des angles intérieurs dont la somme est inférieure à deux droits se rencontrent de ce côté.

Remarques. 1. Même si XI-XII étaient prouvés dans l'hypothèse de l'angle aigu, on ne pourrait en déduire directement XIII au moyen de VIII-IX, comme nous le faisons ici dans les deux autres hypothèses; mais on le pourrait d'une manière indirecte.

2. On peut toujours mener deux droites faisant avec une troisième des angles donnés dont la somme est inférieure à deux droits et qui se rencontrent, pourvu que la distance des sommets des angles ne soit pas donnée.

XIV. L'hypothèse de l'angle obtus se détruit elle-même. Car, si elle est vraie, le postulatum d'Euclide est vrai, comme on vient de le voir; on peut donc établir la théorie des parallèles comme Euclide, puis prouver, dans I, que les angles en C et D sont droits.

Autre démonstration.

5. Cette seconde démonstration repose sur EUCLIDE I, 16, comme nous l'avons fait observer pour III dans la note 2.

XV-XVI. Suivant que la somme des trois (quatre) angles d'un triangle (quadrilatère) est égale, supérieure ou inférieure à deux (quatre) droits, c'est l'hypothèse de l'angle droit, celle de l'angle obtus ou celle de l'angle aigu qui est vraie.

XVII. Dans l'hypothèse de l'angle aigu, on peut trouver une perpendiculaire et une oblique à une même droite qui ne se rencontrent pas. Deux procédés : 1° ABH étant un triangle rectangle en A, on mène HD tel que l'angle BHD = HBA, puis BD perpendiculaire à HD. Les triangles AHB, DHB sont égaux, BD est une oblique par rapport à AB, qui ne rencontre pas AH; 2° soit AHMB un quadrilatère trirectangle (en A, B, H). La ligne HA ne rencontre pas BD, perpendiculaire à HM, oblique à AB.

Remarque. L'hypothèse de l'angle aigu serait détruite si XVII n'était pas vrai, ou si, comme on le verra (XXVII), on savait

qu'une oblique, sous un angle aigu donné, rencontre toujours la perpendiculaire.

XVIII. L'hypothèse de l'angle droit, celle de l'angle obtus ou celle de l'angle aigu est vraie selon que l'angle B d'un triangle ABC, inscrit dans une circonférence de diamètre BC, est égal, supérieur ou inférieur à un angle droit.

XIX. Si l'on prolonge l'hypoténuse d'un triangle rectangle d'une longueur égale à elle-même et que l'on projette ce prolongement sur le prolongement du côté non adjacent du triangle, l'hypothèse de l'angle droit, celle de l'angle obtus ou celle de l'angle aigu sera vraie selon que la projection sera égale, supérieure ou inférieure à ce côté.

XX. Dans l'hypothèse de l'angle aigu, si B est au milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle AMC et si BD est perpendiculaire à AC, alors BD est égal ou inférieur à la moitié de MC.

XXI. Dans l'hypothèse de l'angle droit et dans celle de l'angle aigu, la distance d'un point qui s'éloigne indéfiniment sur un côté d'un angle, à l'autre côté, croit indéfiniment.

Corollaire. Il en est donc toujours ainsi, puisque l'hypothèse de l'angle obtus est rejetée.

6 Une fois arrivé ici, l'auteur, qui a démontré les vingt et une propositions précédentes dans les pages 1-20, consacre les pages 21-43 à une étude historico-critique en quatre remarques sur des essais de Proclus, Borelli, Nassireddin, Wallis et à diverses considérations relatives au postulatum d'Euclide et aux preuves plus exactes que l'on peut en donner. Voici un aperçu de cette partie de son ouvrage :

Remarques. 1. Proclus a essayé de prouver la proposition XXI. Il a réussi à démontrer seulement qu'un point du côté d'un angle est de plus en plus éloigné de l'autre côté de l'angle, quand il s'éloigne du sommet; mais il n'a pas prouvé que la distance croît au delà de toute limite. Eût-il démontré d'ailleurs la proposition XXI complète, le postulatum ne s'ensuit pas immédiatement : pour que le postulatum en fût une conséquence immédiate, il faudrait avoir établi préalablement que deux perpendiculaires à une même droite n'ont pas leurs points de plus

en plus éloignés les uns des autres lorsqu'on les prend à des distances de plus en plus grandes de la perpendiculaire commune.

2. Borelli critique à tort la définition des parallèles d'Euclide; cette définition est irréprochable, parce que Euclide donne le moyen de construire deux parallèles sans s'appuyer sur le postulatum. Borelli définit la parallèle à une droite en disant que c'est la ligne équidistante de la première; cette équidistante (déjà considérée auparavant par Clavius) est une droite, d'après la définition d'Euclide, car elle est située semblablement par rapport à tous ses points. Mais il y a une confusion dans ce dernier raisonnement : l'équidistante est située semblablement par rapport à la droite primitive, mais on ne sait pas si elle jouit de cette propriété par rapport à elle-même.

Voici divers moyens de vérifier physiquement si le postulatum est vrai : 1° Si, dans le quadrilatère birectangle isoscèle ABDC, de la proposition I, la perpendiculaire MN abaissée du point N de CD sur AB est égale à AC et à BD, c'est l'hypothèse de l'angle droit qui est vraie; 2° il en est de même si l'angle inscrit dans une demi-circonférence est droit; 3° ou si l'on peut inscrire dans une demi-circonférence la moitié d'un hexagone ayant ses côtés égaux au rayon.

3. Nassareddin fait deux postulats : 1° si les perpendiculaires abaissées d'une droite sur une autre font, d'un même côté, des angles aigus avec la première, ces perpendiculaires sont toujours de plus en plus courtes du côté des angles aigus, de plus en plus longues de l'autre côté. Cette proposition n'est pas un postulat, on peut la démontrer par le corollaire 2 de la proposition III; 2° réciproquement, si les perpendiculaires sont de plus en plus courtes d'un côté, les angles des perpendiculaires à l'une des droites, avec l'autre, sont aigus de ce côté. On peut objecter que ces angles aigus peuvent croître jusqu'à devenir droits, ce qui renverse toute la démonstration de l'auteur arabe. Ensuite, comme l'a remarqué Wallis, il aurait pu tout aussi bien admettre directement que les deux droites convergentes de son second

postulat se rencontrent, car nous prouverons (XXV) que si les perpendiculaires décroissantes avaient une limite différente de zéro, l'hypothèse de l'angle aigu peut être démontrée fausse.

Wallis déduit le postulatum de l'existence, admise *à priori*, de deux figures semblables, deux triangles, par exemple, ayant leurs angles égaux et leurs côtés proportionnels. Mais il n'y a pas besoin d'admettre autant; il est facile d'établir la vérité de l'hypothèse de l'angle droit, s'il existe deux triangles inégaux équiangles, sans qu'on doive s'inquiéter de la proportionnalité des côtés.

4. Euclide a pu arriver à se convaincre de la vérité du postulatum par la considération de la figure suivante : On peut construire un triangle ABC ayant deux angles donnés A, B, pourvu que leur somme soit inférieure à deux droits. Prolongeons indéfiniment AC, BC, et, en laissant l'angle B constant, faisons mouvoir BC de manière que B s'éloigne indéfiniment de A. Il est clair que le postulatum serait démontré, si BC rencontrait toujours AC, quelque éloigné de A que fût B, ou si l'angle ABC n'avait pas zéro pour limite. Si cet angle devenait nul, AC et BC, à ce moment, auraient un prolongement unique, ce qui serait absurde (voir Prop. XXXIII). Cet angle ne pouvant devenir nul, AC sera toujours rencontré par BC. Or, si cela a lieu pour un angle A aussi petit qu'on le veut, on peut établir le postulatum (XXVII).

7. On observera ici que Saccheri suppose que si ACB a pour limite zéro, cela signifie qu'il y a un point C où cet angle est nul. C'est, au fond, l'erreur déjà signalée dans la note 3.

XXII. Si un quadrilatère ABDC est birectangle en A et B, et si les angles en C et D sont aigus, on peut mener entre AC et BD une droite MN perpendiculaire à la fois à AB et à CD.

8. Dans sa démonstration, Saccheri admet implicitement que certains angles variables, considérés par lui, varient d'une manière continue, ce qui, au reste, est exact et assez facile à démontrer.

XXIII. Deux droites ou bien ont une perpendiculaire commune, ou se rencontrent à une distance finie, ou enfin se rapprochent sans cesse l'une de l'autre.

Corollaires. 1. Si deux droites se rapprochent sans cesse l'une de l'autre, les perpendiculaires abaissées des points de la première sur la seconde font avec la première des angles obtus du côté des perpendiculaires les plus longues.

Remarque. Si la somme des angles internes, formés par les deux droites avec une sécante, est égale à deux droits, on peut abaisser du milieu de la partie de la sécante interceptée entre les deux droites une perpendiculaire commune.

2. Dans l'hypothèse de l'angle aigu, quand il existe une perpendiculaire commune, les deux droites, d'après III, corollaire 1, s'éloignent sans cesse l'une de l'autre.

9. Ce corollaire 2 est identique, au fond, avec EUCLIDE, I, 27 et 28. Saccheri croit devoir le démontrer, parce que la démonstration d'Euclide s'appuie sur I, 16 : *Dans un triangle, le supplément d'un angle est plus grand que chacun des deux autres.* Or, dans le cas actuel, dit Saccheri, on pourrait objecter que les deux perpendiculaires à une même droite se rencontrent à l'infini, et l'on ne sait pas si I, 16 s'appliquerait à un triangle ayant un côté fini et les deux autres infinis. Comme on le voit, Saccheri accorde une existence réelle aux pseudo-infiniment grands, c'est-à-dire *à de soi-disant quantités déterminées plus grandes que toute quantité donnée.*

XXIV. Deux droites quelconques AX, BY étant données, la seconde BY, perpendiculaire à AB, à A'B', A''B'', A'''B''', A', A'', A''' étant sur AX à des distances croissantes de A et B'B'' étant égal à B''B''', la somme des angles du quadrilatère A'B'B''A'' est inférieure à celle des angles du quadrilatère A''B''B'''A''', si l'on a $A'B' > A''B'' > A'''B'''$, soit que ces droites AX, BY se rencontrent ou non.

Corollaire. Ce théorème serait vrai, même si A'''B''' était une perpendiculaire commune.

Remarque. Dans le cas où les deux droites AX, BY se rapprochent sans cesse, toute perpendiculaire à BY en un point K, au delà de B, du côté où les droites se rapprochent, rencontre AX.

XXV. Dans l'hypothèse de l'angle aigu, si deux droites se rapprochent sans cesse, elles se rapprochent indéfiniment, autrement dit, l'une est asymptote de l'autre.

Corollaires. 1. La proposition précédente a été annoncée dans la remarque 3, après la proposition XXI.

2. On ne peut pas établir la *géométrie euclidienne* en appelant parallèles deux droites perpendiculaires à une même troisième et concluant de cette définition que deux droites faisant avec une troisième des angles dont la somme est inférieure à deux droits se rencontrent à une distance finie ou infinie; car il faudrait démontrer préalablement que ces droites n'ont nulle part de perpendiculaire commune.

XXVI. Dans l'hypothèse de l'angle aigu, si AX est oblique à AB et asymptote à BY, perpendiculaire à AB, toute perpendiculaire à AB, entre A et B, rencontrera AX.

Corollaires. 1. Toute perpendiculaire à AB, en un point situé au delà de B, ne rencontre pas AX, même à l'infini.

2. Une perpendiculaire à AB, en un point suffisamment proche de A, rencontre AX.

3. AX, asymptote de BY, ne peut couper BY; car, si cela arrivait, d'un point de AX, au delà de l'intersection, on pourrait abaisser une perpendiculaire sur AB; le point d'intersection serait au delà de B, et, par suite, on pourrait prouver que BY rencontre AX à une distance finie.

10. Ce corollaire, inutile d'après l'auteur lui-même, repose de nouveau sur l'idée fausse que l'auteur se fait de l'infini.

XXVII. Si une oblique AX à AB, pour un angle BAX suffisamment petit, rencontre, à une distance finie ou infinie, toutes les perpendiculaires BY à AB, quelque grande que soit la distance AB, on peut établir la fausseté de l'hypothèse de l'angle aigu.

Remarques. 1. L'hypothèse de l'angle aigu serait détruite, si l'on pouvait établir que deux droites AX, BY, qui font avec une troisième des angles internes d'un même côté, ayant une

somme inférieure à deux droits, n'ont pas de perpendiculaire commune, quelle que soit la distance AB.

2. Nous avons annoncé le théorème XXVII dans la remarque 4, après XXI.

3. L'hypothèse de l'angle aigu serait détruite aussi, comme on l'a vu (XVII), si, pour tout angle aigu XAB, AX rencontrait BY pour une seule distance AB, si petite qu'elle fût.

XXVIII. Si AX est oblique à AB et asymptote à BY, perpendiculaire à AB, et si XY est perpendiculaire à BY, l'angle AXY est obtus, décroît quand AX croît et a pour limite un angle droit.

Corollaire. AX et BY tendent à avoir une perpendiculaire commune en un point commun à l'infini.

XXIX. Toute droite AC, menée dans l'angle XAB aigu, rencontre la perpendiculaire BY à AB, si AX est asymptote de BY, en un point T, à une distance finie.

Corollaires. 1. Si ZAB est un angle non obtus, supérieur à XAB, AZ n'est pas asymptote de BY.

2. Si T est un point de la perpendiculaire BY à AB, l'angle TAB, quand TB croît indéfiniment, n'a pas de valeur maxima, mais tend vers la limite inaccessible XAB.

XXX. Il n'y a pas de dernière oblique AY à AB ayant avec BY, perpendiculaire à AB, une perpendiculaire commune.

Corollaire. La perpendiculaire commune, quand elle existe pour une oblique AX et une perpendiculaire BY à AB, est d'autant plus petite que l'angle XAB est plus petit.

XXXI. Cette perpendiculaire commune a pour limite zéro, quand l'angle XAB décroît.

XXXII. Dans l'hypothèse de l'angle aigu, il existe un angle XAB, tel que AX ne rencontre pas BY perpendiculaire à AB; toute oblique comprise dans l'angle XAB rencontre BY; toute oblique faisant un angle aigu plus grand que XAB avec AB a, avec BY, une perpendiculaire commune, à une distance finie.

XXXIII. L'hypothèse de l'angle aigu est absolument fausse.

Car, si elle était vraie, l'oblique AX à AB, asymptote à la perpendiculaire BY à AB, aurait à l'infini, avec celle-ci, une perpendiculaire commune, en un point commun, ce qui est contraire à la nature de la ligne droite, comme nous allons le montrer.

11. L'auteur, comme on le voit, s'appuie ici sur la fausse notion de l'infini que nous avons déjà signalée. Les propositions XXII à XXXII, où il étudie avec tant de rigueur l'hypothèse de l'angle aigu, sont exposées pp. 43-70. La proposition XXXIII tient en quatorze lignes, mais l'auteur la fait suivre, pp. 70-85, de cinq lemmes sur les premiers principes de la géométrie; puis, à la page 86, il revient sur sa démonstration de la proposition XXXIII.

Lemme 1. Deux droites ne comprennent pas un espace. Car une droite doit rester immobile quand on la fait tourner autour de deux de ses points comme sur des pivots.

Corollaire 1. Il existe une ligne droite entre deux points fixes, savoir le lieu des points immobiles compris entre deux positions d'une ligne passant par les deux points fixes et que l'on fait pivoter sur ces points fixes.

2. Il existe un plan tel que le définit Euclide.

Lemme 2. Deux droites ne peuvent avoir un segment commun (pp. 73-81).

Corollaire. Deux droites, même infiniment voisines, ne peuvent enclore un espace. Une droite ne peut se bifurquer, même en deux segments infiniment voisins. Du lemme 2 on peut déduire la proposition 4 du livre XI d'Euclide.

Lemme 3. Deux droites qui ont un point commun ne se touchent pas, mais se coupent.

Lemme 4. Tout diamètre divise la circonférence en deux parties égales.

Remarque. Clavius dit que Thalès a démontré cette proposition; mais il ne l'a peut-être pas fait avec rigueur.

Lemme 5. Tous les angles droits rectilignes sont égaux et ne diffèrent pas même infiniment peu.

Corollaire. La perpendiculaire à une droite, en un point, est absolument unique.

Conséquence des cinq lemmes. La démonstration de la proposition XXXIII suit évidemment des lemmes précédents avec leurs corollaires.

Remarque. Nous allons montrer autrement que l'hypothèse de l'angle aigu est fausse.

12. Malgré le vague et l'insuffisance des raisonnements de Saccheri dans les démonstrations des lemmes cités plus haut, malgré ses fausses idées sur l'infini, on observera néanmoins qu'il a bien reconnu que les propositions énoncées lemmes 1 (postulat 6 d'Euclide) et 5 (postulat 4 d'Euclide) ne sont pas de vrais axiomes.

DEUXIÈME PARTIE. XXXIV. L'équidistante d'une droite, dans l'hypothèse de l'angle aigu, est située au-dessus de ses cordes; autrement dit, la corde est située entre la droite et l'équidistante.

XXXV. Elle est en dessous de toute perpendiculaire, en l'un de ses points, à une de ses ordonnées; autrement dit, l'équidistante est située entre la droite et la perpendiculaire.

XXXVI. Cette perpendiculaire lui est tangente; c'est-à-dire que toute droite qui fait un angle aigu avec l'ordonnée de l'équidistante, en un point de celle-ci, la coupe en un second point.

XXXVII. L'équidistante est égale à sa base. Car on peut la diviser en 2^n parties égales, dont chacune, pour $n = \infty$, est infiniment petite, par suite, égale à la tangente qui se confond avec la courbe, *et à la partie correspondante de la base.*

Remarques 1-2. Essai de démonstration de la partie du raisonnement imprimée en italiques.

13. Voici le texte de l'absurde raisonnement résumé dans les mots que nous venons de souligner (KM est une ordonnée de l'équidistante, perpendiculaire à AB en M) : « Infinitesima K, spectans ad curvam, aequalis omnino erit infinitesimae K spectanti ad tangentem. Constat autem infinitesimam K, spectantem ad tangentem, nec majorem, nec minorem, sed omnino aequalem esse infinitesimae M spectanti ad basim AB; quia nempe recta illa MK intelligi potest descripta ex fluxu semper ex aequo ejusdem puncti M usque ad eam summitatem K (p. 92). » Par *infinitesima*, l'auteur entend les points (*punctis, seu mavis infinitesimis*, p. 94). Dans la remarque 1, il dit : *Inde fit ut punctum* M *in ea* BA *censendum sit exactissime aequale puncto* K ! Comment Saccheri n'a-t-il pas vu que ce raisonnement, appliqué à deux circonférences concentriques, permettrait de prouver qu'elles ont des longueurs égales ?

XXXVIII. L'hypothèse de l'angle aigu est fausse. Car, si elle était vraie, l'équidistante, qui a une longueur supérieure à celle de sa corde et, par suite, de sa base, projection de sa corde, devrait aussi être égale à cette base, d'après XXXVII.

Remarque. Dans l'hypothèse de l'angle obtus, l'équidistante aurait sa convexité tournée vers sa base, qui serait plus grande que sa corde. On ne pourrait donc pas faire le raisonnement qui sert à prouver XXXVIII.

XXXIX. Le postulatum d'Euclide est prouvé, comme conséquence de XIII, par le fait de l'exclusion des deux hypothèses de l'angle obtus (XIV) et de l'angle aigu (XXXIII, XXXVIII); la première, par réduction à l'absurde, la seconde, par la nature de la ligne droite et par réduction à l'absurde.

Remarque. L'auteur termine par diverses réflexions sur la marche suivie dans son livre et avoue que sa réfutation de l'hypothèse de l'angle aigu n'est pas parfaite : « Circa hypothesin anguli obtusi res est meridiana luce clarior... Contra vero non devenio ad probandam falsitatem alterius hypothesis, quae est anguli acuti, nisi prius demonstrando quod linea, cujus omnia puncta aequidistent a quadam supposita recta linea in eodem cum ipsa plano existente, aequalis sit ipsi tali rectae; *quod ipsum tamen non videor demonstrare ex visceribus ipsiusmet hypothesis, prout opus foret ad perfectam redargutionem* » (p. 98).

Appendice. On ne peut mesurer les figures, même rectilignes, sans le secours du postulatum, parce que, sans cette proposition, on ne peut subdiviser les rectangles en carrés égaux.

Conclusion. Le livre du P. Saccheri est écrit avec une rigueur vraiment euclidienne, sauf dans les passages où interviennent ses fausses idées sur l'infini et les infiniment petits. Si l'auteur avait étudié Archimède et Newton avec le même soin que les Éléments d'Euclide, il y aurait appris à manier avec précision et sûreté ces expressions conventionnelles de la langue mathématique, et probablement il serait arrivé, un siècle avant Lobatschewsky et Bolyai, à cette conclusion : On peut édifier un système de géométrie parfaitement rigoureux, différent de celui

d'Euclide. Peut-être même aurait-il découvert la géométrie riemannienne, puisque son livre contient quelques propositions qui s'y rapportent, à côté de beaucoup d'autres qui appartiennent à la géométrie de Lobatschewsky.

Mais, malgré ses défauts, l'*Euclides ab omni naevo vindicatus* est l'ouvrage le plus remarquable que l'on ait écrit sur les Éléments avant Lobatschewsky et Bolyai. Il est probable qu'il n'a pas été sans influence sur le développement de la science. Il n'est pas resté inconnu; il a été l'objet d'un compte rendu (superficiel, il est vrai) en 1736, dans les *Acta Eruditorum*. Il se trouvait probablement à la bibliothèque de Göttingen vers 1800, car il est marqué d'un astérisque dans la *Bibliotheca mathematica* de Murhard; dans cet ouvrage il est signalé (t. II, p. 43) parmi les écrits consacrés à l'explication, à la critique ou à la défense d'Euclide (*Einleitungs- und Erläuterungsschriften, auch Angriffe und Vertheidigungen des Euklides*). Il a donc eu quelque notoriété, et l'on peut conjecturer qu'il n'a échappé ni à Gauss, ni aux autres géomètres qui se sont occupés, dans la première moitié de ce siècle, des principes fondamentaux de la géométrie. Quoi qu'il en soit, le P. Saccheri est, chronologiquement, le premier qui ait écrit une vraie étude critique sur le postulatum, et il doit être regardé comme le précurseur des géomètres non euclidiens modernes (Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1889-1890, t. XIV, 2e partie, pp. 46-59).

RELATION ENTRE LES DISTANCES DE CINQ POINTS EN GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE.

1. Tout système de géométrie à trois dimensions, comme l'a fait observer M. De Tilly (*Bulletins de l'Académie de Belgique*, 3e série, t. XIV, p. 1015, lignes 21 à 25), est caractérisé par une relation de forme non arbitraire (voir n° 5), existant entre les mesures des distances mutuelles d_{α} de cinq points quelconques.

2. En rendant rigoureux les raisonnements de Legendre exposés dans la note deuxième de ses *Éléments de Géométrie*, on peut établir la proposition suivante :

La relation entre les distances de cinq points qui caractérise un système de géométrie non euclidienne existe entre les rapports des distances de ces points à une distance Δ spéciale à ce système ; la relation qui caractérise la géométrie euclidienne, au contraire, ne contient que les dix distances des cinq points considérés et subsiste quand on multiplie chacune des distances par un nombre quelconque.

Cette proposition est identique à la remarque suivante de Gauss : « Dans la géométrie euclidienne, rien n'est grand d'une manière absolue ; mais il n'en est pas de même dans la géométrie non euclidienne, et c'est là précisément son caractère essentiel. Ceux qui n'accordent pas ce fait établissent déjà par cela même toute la géométrie euclidienne. » (Lettre à Schumacher du 12 juillet 1831, p. 40 de la traduction, par Houel, des *Études géométriques sur la théorie des parallèles*, de Lobatschewsky.)

3. La relation euclidienne entre les distances de cinq points, trouvée par Lagrange et mise par Cayley sous la forme

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & d_{15}^2 \\ 1 & d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & d_{25}^2 \\ 1 & d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 & d_{35}^2 \\ 1 & d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 & d_{45}^2 \\ 1 & d_{15}^2 & d_{25}^2 & d_{35}^2 & d_{45}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

devient, par un calcul semblable à celui de Cayley,

$$| 1, \ y, \ z, \ t, \ u |^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

si l'on pose

$$d_{ik}^2 = (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 + (t_i - t_k)^2 + (u_i - u_k)^2.$$

4. La relation non euclidienne analogue est

$$\begin{vmatrix} (11) & (12) & (13) & (14) & (15) \\ (12) & (22) & (23) & (24) & (25) \\ (13) & (23) & (33) & (34) & (35) \\ (14) & (24) & (34) & (44) & (45) \\ (15) & (25) & (35) & (45) & (55) \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

où $(ik) = \cos\left(\frac{d_{ik}}{\Delta}\right)$, ou $\mathrm{Ch}\left(\frac{d_{ik}}{\Delta}\right)$, Δ étant la quantité caractéristique dont il est question plus haut. En posant

$$(ik) = X_iX_k + Y_iY_k + Z_iZ_k + T_iT_k + U_iU_k,$$

la relation non euclidienne prend la forme

$$| X, Y, Z, T, U |^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

En faisant $\Delta = \infty$ dans la relation (2), on peut en déduire la relation (1).

Si, dans les déterminants (1'), (2'), on suppose nulles toutes les coordonnées situées au-dessus de la diagonale, on trouve que les éléments restants du déterminant (2') ont pour limite les éléments restants du déterminant (1'), quand $\Delta = \infty$.

5. *Théorème des six points.* Si l'on écrit en abrégé la relation (1') ou la relation (2') sous la forme (12345) = 0, on prouve aisément, au moyen de la remarque qui termine le n° 4, que les relations

$$(12345) = 0, \quad (12346) = 0, \quad (12356) = 0$$

ont pour conséquences

$$(23456) = 0, \quad (13456) = 0, \quad (12456) = 0.$$

Les relations (1) et (2), comme nous l'a fait observer M. De

Tilly, ne pourraient servir à caractériser les propriétés d'un espace homogène, si elles ne jouissaient pas de la propriété exprimée dans ce théorème, dit *théorème des six points.*

6. La relation non euclidienne peut se mettre sous la forme suivante :

$$(\sin\delta_{12}\sin\delta_{13}\sin\delta_{14}\sin\delta_{15}\sin\delta'_{23}\sin\delta'_{24}\sin\delta'_{25}\sin\delta''_{34}\sin\delta''_{35}\sin\delta'''_{45})^2 = 0,$$

et la relation euclidienne sous une forme équivalente.

On pose $\Delta\delta_{ik} = d_{ik}$ (si la relation contient des cosinus circulaires), $\Delta\sqrt{-1}\delta_{ik} = d_{ik}$ (si la relation contient des cosinus hyperboliques), puis

$$(23) - (12)(13) = \sin\delta_{12}\sin\delta_{13}\cos\delta'_{23},$$
$$(24) - (12)(14) = \sin\delta_{12}\sin\delta_{14}\cos\delta'_{24},$$
$$(25) - (12)(15) = \sin\delta_{12}\sin\delta_{15}\cos\delta'_{25},$$
$$(34) - (13)(14) = \sin\delta_{13}\sin\delta_{14}\cos\delta''_{34},$$
$$(35) - (13)(15) = \sin\delta_{13}\sin\delta_{15}\cos\delta''_{35},$$
$$(45) - (14)(15) = \sin\delta_{14}\sin\delta_{15}\cos\delta''_{45},$$

$$\cos\delta'_{34} - \cos\delta'_{23}\cos\delta'_{24} = \sin\delta'_{23}\sin\delta'_{24}\cos\delta''_{34},$$
$$\cos\delta'_{35} - \cos\delta'_{23}\cos\delta'_{25} = \sin\delta'_{23}\sin\delta'_{25}\cos\delta''_{35},$$
$$\cos\delta'_{45} - \cos\delta'_{24}\cos\delta'_{25} = \sin\delta'_{24}\sin\delta'_{25}\cos\delta''_{45},$$
$$\cos\delta''_{45} - \cos\delta'_{34}\cos\delta''_{35} = \sin\delta''_{34}\sin\delta''_{35}\cos\delta'''_{45}.$$

(Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1890-1891, t. XV, première partie, pp. 8-11.)

UN

ASTRONOME BELGE DU XVII^e SIÈCLE

GODEFROID WENDELIN (1);

PAR M. C. LE PAIGE,

Professeur à l'Université de Liège, membre de l'Académie royale de Belgique.

Il y a plusieurs années déjà, lorsque j'ai essayé de reprendre l'œuvre commencée par le savant et regretté Adolphe Quetelet, et de retracer la vie des mathématiciens qui ont illustré la Belgique, j'ai rencontré quelques figures qui m'ont séduit d'abord. Ailleurs, j'ai tâché de faire revivre l'un de nos plus grands géomètres : René-François de Sluse; aujourd'hui, je voudrais faire le portrait d'un homme que son pays natal a trop oublié : Godefroid Wendelin.

C'est une figure sympathique entre toutes que celle de cet aventureux astronome que son humeur inquiète conduit à travers l'Europe et qui, dans les situations les plus diverses, parfois les plus difficiles, ne cesse de poursuivre une idée, de ce savant que nous rencontrons, à l'aurore de la vie, poussé par un secret instinct vers les observations célestes, et que nous retrouvons, au déclin de ses jours, à plus de quatre-vingts ans, fidèle aux premières passions de sa jeunesse.

C'est en outre un type complexe, moins rare au XVII^e siècle qu'aujourd'hui, un savant pour qui les champs des cieux ne sont pas assez larges encore.

Entraîné par l'amour des vieilles gloires de la terre fla-

---

(1) Discours prononcé dans la séance publique de la Classe des sciences, le 16 décembre 1890. *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 3^e sér., t. XX, n° 12, pp. 709-727, 1890.

mande, il s'essaye à expliquer l'origine et les difficultés de la loi salique en mettant au service de ses recherches sa profonde connaissance de la langue thioise et toute l'ingéniosité d'un esprit aiguisé par des observations multiples dans le vaste domaine de la nature; c'est encore un charmant écrivain qui peut rivaliser, dans l'épigramme latine, avec un maître, Constantin Huygens, et lutter, dans un tournoi de *concetti*, avec les poètes provençaux.

Son imagination ardente le pousse à scruter les époques les plus lointaines, les plus ténébreuses de l'histoire : émule du grand Newton, il ne craint pas de s'aventurer, comme lui, dans les forêts mystérieuses de la chronologie.

Il ne me serait guère possible, aujourd'hui, de suivre notre savant sur les routes diverses qu'il a parcourues : il me suffira de parler de l'homme et d'exposer ses recherches astronomiques, heureux si je ne suis pas trop au-dessous de la tâche que j'ai assumée, même en la circonscrivant de la sorte.

Godefroid Wendelin naquit à Herck, une des bonnes villes de l'ancien pays de Liège, le 6 juin 1580, aux limites de ce XVI^e^ siècle qui vit remuer tant d'idées, s'accumuler tant de travaux, tant de recherches.

Toute sa vie, il semble porter la marque de cette époque avide de retrouver les richesses de l'antiquité tout à coup dévoilée, accumulant des trésors que les âges futurs devaient mettre en œuvre. Il a gardé, du XVI^e^ siècle, la soif inextinguible du savoir, le besoin de tout scruter, l'infatigable ardeur au travail : mais ces qualités, il les joindra à celles qu'apporte avec lui un siècle nouveau, et il ne sera pas indigne d'être le contemporain de Huygens, de Gassendi, de Pascal.

La petite ville où Wendelin vit le jour possédait alors une école latine dirigée par un savant modeste, Henri Alen.

Celui-ci, avec ses fonctions de recteur, cumulait celles de secrétaire de la ville, ce qui ne l'empêchait pas, à l'occasion, de composer des vers grecs d'assez bonne tournure : on connaissait les langues savantes à cette époque. Des liens de parenté l'unissaient peut-être à notre héros, car il en fut le parrain.

C'est sous ce maître que notre compatriote fit ses premières études : dès l'abord, il s'y distingua : à treize ans, il écrivait en latin des vers iambiques qui excitèrent l'admiration.

Sans nul doute, l'étude des sciences exactes ne devait pas occuper une bien large place dans l'école de Herck, mais on se tromperait peut-être si l'on croyait qu'elle y était entièrement délaissée. L'attention de l'enfant était attirée déjà vers le spectacle des grands phénomènes célestes, au point que les circonstances d'une éclipse de lune, arrivée en 1590, ne le laissèrent pas indifférent.

L'école latine n'étant probablement pas organisée de façon à permettre au jeune Wendelin d'y terminer ses humanités, ses parents résolurent de l'envoyer à Tournai.

Le jour même de son départ pour le collège des Jésuites, le 24 avril 1595, est marqué par une éclipse de lune : les anciens auraient vu un présage dans cette coïncidence. Pour nous, bornons-nous à noter que maint événement de la vie de notre savant est caractérisé de la sorte.

Ce n'était pas mince chose, à cette époque, que de quitter la maison paternelle pour s'en aller au loin : la nuit entière, toute la famille s'occupe des préparatifs du départ; seul, Wendelin ne peut s'arracher entièrement à l'observation du phénomène qui le frappe, et il en note les phases comme il le peut.

Son séjour à Tournai ne fut pas de longue durée : trois

ans plus tard, le 21 février 1598, notre jeune humaniste suit les cours de l'université de Louvain.

Cette date, c'est Wendelin encore qui nous la conserve, car elle lui rappelle une éclipse de lune : heureux souvenir qui nous permet, comme par une échappée, de jeter un regard sur la vie laborieuse des étudiants d'alors : « L'éclipse, dit Wendelin, commença un peu après quatre heures, au moment où nous nous éveillions pour réciter nos prières et nous mettre au travail : à coup sûr, il n'était pas quatre heures et quart. »

Ne vous semble-t-il point entendre cet autre écolier, « l'ornement de son siècle », nous dit Guillaume du Val en son *Collège de France*, Henry de Mesmes, écrivant dans ses Mémoires : « Nous étions debout à quatre heures et, ayant prié Dieu, allions à cinq heures aux estudes, nos gros livres sous le bras, nos écritoires et nos chandeliers à la main »? Ceci se passait, en 1545, à l'université de Toulouse.

Ces habitudes matineuses, Wendelin les conserva dans la suite. En 1608, lorsqu'il habite Forcalquier, nous le voyons, devançant l'aurore. Un livre à la main, il s'éloigne de la cité : épris du calme de la nature, il s'en va pour jouir des senteurs de la campagne, pour goûter la fraîcheur des primes heures du jour; c'est ainsi qu'une première fois il put observer la pluie rouge.

A Louvain, Wendelin compléta surtout son éducation littéraire; il aborda l'étude de l'hébreu et s'y rendit habile.

Quant aux mathématiques, il dut retirer peu de profit des enseignements de l'*Alma Mater*.

Depuis 1593, les leçons brillantes d'Adrien Romain avaient cessé : l'émule de Viète avait été appelé à Wurtzburg, et son successeur, Jean Storms de Malines, malgré les éloges que lui décerne Valère André, ne fut jamais

qu'un pauvre versificateur dont toute l'activité se borna, pendant un demi-siècle, à mettre en soi-disant vers la physique d'Aristote, l'expression approchée du rapport de la circonférence au diamètre, ou les différentes formes du carré magique de 16.

Faut-il s'étonner que Wendelin ait voulu s'abreuver à des sources plus pures et plus abondantes ?

Cédant, pour la première fois, à ce besoin de déplacement qui l'agita toute sa vie, il résolut de se rendre à Prague. Peut-être y était-il attiré par le désir de s'attacher à Tycho-Brahé, qui résidait alors dans cette ville. Il ne lui fut pas donné d'atteindre le but de son voyage, et le pays de Liège, qui faillit, à cette époque, donner asile au grand astronome danois, n'eut pas même l'heureuse fortune de voir un de ses enfants parmi les disciples du célèbre observateur.

Parti avec un de ses amis, Wendelin fut obligé, par la maladie, de s'arrêter à Nuremberg. Ce retard forcé donna un autre cours à ses idées. Il revint à Herck, mais n'y passa qu'un instant.

Bientôt nous le voyons se diriger vers le midi.

En 1599, il est à Marseille, dont il détermine la latitude : ce fut, sans nul doute, son premier travail astronomique sérieux, et il semble se rattacher à un projet qu'il poursuivit durant de longues années.

Mais, éloigné des siens, dans un pays étranger, la vie devait lui être parfois difficile : un moment, Wendelin devint correcteur d'imprimerie; ce ne fut qu'un emploi passager.

En 1600, le désir de gagner l'indulgence du jubilé le conduit à Rome ; il parcourt l'Italie et, finalement, revient à Marseille.

La Provence allait le posséder longtemps. Il s'établit

d'abord à Digne : on ne sait au juste s'il fut régent au collège ou s'il ouvrit une école de mathématiques; mais on rapporte volontiers qu'il compta parmi ses élèves le célèbre Gassendi. Sorbière, Colomiez, et, ce qui est plus probant, Mantelius, qui semble tenir ses renseignements de Wendelin, Valère André, qui publia sa *Bibliotheca belgica* du vivant de notre astronome et de l'illustre prévôt de Digne, affirment la chose; mais le P. Bougerel, le biographe du grand adversaire de Descartes, combat ce sentiment par d'assez bonnes raisons.

De Digne, Wendelin passa à Valensole : deux années de suite il conquit dans cette ville, à la suite d'un concours public, une des chaires du collège; à la rentrée de 1604, il renonça à la lutte, non pas qu'il la craignît, mais parce qu'il avait donné suite à de nouveaux projets.

Un instant il était revenu au pays natal, mais la brumeuse Campine et ses bruyères mélancoliques ne pouvaient lutter avec le brillant soleil de la Provence, devenue une seconde patrie pour l'ardent voyageur; aussi est-ce sans étonnement que nous voyons notre compatriote regagner rapidement le midi.

Il y trouva d'ailleurs une hospitalière demeure chez André d'Arnaud, seigneur de Miravail, lieutenant général de la sénéchaussée de Forcalquier.

Ami des lettres, auteur lui-même de vers charmants, André d'Arnaud choisit Wendelin comme précepteur de ses enfants : notre savant rencontra chez lui un foyer familial; il s'y trouvait assis, non comme un hôte passager, mais comme un ami.

Lui avec Peiresc, avec Gassendi, avec cent autres, le vavasseur était, comme eux, un curieux. Il avait amassé une riche bibliothèque, où figuraient avec honneur quelques joyaux, comme ce *Codex argenteus*, ce manuscrit de Jean

de Linières que l'astronome belge dut feuilleter tant de fois.

Wendelin ne se borna pas, en effet, à faire l'éducation des enfants d'André d'Arnaud — l'un de ceux-ci, d'ailleurs, Scipion, était presque de l'âge du précepteur et fut pour lui plutôt un compagnon qu'un élève, — l'enseignement des langues mortes et de l'histoire n'occupait pas tout son temps. Et, au surplus, ce n'était pas avec un homme de cette trempe que les journées pouvaient limiter le travail : les nuits étaient à lui, les nuits pendant lesquelles, grâce à l'admirable transparence du ciel de la Provence, il pouvait observer quand il le voulait. Puis, nous l'avons vu, au besoin il devançait le jour.

Au reste, tout lui était sujet d'étude : si, pendant une grande partie de l'année, la famille d'Arnaud, retenue par les fonctions de son chef, habitait Forcalquier, quelques mois étaient réservés à un séjour au pied des Alpes, à Chateauneuf-Miravail. Wendelin savait y continuer, y étendre même ses travaux.

De la terrasse du château, il pouvait se livrer à ses observations aimées; en outre, le pays lui fournissait des sujets bien dignes d'exciter sa curiosité.

A quelque distance du château s'élève la montagne de Lure; Wendelin ne craint pas d'en escalader les deux mille mètres : c'est que du haut de cette pointe isolée des Alpes, il domine la Provence tout entière : au loin, la chaîne du Dauphiné et, entre les deux, la vallée merveilleuse, Miravail, le domaine de son ami et protecteur.

Souvent les brouillards enveloppent la montagne : Wendelin monte alors jusqu'à la cîme, et son enthousiasme éclate lorsque, dominant la nue, il voit au-dessus de sa tête briller le resplendissant soleil.

Mais à ses pieds, sur l'autre versant, s'étend une sorte d'abîme qu'atteint à peine la lumière du jour : dans leur langue imagée, les hommes du midi l'appellent l'Enfer. De cette sombre vallée, parfois s'élève comme la fumée d'une chaumine. Alors, malheur à celui qui ne fuit pas. Soudain le tonnerre gronde, la foudre éclate, la grêle tombe. Spectacle étrange et grandiose dans son horreur, qui, plus d'une fois, a frappé notre savant lorsque, descendant du sommet de Lure, où il était seul en face du ciel azuré, il entend tout à coup à ses pieds le roulement du tonnerre, il aperçoit, dans la triste vallée, la foudre qui brise et qui tue, il voit les ravages produits par le vent qui déracine les arbres et renverse les habitations.

A près d'un demi-siècle de distance, ce souvenir viendra l'assaillir : il semble encore avoir sous les yeux ce spectacle affreux de désolation et de mort.

Huit années s'écoulèrent ainsi, partagées entre l'enseignement et l'étude, huit années d'une vie paisible pendant lesquelles Wendelin poursuit, aidé par Scipion d'Arnaud, ses observations célestes, ne manquant pas une occasion d'augmenter son catalogue d'éclipses.

En passant, il note tous les phénomènes naturels qui le frappent, comme cette pluie rouge des premiers jours de juillet 1608, dont j'ai déjà parlé, et qui éveilla, à un si haut degré, l'attention de Peiresc; comme encore cette invasion de papillons dont les essaims nombreux obscurcissent le soleil en Grèce, en Italie, et qui, traversant les Alpes, envahissent la Provence et vont plus loin encore, jusqu'aux extrêmes frontières de l'Espagne.

Ce furent certes les heures les plus heureuses de sa vie. Comme il s'abreuve, avec délices, à cette « source bonne » que lui offre la bibliothèque de son hôte, comme il jouit des amitiés fidèles qui l'entourent !

Le souvenir des heures passées à Forcalquier ne s'effacera plus de sa mémoire : « c'est la Provence, dit-il en 1628, dans une lettre à Peiresc, qui lui a donné le premier teinct des mathématiques, et il espère qu'elle en esclorra les fruicts », car il compte toujours revoir cette seconde patrie ; il va presque, dans son affection pour elle, jusqu'à médire de la terre natale : « ne voullant pas croupir dans cet air très sombre où il ne peut jamais faire observation qui vaille » ; il n'a pas même oublié les vendanges — il écrit au mois de septembre, — et s'il exprime à Peiresc son désir « d'estancher la soif qui le presse de humer le suc de sa bibliothèque », il avoue qu'il ne dédaignerait pas de venir « gouster le vin nouveau ». Ce qu'il n'a point oublié surtout, ce sont les nombreux et fidèles amis qu'il a laissés derrière lui et, avant tous, son élève, son compagnon, Scipion d'Arnaud, celui qu'il appelle son Arnaud.

Cependant, il fallut abandonner les vallées ensoleillées de la Provence et les pics escarpées de Lure pour les plaines monotones de la Campine. Les enfants d'André d'Arnaud sont d'âge à se passer d'un précepteur; les parents de Wendelin sont morts; il a des intérêts à régler dans les Pays-Bas. Une dernière fois il salue la terre provençale et il part, entreprenant à pied la route immense de Forcalquier à Herck.

Peut-être est-ce à ce moment qu'il s'arrêta à Paris et qu'il y conquit le diplôme de docteur en droit. Un instant même, s'il faut en croire des biographes, il songe à s'établir dans la grande ville et à y exercer la profession d'avocat; projet bien vite évanoui : Wendelin s'achemine de nouveau vers nos contrées.

Le 14 mai 1612 il est à Liège et, le jour même où il foule le sol natal, il lui est donné de pouvoir observer une éclipse de lune.

Son retour quelques années plus tôt eût été, peut-on croire, utile aux progrès de l'astronomie dans notre pays; le trône épiscopal de Liège était occupé alors par un prince fort épris de science, qui sut, à l'occasion, protéger Tycho-Brahé et Kepler. Il n'est pas téméraire de penser qu'Ernest de Bavière, qui entretenait deux astronomes dans son palais, qui se livrait lui-même à des travaux scientifiques, eût protégé un enfant du pays de Liège, qui revenait précédé de la réputation de savant universel.

Mais Ernest de Bavière était mort le 17 février de cette année, et il ne semble pas avoir légué ses goûts à son neveu et successeur, Ferdinand.

L'ardeur de Wendelin pour les lointains voyages semble momentanément calmée; il a trente-deux ans et prend la résolution d'entrer dans les ordres. Pendant plusieurs années, il poursuit ses études théologiques et reçoit enfin, à Malines, le 21 décembre 1619, le sous-diaconat. Bientôt il est nommé curé de Beets; c'est là que nous le trouvons, observant une éclipse, le 9 décembre 1620.

Nous ne savons au juste combien de temps il dirigea cette paroisse; il rapporte des observations qu'il y fit jusqu'en 1631, et, en 1632, le 26 avril, lorsqu'il publie son éloge de la Toison d'or, il est encore pasteur du modeste village.

A cette époque, il est déjà célèbre; Erycius Puteanus proclame qu'il sait tout ce qu'on peut savoir ou que, si pareille science n'est point permise à l'homme, il ignore le moins possible; le conseil des finances lui octroie un subside annuel de cent-vingt florins et, pour apprécier la valeur de cette somme, on doit se rappeler que la chaire de mathématiques à Louvain valait deux cents florins à son possesseur; enfin, l'infante Isabelle, qui semble avoir

hérité du goût de son aïeul Charles-Quint pour l'astronomie, accorde à Wendelin une prébende de chanoine de Condé.

Ce n'est pas à Beets seulement que nous rencontrons notre savant; il est tantôt à Liège, tantôt à Bruxelles, à Anvers surtout, où l'appelle l'impression de son premier ouvrage, de son *Loxias*, qui constitue l'un de ses principaux titres scientifiques.

Bientôt il échange la cure de Beets contre celle de Herck, sa patrie; en 1635, le 3 mars, c'est dans cette ville qu'il observe une éclipse de lune, et pendant quinze ans il y poursuivra ses recherches astronomiques.

C'est dans le cimetière même qui entoure son église qu'il a établi ce qu'on peut appeler son observatoire; les deux tours du temple lui servent de mires. A ses côtés, il a disposé des sabliers, des cadrans sciatériques pour fixer l'heure des phénomènes; l'ombre de la lune, au besoin une visée, lui permettra de préciser les instants. Puis il s'aide de la sonnerie de l'horloge, non pas comme d'un moyen absolu, mais afin de déterminer les différences de temps. Ensuite il faut voir de quels moyens il fait usage pour mesurer avec exactitude les durées fort petites; il pourrait se servir des pulsations de l'artère, mais ce procédé lui inspire peu de confiance, car il dépend trop de l'état de santé, de la situation d'esprit où l'on se trouve; il a mieux que tout cela. Depuis sa jeunesse, il s'est exercé à réciter d'une manière uniforme le poème d'Hésiode : *Les œuvres et les jours*, trente vers par minute, un hémistiche par seconde. Nos astronomes se contenteraient difficilement de pareils instruments; mais ils n'étaient pas si défectueux entre les mains de qui savait en user, puisque, avec de pareils moyens, dès que l'emploi du pendule à secondes

se fut introduit, Wendelin, qui fut l'un des premiers à s'en servir, sut découvrir les causes principales d'inégalité des battements. Contrairement à l'affirmation de Galilée, il proclame l'influence de l'amplitude, et, qui plus est, un demi-siècle avant Lahire, il voit que les oscillations, en moyenne, sont plus longues en été qu'en hiver. Sans doute, il n'aperçoit par les causes immédiates du phénomène, mais, plus habile que Huygens et que Wallis, avertis cependant par lui, il découvre le fait lui-même. Cette observation fait le plus grand honneur à sa sagacité et à son habileté d'observateur. Faut-il ajouter que, pour rendre plus sensibles les inégalités qu'il constate, il se sert d'un pendule de quarante-deux pieds environ?

Il est curieux de voir combien il a su intéresser ses parents, ses confrères, ses paroissiens même à ses travaux.

Lorsqu'il est appelé à Bruxelles, à Anvers, ses frères le suppléent à Herck dans l'observation des éclipses; lorsqu'il observe lui-même, on voit le pasteur d'un village voisin, le curé de Donck, partager ses labeurs; il s'est créé des aides-astronomes, des jeunes gens intelligents et doués d'une excellente vue, qu'il associe à ses travaux; bien plus, c'est le secours des habitants qu'il invoque. Ils sont là, à quelque distance de lui-même, le contrôlant, notant le moment précis d'un phénomène.

Si, comme il y a lieu de le croire, il prenait la moyenne des résultats, il devait obtenir des nombres d'une exactitude fort grande; c'est, en effet, ce qui semble résulter de la concordance entre les données de ses observations et celles de ses calculs.

Je l'ai dit déjà : parfois il quittait sa paroisse, même au moment où il fallait observer une de ces éclipses qu'il aimait tant à noter; c'est qu'ailleurs il trouvait des instal-

lations meilleures que les siennes. A Bruxelles, c'est de préférence chez son ami Jean-Jacques Chifflet qu'il s'arrête, sans pour cela dédaigner l'accueil du comte de Bucquoi, du marquis de Torrès, du président Roose, du chancelier Boisschot; à Anvers, c'est le pensionnaire Jacques Edelheer qui le reçoit. Ce jurisconsulte n'est pas tant absorbé par ses charges de judicature qu'il ne puisse établir dans sa demeure un cercle mural excellent, dû aux mains habiles de l'élève, on dirait aujourd'hui l'assistant, de Descartes, Gérard van Gutschoven.

Le pensionnaire n'est pas seul à se servir de l'instrument; le 27 septembre 1643, par exemple, nous trouvons réunis chez lui, pour observer une éclipse, avec Wendelin et Gutschoven, le secrétaire de la ville, Gaspar Gevaert, un savant et un poète; le trésorier Jean van Eyck et même une dame, Anna Romer, tous entraînés par l'exemple de Wendelin.

L'âge n'a pas, on le voit, refroidi l'ardeur de notre savant; il ne cesse de parcourir les bibliothèques, de profiter de toutes les occasions qui s'offrent à lui d'augmenter ses connaissances, de pénétrer plus profondément dans les secrets de la nature. Il excite ses amis, ses correspondants à lui communiquer leurs découvertes, leurs observations. Sa réputation s'est étendue dans l'Europe entière : Gassendi, Naudé, Mersenne, Boulliaud, Petau, Huygens citent à l'envi ses travaux; Descartes, qui place si haut, et avec raison, sa Géométrie, met Wendelin au petit nombre des mathématiciens dignes de l'apprécier et désire vivement connaître le jugement qu'il en porte.

Un phénomène dont j'ai dit un mot déjà vint davantage encore appeler l'attention sur notre savant : c'est cette pluie rouge dont il a entendu parler dans son enfance, en

1590, dont il a été témoin une première fois, en 1608, à Forcalquier, et qui se reproduisit à Bruxelles le 6 octobre 1646.

Avec son ami Jean-Jacques Chifflet, Wendelin entreprend de donner l'explication de la pluie merveilleuse; il goûte l'eau recueillie et lui trouve une saveur analogue à celle des eaux de Spa; il rapproche le fait de coloration d'autres phénomènes naturels et attribue la couleur rosée de la pluie au mélange, à la vapeur d'eau, de vapeurs bitumineuses et sulfureuses.

Le petit livret où Wendelin rapporte cette explication fut bientôt entre toutes les mains. En peu de temps il fut imprimé deux fois à Bruxelles, la seconde édition avec des additions. La même année (1647) il fut réimprimé à Paris; en 1655, il trouva un nouvel éditeur à Londres. Jean-Jacques Chifflet, Gassendi, Plempius, Gaspar Gevaert, René Moreau, Robert Fervacque écrivirent de nombreuses lettres sur ce sujet; un professeur de Prague, Jean-Marc Marci, trop peu apprécié jusqu'ici, publia en 1647 un opuscule sous le même titre que celui du savant belge.

Le travail de Wendelin n'appelait pas seulement l'attention sur un phénomène météorologique qui se reproduisit en 1571, en 1590, en 1608, en 1638, en 1645, en 1646; il contenait une foule d'idées ingénieuses sur la constitution de la terre, sur l'existence d'un noyau liquide en ignition, sur l'attraction naturelle de la terre et de la lune, cause des marées, sur le mouvement elliptique des planètes.

La modeste cure de Herck, même un canonicat de Condé, ce pouvait sembler peu de chose pour un savant dont notre pays avait le droit d'être fier. Cependant, heureux au milieu de ses livres et de ses instruments, par-

tout accueilli comme il le méritait, Wendelin n'aurait probablement pas songé à se plaindre de voir les honneurs loin de lui. Mais les honneurs vinrent le chercher dans sa solitude de Herck : l'évêque de Tournai le nomma chanoine de sa cathédrale et même lui confia les fonctions d'official (1649).

Wendelin, revenu aux lieux où s'étaient écoulées quelques années de sa jeunesse, s'acquitta avec zèle de sa charge, mais n'en continua pas moins à observer les astres, car il ne faut pas croire la méchante remarque de van Langren dans une lettre à Bouillaud, que « le bon Vendelin ne faict plus rien, il se contente de sa bonne chanoinie à Tournay (7 sept. 1652). » La publication du *Teratologia cometica* vint donner un éclatant démenti à cette accusation de paresse.

Faut-il croire que le poids de l'âge commençait à se faire sentir, sept ans plus tard, lorsque notre astronome commit cette grosse erreur de calcul que lui reproche Huygens, au sujet de l'éclipse du 14 novembre 1659? « L'erreur du bonhomme Wendelinus, dit-il dans une lettre à Bouillaud du 11 décembre de cette année, a esté plaisante en cette même éclipse, car il l'attendoit un jour auparavant qu'elle ne devoit arriver, et cela avec toute la préparation nécessaire et en compagnie de plusieurs qu'il avoit conviéz. »

L'erreur était fort excusable, et Wendelin était encore robuste et plein de projets : il le montra bien lorsqu'il voulut, au commencement de l'année 1660, revoir sa chère Campine. Dans ce voyage il s'arrêta à Hasselt, fit cadeau de ses œuvres à son ami l'historien Mantelius et lui indiqua les nombreux travaux qu'il comptait publier encore.

Cependant, s'il faut en croire la plupart des historiens, sa vie ne se serait guère prolongée au delà de cette époque: il serait mort à Renaix, en 1660, après avoir renoncé à son canonicat de Tournai. Néanmoins on peut observer que dans son histoire de Hasselt, publiée en 1663, Mantelius ne parle pas de la mort de son ami, et que, d'après un portrait qui figure dans un ouvrage du savant Ghesquière, Wendelin n'aurait cessé de vivre qu'en 1667.

Il ne nous reste maintenant qu'à jeter un coup d'œil rapide sur l'œuvre de notre savant astronome, sur le travail accumulé pendant cette longue et laborieuse existence.

Dès sa jeunesse, comme nous l'avons dit, il détermina la latitude de Marseille : c'était le premier effort qu'il fit pour élucider une question née de l'examen d'une observation de l'ombre du gnomon, due à Pythéas.

La valeur de l'obliquité de l'écliptique, déduite de cette antique détermination, ne concordait point avec celle que divers astronomes avaient calculée.

Wendelin se refusait à croire à une variation brusque de cette obliquité; avec son esprit investigateur, il prévoyait l'existence d'une loi qu'il fallait découvrir, vérifier ensuite. Alors que Tycho-Brahé avait cru devoir conclure à un accroissement momentané et singulier de l'obliquité, le jeune astronome ne pouvait admettre une modification inexpliquée d'une loi naturelle.

Tout d'abord, il démêle, avec une grande sagacité, les causes d'erreur qui peuvent influer sur la grandeur de la constante à calculer.

Il faut déterminer avec le plus grand soin la latitude des lieux où l'on observe, tenir compte des réfractions et enfin de la parallaxe solaire.

Avec une persévérance remarquable, Wendelin poursuivra, durant une longue série d'années, le cours de ses observations; pendant un quart de siècle, il accumule les résultats avant de publier son *Loxias*, et, plus tard, après l'apparition de son livre, il réunira tous les éléments nécessaires pour perfectionner son œuvre.

En premier lieu, il constate que les anciennes observations des latitudes, obtenues à l'aide du gnomon, doivent être corrigées du demi-diamètre apparent du soleil.

C'est ainsi qu'il est amené à poursuivre pendant plusieurs années, de 1605 à 1612, à Forcalquier, des recherches sur le diamètre apparent du soleil, en recevant sur un écran l'image de cet astre, par une ouverture étroite exactement mesurée.

Cette correction lui donne pour la latitude d'Alexandrie, élément essentiel de la question qu'il étudie, 31° 13′; d'un autre côté, la même latitude, déterminée par Ératosthènes à l'aide d'une observation d'étoile, est de 31° 9′; des considérations géodésiques enfin conduisent à admettre un nombre un peu différent : 31° 8′ 35″. Wendelin prend la moyenne approchée de ces trois résultats et fixe la latitude à 31° 10′.

De même, il reprend, avec le plus grand soin, le calcul de la distance du soleil ou, ce qui revient au même, de la parallaxe solaire. Il applique la méthode des dichotomies d'Aristarque de Samos et fait usage du télescope dès que la connaissance de cet instrument s'est généralisée.

Il fixa ainsi à une minute la parallaxe solaire. C'était déjà une valeur bien plus approchée que celle dont ses contemporains faisaient usage.

Armé de la sorte, il reprend la détermination de l'obliquité de l'écliptique et en constate la diminution continue depuis l'époque l'Ératosthènes.

Il va plus loin, car il exprime la loi du phénomène et en assigne même la période.

D'une façon absolue, cette loi n'est pas exacte; elle diffère de celle de Laplace, elle détermine la période d'un phénomène dont la périodicité n'est pas reconnue, même de nos jours. Mais, d'un autre côté, pour une durée relativement longue, la formule qui traduit sa loi représente assez bien la variation de l'obliquité de l'écliptique.

Wendelin ne s'en tint pas à ce premier essai; pendant vingt ans, il reprit différentes fois la question. C'est ainsi qu'il pria son ami Gassendi de refaire les observations du gnomon à Marseille, pour discuter à nouveau les résultats dus à Pythéas.

Appuyé sur de nouvelles observations de dichotomies et sur des vues théoriques ingénieuses, bien que parfois contestables, il évalue à 14″ au plus la parallaxe solaire, résultat le plus précis qu'on eût eu jusqu'alors.

Je ne rappellerai pas ses nombreuses observations d'éclipses dont il publia le tableau, et qui devaient lui servir à édifier ou plutôt à contrôler une nouvelle théorie de la lune.

Ajouterai-je qu'il s'est empressé d'admettre les théories copernicienes, mieux encore les lois de Kepler.

Il n'hésita pas à faire connaître ses opinions dans son traité *De la pluie rouge* et dans son *Teratologia Cometica.*

Il ne prend qu'une minime précaution, bien mince en réalité. Le corps qui se meut dans son orbite elliptique, en trois cent soixante-cinq jours environ, s'appellera le *Tertium corpus.* Mais nul ne s'y trompe. Libert de Froidmont, l'ardent défenseur des décisions contraires à Galilée, appelle Wendelin le *Keplé-copernicien*, mais il ne reste pas moins son admirateur et son ami.

Bien plus, Wendelin apporta aux idées de Kepler une éclatante confirmation: il découvrit que, pour les satellites de Jupiter, la seconde loi du mouvement elliptique se vérifie; les carrés des temps de leurs révolutions autour de la planète sont entre eux comme les cubes de leurs distances à l'astre.

Il faut bien avouer cependant que notre astronome ne fut pas sans commettre quelques erreurs; c'est ainsi qu'il s'obstinait à vouloir établir l'égalité des jours solaires; c'est ainsi encore qu'il voulait faire parcourir à la lune une courbe ovoïde.

Le temps a passé sur les travaux de Wendelin; ses découvertes se sont effacées devant celles du grand Newton et de ses disciples; mais il ne serait pas juste d'oublier celui qui, le premier, a su démêler les variations dans la durée des oscillations du pendule, qui a constaté et établi la diminution continue de l'obliquité de l'écliptique, qui a calculé, avec une exactitude inconnue jusqu'à lui, la parallaxe solaire, qui enfin a contribué à établir d'une manière ferme le système de Kepler.

De nombreux chercheurs, surtout en Provence, et à leur tête un descendant d'André d'Arnaud, M. de Berluc Perussis, puis le savant éditeur des lettres de Peiresc, M. Tamizey de Larroque, M. Tardieu de Sisteron, M. l'abbé Pierrisnard s'occupent à rappeler la gloire de l'astronome flamand. Bientôt, sur le sommet de Lure, dominant sa Provence aimée, un monument durable s'élèvera en souvenir du Belge qui, devançant de plus de deux siècles les observateurs du Ventoux, a commencé dans ces contrées les premières recherches météorologiques.

DISTANCES DES POINTS REMARQUABLES DU TRIANGLE (*)

PAR CLÉMENT THIRY.

Nous nous proposons de démontrer, dans ce petit travail, une relation générale remarquable (P) *donnant la distance d'un point quelconque* P *au point d'intersection* K_n *des droites qui, issues des sommets d'un triangle, partagent les côtés opposés dans le rapport des puissances* $n^{ièmes}$ *des côtés adjacents,* relation dont les formules classiques, ainsi que la plupart des formules relatives aux points de Brocard, de Lemoine, de Gergonne, etc., ne sont que des cas particuliers; nous établirons aussi une seconde relation (T), assez générale, conduisant à d'autres résultats plus ou moins remarquables.

Notations et préliminaires. 1. Soient O, R le centre et le rayon du cercle circonscrit; I, r le centre et le rayon du cercle inscrit; G le centre de gravité; H l'orthocentre; K le point de Lemoine; enfin W et W′ les points de Brocard d'un triangle ABC de surface S.

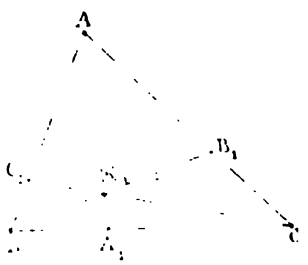


FIG. 1.

(*) Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique,* 3e série, t. XXI, n° 4, pp. 471-481, 1891.

2. Soient, sur les côtés BC, CA, AB du triangle ABC, des points A_1, B_1, C_1, tels que (fig. 1)

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{c^n}{b^n}, \quad \frac{CB_1}{AB_1} = \frac{a^n}{c^n}, \quad \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{b^n}{a^n}.$$

On a

$$\frac{BA_1 \times CB_1 \times AC_1}{CA_1 \times AB_1 \times BC_1} = \frac{c^n.a^n.b^n}{b^n.c^n.a^n} = 1;$$

les droites AA_1, BB_1, CC_1 se coupent donc en un même point que nous désignerons par K_n.

On a

$$\frac{AK_n}{A_1K_n} = \frac{AC_1 \times BC}{BC_1 \times CA_1} = \frac{b^n}{a^n} \times \frac{b^n + c^n}{b^n} = \frac{b^n + c^n}{a^n}.$$

Cas particuliers. Si $n = 0$, $K_0 = G$; si $n = 1$, $K_1 = I$; si $n = 2$, $K_2 = K$.

3. Si M est un point de la base BC du triangle ABC tel que BM : MC = m : n, on a

$$n\overline{AB}^2 + m\overline{AC}^2 = (m + n)\overline{AM}^2 + \frac{mn}{m + n}\overline{BC}^2.$$

C'est sous cette forme que nous emploierons le *théorème de Stewart*, théorème qui nous servira à établir toutes les formules dont nous avons parlé plus haut.

4. On démontre aisément, par la géométrie seule, les relations suivantes :

$$\overline{WA}^2 = \frac{b^4c^2}{\Sigma a^2b^2}, \quad \overline{WB}^2 = \frac{c^4a^2}{\Sigma a^2b^2}, \quad \overline{WC}^2 = \frac{a^4b^2}{\Sigma a^2b^2},$$

$$\overline{W'A}^2 = \frac{c^4b^2}{\Sigma a^2b^2}, \quad \overline{W'B}^2 = \frac{a^4c^2}{\Sigma a^2b^2}, \quad \overline{W'C}^2 = \frac{b^4a^2}{\Sigma a^2b^2};$$

$$\frac{BD}{CD} = \frac{c^2}{a^2}, \quad \frac{AW}{WD} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2}{a^2c^2}, \quad \overline{AD}^2 = \frac{c^2.\Sigma a^2b^2}{(c^2 + a^2)^2}.$$

le point D étant l'intersection de AW et de BC, Σa^2b^2 la quantité $(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$.

A. *Le carré de la distance d'un point quelconque* P, *au point d'intersection* K_n *des droites qui, issues des sommets d'un triangle* ABC, *partagent additivement les côtés opposés, dans le rapport des puissances* $n^{ièmes}$ *des côtés adjacents, est donné par la relation*

$$\overline{K_n}^2 = \frac{a^n\overline{PA}^2 + b^n\overline{PB}^2 + c^n\overline{PC}^2}{a^n + b^n + c^n} - \left(\frac{abc}{a^n + b^n + c^n}\right)^2 (a^{n-2}b^{n-2} + a^{n-2}c^{n-2} + b^{n-2}c^{n-2}). \quad (P)$$

Soit (fig. 2) M le point d'intersection de AK_n avec BC.

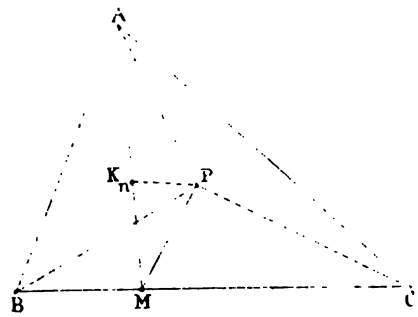


FIG 2.

Appliquons le théorème de Stewart aux triangles APM, BPC, ABC, nous aurons, à cause de

$$\frac{AK_n}{K_nM} = \frac{b^n + c^n}{a^n}, \quad \frac{BM}{MC} = \frac{c^n}{b^n}:$$

$$a^n.\overline{PA}^2 + (b^n + c^n)\overline{PM}^2 = (a^n + b^n + c^n)\overline{PK_n}^2 + \frac{a^n(b^n + c^n)}{a^n + b^n + c^n}\overline{AM}^2. \quad (1)$$

$$b^n.\overline{PB}^2 + c^n.\overline{PC}^2 = (b^n + c^n)\overline{PM}^2 + \frac{b^nc^n}{b^n + c^n}.a^2, \quad . \quad . \quad (2)$$

$$b^n.c^2 + c^n.b^2 = (b^n + c^n)\overline{AM}^2 + \frac{b^nc^n}{b^n + c^n}.a^2. \quad (3)$$

De ces égalités on tire la relation (P), que nous écrirons, d'une façon abrégée,

$$\overline{PK}_n^2 = \frac{\Sigma a^n \overline{PA}^2}{\Sigma a^n} - \left(\frac{abc}{\Sigma a^n}\right)^2 . \Sigma a^{n-2} b^{n-2} = \frac{\Sigma a^n \overline{PA}^2}{\Sigma a^n} - E_n, \quad . \text{(P)}$$

E_n étant une constante indépendante de la position du point P.

Positions remarquables du point P. I. Si le point P est le centre O, alors PA = PB = PC = R; et, partant,

$$\overline{OK}_n^2 = R^2 - E_n. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \text{(O)}$$

II. Si le point P est le point H, $\overline{AH}^2 = 4R^2 - a^2$, $\overline{BH}^2 = 4R^2 - b^2$, $\overline{CH}^2 = 4R^2 - c^2$; la formule générale (P) donne donc

$$\overline{HK}_n^2 = 4R^2 - \frac{(a^{n+2} + b^{n+2} + c^{n+2})}{a^n + b^n + c^n} - E_n. \quad . \quad . \text{(H)}$$

III. Supposons que le point P soit le point de Brocard. En remplaçant, dans (P), $\overline{WA}^2$, $\overline{WB}^2$, $\overline{WC}^2$ par leurs valeurs données dans les préliminaires, on trouve aisément

$$\overline{WK}_n^2 = \frac{a^2b^2c^2}{\Sigma a^2b^2}\left(\frac{a^{n-2}b^2 + b^{n-2}c^2 + c^{n-2}a^2}{a^n + b^n + c^n}\right) - E_n. \quad . \text{(W)}$$

De même

$$\overline{W'K}_n^2 = \frac{a^2b^2c^2}{\Sigma a^2b^2}\left(\frac{a^{n-2}c^2 + b^{n-2}a^2 + c^{n-2}a^2}{a^n + b^n + c^n}\right) - E_n. \quad . \text{(W')}$$

Quelques valeurs particulières de E_n. Si nous faisons successivement dans E_n, $n=0$, $n=1$, $n=2$, nous trouverons :

$$E_0 = \frac{a^2b^2c^2}{(1+1+1)^2}\left[\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{b^2c^2}\right] = \frac{a^2+b^2+c^2}{9};$$

$$E_1 = \frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)^2}\left[\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right] = \frac{abc}{a+b+c} = 2rR;$$

$$E_2 = \frac{a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}\left[a^0b^0+a^0c^0+b^0c^0\right] = \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

Positions remarquables du point K_n. Les formules générales (O), (H), (W) et (P) donnent immédiatement, pour $n=0$, $n=1$, $n=2$:

$$(O)\ \begin{cases} \overline{OG}^2 = R^2 - E_0 = R^2 - \dfrac{(a^2+b^2+c^2)}{9}. \\ \overline{OI}^2 = R^2 - E_1 = R^2 - 2Rr. \\ \overline{OK}^2 = R^2 - E_2 = R^2 - \dfrac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}. \end{cases}$$

$$(H)\ \begin{cases} \overline{HG}^2 = 4R^2 - \dfrac{4}{9}(a^2+b^2+c^2) - 4\overline{OG}^2. \\ \overline{HI}^2 = 4R^2 - \dfrac{(a^3+b^3+c^3)}{a+b+c} - 2Rr. \\ \overline{HK}^2 = 4R^2 - \dfrac{(a^4+b^4+c^4)}{a^2+b^2+c^2} - \dfrac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}. \end{cases}$$

Quelques conséquences des formules obtenues.

I. Puisque KW = KW', OW = OW', *la droite* WW' *est donc perpendiculaire à* OK *en son milieu.*

II.

$$\overline{WO}^2 + \overline{WK}^2 = \left(R^2 - \frac{a^2b^2c^2}{\Sigma a^2b^2}\right) + \left(\frac{a^2b^2c^2}{\Sigma a^2b^2} - E_2\right) = R^2 - E_2 = \overline{OK}^2;$$

l'angle OWK est donc droit, et, partant, OW'K l'est aussi.

Conséquemment, le cercle de diamètre OK *passe par les points de Brocard.* C'est le *cercle de Brocard* du triangle.

III. Si, dans la formule (P), nous faisons coïncider le point P avec le point K_n, nous aurons la jolie relation

$$\Sigma a^n \overline{AK}_n^2 = \frac{a^2b^2c^2}{\Sigma a^n} \cdot \Sigma a^{n-2}b^{n-2},$$

laquelle donne successivement, pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$:

$$\Sigma \overline{AG}^2 = \frac{\Sigma a^2}{3}, \quad \Sigma a \cdot \overline{AI}^2 = abc, \quad \Sigma a^2 \overline{AK}^2 = \frac{3a^2b^2c^2}{\Sigma a^2} = \frac{a^2b^2c^2}{\Sigma \overline{AG}^2}.$$

IV. Soit α l'angle de Brocard; en se servant des valeurs connues de $\operatorname{tg}^2\alpha$, $\cos^2\alpha$, $\sin^2\alpha$, on a

$$\overline{OK}^2 = R^2(1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha), \quad \overline{WK}^2 = 4R^2\sin^2\alpha - 3\operatorname{tg}^2\alpha,$$

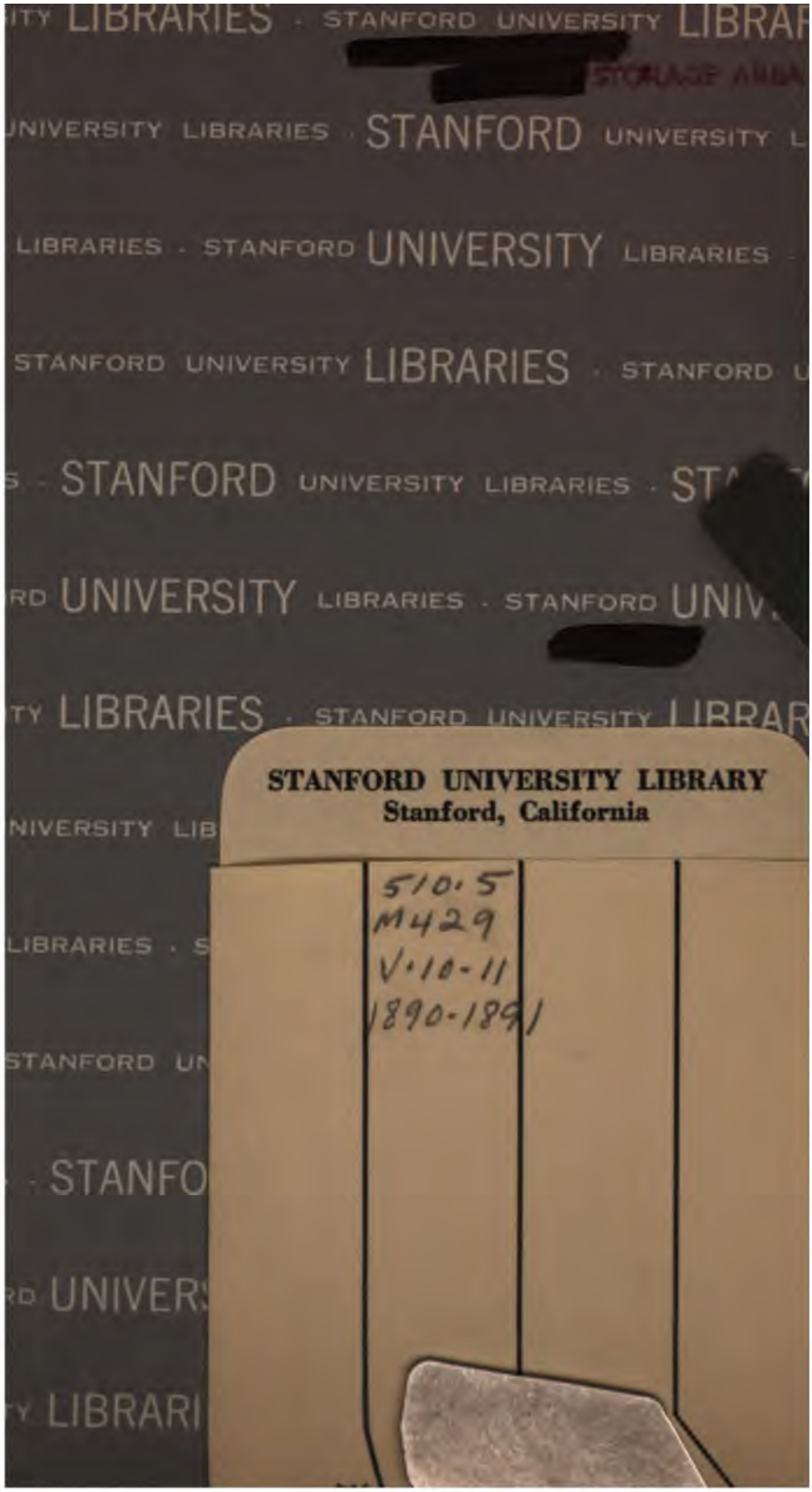
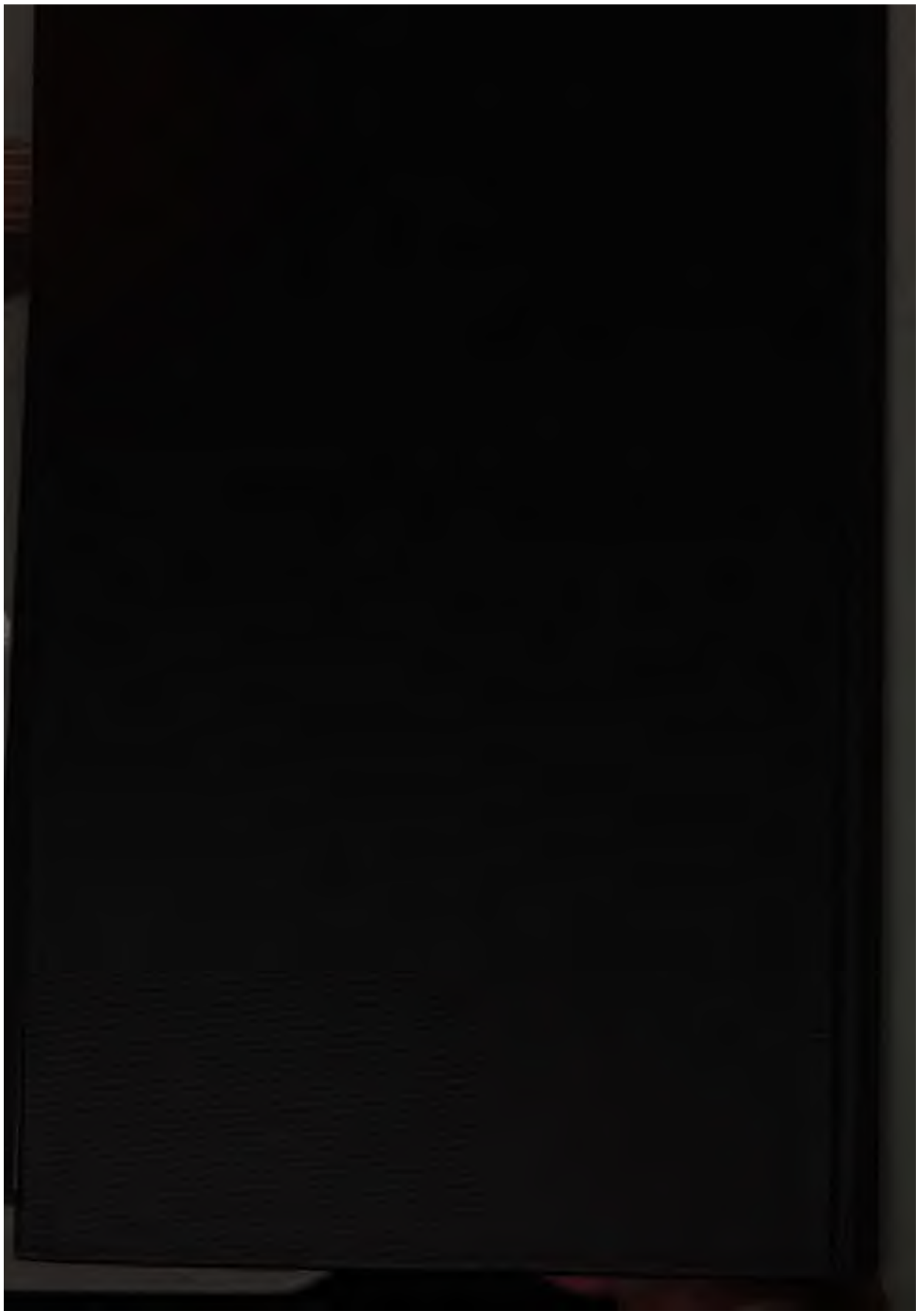
$$\overline{WO}^2 = R^2(1 - 4\sin^2\alpha),$$

$$\overline{WK}_n^2 = 4R^2\sin^2\alpha \cdot \frac{\Sigma a^{n-2}b^2}{\Sigma a^n} - E_n, \quad \overline{WH}^2 = 4R^2\cos^2\alpha - \frac{\Sigma a^2b^4}{\Sigma a^2b^2}.$$

LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES

To avoid fine, this book should be returned on or before the date last stamped below

SOM-12-60-96425


STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD UNIVERSITY LIBRARY
Stanford, California
510.5
M429
V.10-11
1890-1891